Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 532.593

О СОСТАВНЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Я. И. Секерж-Зенькович

(Москва)

Установившиеся волны конечной амплитуды, вызванные давлением, периодически распределенным вдоль поверхности жидкости, и пропадающие при переходе этого давления в постоянное, названы вынужденными. Установившиеся волны конечной амплитуды, отвечающие постоянному на поверхности давлению, но существующие при особых значениях скорости потока, названы свободными. Вынужденные капиллярно-гравитационные волны на поверхности жидкости бесконечной глубины рассмотрены в работах [1, 2]. Аналогичные свободные волны исследованы в работах [3, 4].

Ниже устанавливается возможность совместного существования обоих указанных типов капиллярно-гравитационных волн малой, но конечной амплитуды при особых значениях скорости потока на бесконечной глубине. Эти волны названы составными. При тождественном обращении в нуль переменной части распределенного по поверхности давления эти волны не пропадают, а переходят в волны свободные.

Задача рассматривается в строгой постановке и сводится к решению системы трех нелинейных уравнений, из которых одно является интегральным, а остальные трансцендентными. При этом давление на поверхности задается в форме бесконечного тригонометрического ряда, коэффициенты которого пропорциональны целым, на две единицы большим их номеров, степеням некоторого безразмерного малого параметра.

Устанавливается теорема существования и единственности решения. Указывается метод ее доказательства. Дается построение решения в любом приближении в форме рядов по степеням указанного выше малого параметра. До конца рассчитаны первые три приближения. Дано приближенное уравнение профиля волны.

Составные чисто гравитационные волны рассмотрены в работе [5].

1. Постановка задачи и вывод основных уравнений. Рассмотрим плоскопараллельное установившееся движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, ограниченной только сверху свободной поверхностью, на которой давление $p_0 = p_0' + p_0(x)$; при этом $p_0' = \mathrm{const}$, а $p_0(x)$ — заданная периодическая функция горизонтальной координаты x. Предположим, что поток движется слева направо с постоянной заданной скоростью c на бесконечной глубине. Как уже отмечено, при наличии слагаемого $p_0(x)$ имеют место вынужденные волны при любых значениях скорости c. Если же $p_0(x)$ отсутствует, то имеют место свободные волны при некоторых специальных значениях c. Здесь предполагается, что давление на свободной поверхности имеет оба слагаемых. Тогда свободная поверхность принимает форму неподвижной периодической волны в координатах, связанных с прогрессивной волной, имеющей скорость — c. Ищутся волны, которые не пропадают, а переходят в свободные при $p_0(x) \equiv 0$

и специальных значениях скорости c. Такие волны, как указано выше, названы составными.

Пусть искомая составная волна и давление $p_0(x)$ обладают симметрией относительно вертикали гребня. Совместим ось y прямоугольной системы координат xy с осью симметрии и направим ее вертикально вверх. За начало координат O примем точку пересечения оси y со свободной поверхностью, а ось x направим вправо.

Плоскость течения xy примем за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. Пусть φ — потенциал скоростей, ψ — функция тока, $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал скоростей, U, V — проекции вектора скорости $\mathfrak{q}$ на оси координат.

Тогда имеем

$$dw \,/\, dz = -U + iV, \quad U = -\partial\varphi \,/\, \partial x, \quad V = -\partial\varphi \,/\, \partial y$$

Для вывода основных уравнений задачи сначала отобразим конформно область, занятую одной волной и представляющую собой вертикальную бесконечную полуполосу, ограниченную сверху волнообразной кривой, на полуполосу $0 \leqslant \varphi \leqslant c\lambda$, $0 \leqslant \psi \leqslant \infty$ в плоскости w, а затем эту полуполосу на внутренность единичного круга с центром в начале координат плоскости $u = u_1 + iu_2$. При этом предполагается, что длина волны λ совпадает с периодом функции $p_0(x)$.

Как известно, последнее отображение дается формулой

$$w = \frac{\lambda c}{2\pi i} \ln u \tag{1.1}$$

При этом профиль волны перейдет в окружность единичного круга с разрезом вдоль радиуса $\arg u = 0$.

Отображение круга $|u| \leqslant 1$ на область одной волны плоскости z определяется из соотношения

$$\frac{dz}{du} = -\frac{\lambda}{2\pi i} \frac{e^{i\omega(u)}}{u}, \qquad \omega(u) = \Phi + i\tau \tag{1.2}$$

Функция $\omega(u)$, как голоморфная, представляется рядом Тейлора внутри круга. Коэффициенты этого ряда должны быть действительными в силу симметрии волны.

Из (1.1) и (1.2) находим

$$dw \,/\, dz = -ce^{\tau - i\Phi}$$

Отсюда следует, что всюду в потоке функция Φ равна углу, образуемому вектором скорости $\mathfrak{q}$ с осью x, и что

$$q = |\mathfrak{q}| = ce^{\tau} \tag{1.3}$$

Отметим, что свободный член в разложении $\omega(u)$ равен $A_0 = 0$, так как скорость потока в бесконечности направлена по оси x и равна c.

Из (1.2) находим при $u = e^{i\theta}$ (θ — угол радиуса-вектора с осью u_1) дифференциальное соотношение; отделяя в нем действительные и мнимые части и интегрируя, получаем параметрическое уравнение профиля волны

$$x = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)}\cos\Phi(\eta)\,d\eta, \quad y = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)}\sin\Phi(\eta)\,d\eta \tag{1.4}$$

Здесь $\tau(\eta) = \tau(1, \eta), \quad \Phi(\eta) = \Phi(1, \eta)$

Из (1.4) следует, что при решении задачи, кроме $\Phi(\theta)$, необходимо найти и $\tau(\theta)$. Из разложения функции $\omega(u)$ вытекает, что эти функции можно представить следующими тригонометрическими рядами:

$$-\tau(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta, \qquad \Phi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \tag{1.5}$$

Здесь положено $A_0 = 0$, согласно сказанному выше. Разложения (1.5) удовлетворяют условию симметрии искомой волны относительно вертикали ее гребня.

Переходя к граничному условию на поверхности, берем для нее интеграл Бернулли

$$p / \rho = C - gy - {}^1/_2 q^2 \tag{1.6}$$

где C — константа, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность. На свободной поверхности разность давлений уравновешивается нормальной составляющей сил поверхностного натяжения. Для этих сил по закону Лапласа имеем

$$p - p_0 = \pm \mu / R \tag{1.7}$$

Здесь p — давление со стороны жидкости, $p_0 = p_0' + p_0(x)$ — давление со стороны свободной поверхности, μ — капиллярная постоянная, R — радиус кривизны в точках поверхности. Отсюда, выражая кривизну через $d\Phi / d\theta$, получаем

$$p - p_0 = \frac{2\pi\mu}{\lambda c} q \frac{d\Phi}{d\theta} \tag{1.8}$$

Подставив p из (1.8) в (1.6) и учитывая (1.3), находим

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \nu\left[\delta e^{-\tau} - e^{\tau} - \frac{2\pi}{\lambda}\varkappa y e^{-\tau} - p_0^*(x) e^{-\tau}\right] \tag{1.9}$$

$$\nu = \frac{\lambda c^2 \rho}{4\pi\mu}, \quad \delta = \frac{2(C\rho - p_0')}{\rho c^2}, \quad \varkappa = \frac{g\lambda}{\pi c^2}, \quad p_0^*(x) = \frac{2p_0(x)}{\rho c^2} \tag{1.10}$$

Здесь x и y как функции θ определяются формулами (1.4). Выделив в правой части (1.9) слагаемые, линейные относительно Φ и τ, с учетом выражения y, получаем

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \nu\left\{\delta - (\delta + 1)\tau + \varkappa\int_0^\theta \Phi(\eta)\,d\eta - S(\theta)(1 - \tau) + F[\tau, \Phi, S, \delta]\right\} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} F[\tau, \Phi, S, \delta] = {} & \delta(e^{-\tau} - 1 + \tau) - (e^{\tau} - 1 - \tau) + \\ & + \varkappa e^{-\tau}\int_0^\theta [e^{-\tau(\eta)}\sin\Phi(\eta) - \Phi(\eta)]\,d\eta - \\ & - \varkappa\int_0^\theta \Phi(\eta)\,d\eta + \varkappa e^{-\tau}\int_0^\theta \Phi(\eta) - S(\theta)(e^{-\tau} - 1 + \tau) \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что с точностью до константы, включенной в p_0'

$$p_0^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n+2} d_n \cos\frac{2\pi n}{\lambda} x, \qquad S(\theta) = p_0^*[x(\theta)] \tag{1.12}$$

где ε — малый положительный безразмерный параметр, d_n — заданные действительные числа, причем ряд $\Sigma\varepsilon^n d_n$ сходится в круге $\varepsilon_0 > 0$. Для получения $S(\theta)$ следует в (1.12) подставить значения $x(\theta) / \lambda$, найденные из уравнения, которое вытекает из (1.4)

$$\frac{x(\theta)}{\lambda} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)} \cos\Phi(\eta)\, d\eta \tag{1.13}$$

Уточним выражения для параметров. В случае свободной волны $S(\theta) \equiv 0$ и надо положить $c^2 = c_*^2(1 - \varepsilon^2)$; при этом c_*^2 выражается по следующей известной [1] формуле для свободной линейной капиллярно-гравитационной волны длины λ:

$$c_*^2 = \frac{2\pi\mu}{\lambda\rho} + \frac{g\lambda}{2\pi} \tag{1.14}$$

Учитывая указанное значение c, из (1.10) имеем

$$\nu = \frac{\lambda\rho}{4\pi\mu} c_*^2 (1 - \varepsilon^2) = \nu^{(0)}(1 - \varepsilon^2), \qquad \nu^{(0)} = \frac{\lambda\rho c_*^2}{4\pi\mu} \tag{1.15}$$

$$\varkappa = \frac{g\lambda}{\pi c_*^2(1 - \varepsilon^2)} = \varkappa_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n}\right), \qquad \varkappa_0 = \frac{g\lambda}{\pi c_*^2}$$

Подставив эти значения в (1.11), находим

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \nu^{(0)}\left\{\delta - 1 - (\delta + 1)\tau + \varkappa_0\int_0^\theta \Phi(\eta)\, d\eta + \right. \tag{1.16}$$

$$\left. + \varkappa_0 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n}\int_0^\theta \Phi(\eta)\, d\eta - S(\theta)(1 - \tau) + F[\tau, \Phi, S, \delta]\right\} - \nu^{(0)}\varepsilon^2\{\ldots\}$$

Здесь опущенное выражение во второй фигурной скобке должно быть таким же, как и в первой.

Равенство (1.16) дает связь между функциями $\tau(\theta)$ и $\Phi(\theta)$ на окружности $|u| = 1$. Для них справедливы известные [6] соотношения Дини

$$\Phi(\theta) = \int_0^{2\pi} K_0(\eta, \theta)\frac{d\tau}{d\eta}\, d\eta, \qquad K_0(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\eta \sin n\theta}{n} \tag{1.17}$$

$$\tau(\theta) = -\int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\frac{d\Phi}{d\eta}\, d\eta, \qquad K(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta \cos n\theta}{n}$$

Линейные относительно τ, Φ и ε слагаемые в фигурных скобках (1.16) преобразуем, применяя формулы (1.17) и интегрирование по частям. Затем в первой фигурной скобке объединяем слагаемые (с коэффициентами 2 и $-\varkappa_0$) с одинаковой подынтегральной функцией $d\Phi / d\eta$ и с разными ядрами

$$K(\eta, \theta), \quad K_2(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\eta \cos n\theta}{n^2}$$

где $K_2(\eta, \theta)$ — первая итерация ядра $K(\eta, \theta)$.

В уравнении (1.16) константы $\nu^{(0)}$ и $\varkappa_0$ считаются заданными, так как c_*^2 фиксировано, а δ определяется из условия периодичности $\Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi)$. Так как в правую часть уравнения (1.16) входит ε, то его решение и, следовательно, δ будут зависеть от ε. Положим

$$\delta = \delta_0 + \delta'(\varepsilon) \tag{1.18}$$

Из условия периодичности при $\varepsilon \to 0$ найдем, что $\delta_0 = 1$, так как при этом решении и величина $\delta(\varepsilon)$ стремятся к нулю.

После всех преобразований с учетом (1.18) уравнение (1.16) примет окончательный вид (многоточие во второй фигурной скобке заменяет шесть последних членов, таких же как в первой фигурной скобке)

$$\zeta(\theta) = \nu_1 \left\{ \int_0^{2\pi} K^*(\eta, \theta) \zeta(\eta)\, d\eta + \delta'(\varepsilon) + \right. \tag{1.19}$$

$$\left. + \delta'(\varepsilon) \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \zeta(\eta)\, d\eta + \varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0) \zeta(\eta)\, d\eta + \Psi(\theta, \varepsilon) \right\} -$$

$$- \nu_1 \varepsilon^2 \left\{ 2 \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \zeta(\eta)\, d\eta - \varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, \theta) \zeta(\eta)\, d\eta + \ldots \right\}$$

$$\zeta(\theta) = \frac{d\Phi}{d\theta}, \quad \Psi(\theta, \varepsilon) = \varkappa_0 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} \int_0^{\theta} \Phi(\eta)\, d\eta - S(\theta) \left[1 + \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \zeta(\eta)\, d\eta \right] +$$

$$+ F[\tau, \Phi, S, 1 + \delta'(\varepsilon)]$$

$$K^*(\eta, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\eta) \varphi_n(\theta)}{\nu_n}, \quad \nu_n = \frac{n^2}{2n - \varkappa_0}, \quad \varphi_n(\theta) = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}}$$

Здесь ν_n — собственные значения, $\varphi_n(\theta)$ — собственные функции ядра $K^*(\eta, \theta)$. Кроме того, положено $\nu^{(0)} = \nu_1$; при этом параметр $\varkappa_0$ предполагается выбранным так, чтобы собственное значение ν_1 было простым и положительным [1]. Заметим, что при $\nu^{(0)} = \nu_1$ величина c_*^2 будет иметь требуемое выражение. Действительно, из формул (1.19) для ν_n и (1.15) для $\nu^{(0)}$ и $\varkappa_0$ вытекает соотношение (1.14).

Условие периодичности для функций $\Phi(\theta)$ дает соотношение

$$\delta'(\varepsilon) = -\varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0) \zeta(\eta)\, d\eta + \tag{1.20}$$

$$+ \varepsilon^2 \left[\delta'(\varepsilon) + \varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0) \zeta(\eta)\, d\eta \right] - \frac{1 - \varepsilon^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta, \varepsilon)\, d\theta$$

Таким образом, задача свелась к определению функций $\zeta(\theta, \varepsilon) = d\Phi / d\theta$, $x(\theta, \varepsilon) / \lambda$ и константы $\delta = 1 + \delta'(\varepsilon)$ из системы уравнений

(1.13), (1.19) и (1.20). При этом $\tau(\theta, \varepsilon)$ найдется из (1.17), а

$$(1.21) \qquad \Phi(\theta, \varepsilon) = \int\limits_0^\theta \zeta(\eta, \varepsilon)\, d\eta$$

Если в уравнениях (1.19) и (1.20) исключить $x(\theta, \varepsilon) / \lambda$ с помощью (1.13), $\tau(\theta, \varepsilon)$ взять из (1.17), а $\Phi(\theta, \varepsilon)$ из (1.21), то система уравнений сведется к двум: (1.19) и (1.20). Уравнение (1.19) будет нелинейным интегральным уравнением относительно $\zeta(\theta, \varepsilon)$ с ядром $K^*(\eta, \theta)$ и параметром $\nu^{(0)} = \nu_1$. Уравнение (1.20) будет нелинейным трансцендентным уравнением относительно константы $\delta'(\varepsilon)$. Однако для решения удобнее этого преобразования не делать, а рассматривать систему из трех уравнений. При этом нелинейным интегральным уравнением будет только уравнение (1.19) относительно $\zeta(\theta, \varepsilon)$; остальные, также и (1.19), следует считать нелинейными трансцендентными уравнениями относительно $x(\theta, \varepsilon) / \lambda$ и $\delta'(\varepsilon)$ с линейными операторами и функционалами относительно искомых функций.

2. Решение основных уравнений задачи. Решение системы уравнений (1.13), (1.19) и (1.20) ищется в виде рядов по степеням параметра ε. Для каждого коэффициента разложения функции $\zeta(\theta, \varepsilon)$ получается линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром $K^*(\eta, \theta)$ и параметром $\nu^{(0)} = \nu_1$ (ν_1 — первое собственное значение этого ядра). Для первого коэффициента этого разложения получается однородное интегральное уравнение, которое решается по второй теореме Фредгольма. Уравнения для коэффициентов всех последующих приближений будут неоднородными. Эти уравнения решаются по третьей теореме Фредгольма. Решение каждого такого уравнения выражается в виде суммы из решения однородного уравнения с неопределенным коэффициентом C_{1n} (для n-го приближения) и частного решения неоднородного интегрального уравнения. Коэффициент C_{1n} определяется из условия разрешимости уравнения для $(n+2)$-го приближения.

Таким образом, каждый из коэффициентов C_{11}, C_{12} и C_{13} определяется из условия разрешимости уравнения для третьего, четвертого и пятого приближения.

Для коэффициентов разложений остальных искомых величин получается система линейных алгебраических уравнений. Из этой всегда разрешимой системы коэффициенты данного приближения явно выражаются через величины, найденные в предшествующих приближениях.

2.1. Определение первых трех приближений. Приводим определенные в третьем приближении выражения для $\zeta(\theta, \varepsilon)$, $x(\theta, \varepsilon) / \lambda$ и $\delta'(\varepsilon)$

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} \zeta(\theta, \varepsilon) &= \varepsilon C_{11} \cos\theta + \varepsilon^2 C_{22} \cos 2\theta + \varepsilon^3 (C_{13} \cos\theta + \\ &+ C_{33} \cos 3\theta) \\ \frac{x(\theta, \varepsilon)}{\lambda} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} C_{11} \sin\theta - \frac{\varepsilon^2}{2\pi} (C_{11}^2 + C_{22}) \sin 2\theta - \\ &- \frac{\varepsilon^3}{2\pi}\left[C_{13} \sin\theta + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} C_{11}^3 + \frac{1}{2} C_{11} C_{22} + \frac{1}{3} C_{33}\right) \sin 3\theta\right] \end{aligned}$$

$$\delta'(\varepsilon) = -\varepsilon\varkappa_0 C_{11} + \frac{\varepsilon^2}{4}\varkappa_0 (C_{11}{}^2 - C_{22}) -$$
$$-\varepsilon^3\varkappa_0 \left(\frac{1}{18}C_{11}{}^3 + \frac{1}{6}C_{11}C_{22} + C_{11} + C_{13} + \frac{1}{9}C_{33}\right)$$

Здесь

(2.2) $$C_{12} = 0 \text{ (см. (2.5))}, \; C_{22} = -\,{}^3/_4\,\varkappa\, C_{11}{}^2\nu_1\nu_2 \,/\, (\nu_2 - \nu_1)$$
$$C_{33} = {}^1/_{12}C_{11}\,[C_{11}{}^2\,(1 - {}^{11}/_3\,\varkappa_0) - {}^{13}/_2\,\varkappa_0 C_{22}]\,\nu_1\nu_3 \,/\, (\nu_3 - \nu_1)$$

Коэффициент C_{13} не вычислен, так как пятое приближение, необходимое для его нахождения, не определялось; C_{11} получается из уравнения

(2.3) $$[{}^1/_4 + {}^9/_{32}\,\varkappa_0{}^2\nu_1\nu_2 \,/\, (\nu_2 - \nu_1)]\, C_{11}{}^3 - 2C_{11} - d_1 = 0$$

Заметим, что при $d_1 = 0$ уравнение (2.3) обращается в уравнение, определяющее C_{11} в случае свободной волны.

2.2. Определение дальнейших приближений. Коэффициент C_{12}, как уже отмечено, определяется из условия разрешимости уравнения для $\zeta_4(\theta)$. Это условие приводит к соотношению

(2.4) $$C_{12}C_{11}{}^2[1 + {}^9/_8\varkappa_0{}^2\nu_1\nu_2 \,/\, (\nu_2 - \nu_1)\,] = 0$$

Отсюда $C_{12} = 0$, так как $C_{11} \neq 0$, и выражение в квадратной скобке, как можно показать, также отлично от нуля.

Методом математической индукции можно доказать, что аналогично случаю $n = 3$ и единственным образом найдутся $\zeta_n(\theta)$, $x_n(\theta)$ и δ_n при любом целом положительном $n \geqslant 3$. При этом уравнение для C_{1n} будет линейным, начиная с $n = 2$, и коэффициент при C_{1n} будет таким же, как в (2.4).

3. Определение профиля волны. Профиль волны в параметрической форме $x(\theta, \varepsilon)$ и $y(\theta, \varepsilon)$ определяется из соотношений (1.4), куда следует подставить $\Phi\,(\theta, \varepsilon)$ и $\tau\,(\theta, \varepsilon)$. Напомним, что через $\zeta\,(\theta, \varepsilon)$ функции $\tau\,(\theta, \varepsilon)$ и $\Phi\,(\theta, \varepsilon)$ выражаются соответственно формулами (1.17) и (1.21). Исключая из параметрических уравнений θ, получаем уравнение профиля в форме $y = y\,(x, \varepsilon)$.

Приводим приближенное с точностью до членов третьего порядка уравнение профиля волны, положив $k = 2\pi \,/\, \lambda$

(3.1) $$y\,(x, \varepsilon) = k^{-1}\{\varepsilon\, C_{11}\,(\cos kx - 1) + {}^1/_4\,\varepsilon^2\,(C_{11}{}^2 - C_{22})\,(1 -$$
$$-\cos 2\,kx) + {}^1/_6\,\varepsilon^3\,[(6\,C_{13} + {}^9/_4\,C_{11}C_{22})\,(\cos kx - 1) +$$
$$+ ({}^1/_3 C_{11}{}^3 - {}^5/_4\,C_{11}C_{22} + {}^2/_8\,C_{33})\,(\cos 3\,kx - 1)]\}$$

Здесь коэффициенты C_{ij} определяются формулами (2.2) и (2.3).

Замечание. По условию задачи, согласно п. 1, начало координат помещено в гребне волны. Поэтому при значениях x, близких к нулю, y должно быть отрицательным. Из анализа главного члена в (3.1) следует, что должно быть $C_{11} > 0$. Из уравнения (2.3) вытекает, что для этого надо считать $d_1 > 0$.

4. Существование и единственность решения задачи. Применяя методы Ляпунова — Шмидта и их развитие [7], можно установить следующую теорему.

Теорема. Система уравнений (1.13), (1.19) и (1.20) имеет единственное малое относительно ε и непрерывное по θ ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$) решение $\zeta(\theta, \varepsilon)$, $x(\theta, \varepsilon) / \lambda$ и $\delta'(\varepsilon)$ ($\delta'(\varepsilon) = \delta(\varepsilon) - 1$) и это решение будет аналитической функцией от ε при малых $|\varepsilon| < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$.

Доказательство теоремы проводится аналогично тому, как это выполнено в работах [8,9].

Из теоремы вытекает абсолютная и равномерная сходимость рядов для $\Phi(\theta, \varepsilon)$ и $\tau(\theta, \varepsilon)$. Сходимость рядов по степеням ε для подынтегральных функций в (1.4) вытекает из общих теорем анализа о подстановке ряда в ряд. На основании общих теорем анализа устанавливается сходимость ряда, приближенная сумма которого выражается формулой (3.1).

Замечание. При решении задачи функция $p_0^*(x)$ задавалась в форме (1.12). Это позволило построить решение в виде рядов по целым степеням параметра ε. Если принять, что

$$p_0^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n d_n \cos \frac{2\pi n}{\lambda} x$$

то, как можно показать путем исследования уравнения разветвления метода Ляпунова — Шмидта, решение, пришлось бы строить в форме рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$.

Поступила 7 VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Секерж-Зенькович Я. И.* Об одном виде установившихся капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
2. *Секерж-Зенькович Я. И.* Об установившихся капиллярно-гравитационных волнах конечной амплитуды, вызванных давлением периодически распределенным по поверхности потока жидкости бесконечной глубины. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 2.
3. *Секерж-Зенькович Я. И.* К теории установившихся капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 5.
4. *Секерж-Зенькович Я. И.* Установившиеся капиллярно-гравитационные волны конечной амплитуды на поверхности жидкости бесконечной глубины. Тр. Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1963, т. 27.
5. *Секреж-Зенькович Я. И.* О составных установившихся гравитационных волнах конечной амплитуды. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
6. *Некрасов А. И.* Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1951.
7. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 2 (104).
8. *Секерж-Зенькович Я. И.* Об одном виде установившихся волн конечной амплитуды. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
9. *Секерж-Зенькович Я. И.* Об одном виде установившихся волн. В кн.: Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.