

О СОПРОТИВЛЕНИИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ТРАНСЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ ПОТОКА

В. Н. Диеперов, Ю. Б. Лифшиц

(Москва)

В результате исследования течения на больших расстояниях от тел вращения устанавливается характер изменения параметров газа от величины отклонения скорости набегающего потока от звуковой. Эта зависимость дает возможность определить закон изменения сопротивления при трансзвуковых скоростях, хорошо подтверждающийся приведенными расчетами.

Свойство трансзвуковых течений, заключающееся в слабом влиянии величины скорости набегающего потока на отклонение параметров на теле перед скачком уплотнения от их значений при звуковой скорости на бесконечности, известно под названием закона стабилизации. Оно было открыто экспериментально и изложено в [1] применительно к плоским течениям. Связь закона стабилизации с характером потока на больших расстояниях перед скачком уплотнения установлена в работах [2, 3]. В первой из них, однако, считается, что сопротивление также слабо зависит от скорости на бесконечности. Это не согласуется с экспериментальными данными, которые дают быстрое движение скачка уплотнения к задней кромке тела при приближении величины скорости набегающего потока к звуковой. Если параметры перед скачком остаются неизменными, то на изменение сопротивления влияет как движение самого скачка, так и изменение параметров за ним. Поэтому для выяснения характера зависимости сопротивления тел от скорости набегающего потока следует изучить течение за скачком.

1. Приведем кратко нужные в дальнейшем свойства звуковых течений на больших расстояниях от тела вращения. Они исследованы в [4-11] и дают достаточно полную картину течения в целом. В частности, они выясняют природу возникновения сопротивления при звуковой скорости движения тел.

Из работ [4-11] следует, что на больших расстояниях от тела интенсивность скачка уплотнения мала, поэтому существует потенциал скорости, представимый в виде бесконечного асимптотического ряда. Ниже потребуются только три его члена. Они имеют вид

$$(1.1) \quad \Phi = a_* x + \sum_{k=1}^3 y^{-2k/7} \varphi_k(\xi), \quad \xi = xy^{-4/7} (\kappa + 1)^{-1/2}$$

Здесь a_* — критическая скорость звука, κ — показатель адиабаты Пуассона, x, y — оси цилиндрической системы координат. Функции $\varphi_k(\xi)$ определены с точностью до постоянных множителей, причем $\varphi_2(\xi)$ отлична от нуля только за скачком уплотнения. Фронт скачка уплотнения в соответствии с (1.1) дается равенством

$$(1.2) \quad x = (\kappa + 1)^{1/2} y^{4/7} \xi_S (1 + c_2 y^{-2/7} + c_3 y^{-4/7})$$

в котором ξ_S, c_2 и c_3 — постоянные величины.

Возьмем контрольную замкнутую поверхность, окружающую тело и образованную цилиндрической поверхностью $y = R$ и плоскостями $x = \pm (\kappa + 1)^{1/2} \xi_S R^{4/7}$

($R \gg 1$). Расход газа через нее, вычисленный при помощи асимптотического разложения (1.1), равен величине $A + O(R^{-2/3})$, в которой A пропорциональна $-c_2$ [9]. Поскольку замкнутое тело не может быть источником массы, то это означает, что формула (1.1) неприменима в некоторых областях поля потока на больших расстояниях. Область, где (1.1) справедливо, ниже называется областью I . Для получения физически непротиворечивой картины течения следует ввести еще область вихревого следа (область II), расположенную вдоль оси x вниз по потоку от тела. Главный член разложения решения в ней при $x \rightarrow \infty$ представляет собой сдвиговое течение

$$(1.3) \quad v_y = 0, \quad v_x = a_* u(\psi), \quad S = S_* + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \ln \left[\frac{\kappa + 1}{2} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} u^2 \right) \right]$$

полностью определенное изменением энтропии частиц $S(\psi) - S_*$, возникающем при пересечении скачка уплотнения, которое считается заданным. Следующие члены разложения решения в следе, зависящие от x , получены в [10] в координатах x, y , а не в координатах Мизеса x, ψ , более пригодных для этой цели. Недостаток расхода через область следа, обусловленный распределением энтропии в нем, компенсирует избыток расхода через внешнюю область и дает силу сопротивления согласно формуле (ρ_* — критическая плотность)

$$(1.4) \quad F_x = 2\pi\rho_* a_*^2 \int_0^\infty u^{-1} (1 - u^2) (1 - \mu^2 u^2)^{-\kappa/(\kappa-1)} d\Psi, \quad \mu^2 = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}$$

$$\Psi = \int_0^\psi \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{-1/(\kappa-1)} e^{S-S_*} d\psi$$

2. Перейдем к изучению течений, которые на очень больших расстояниях от тела мало отличаются от течения со звуковой скоростью и введем некоторый малый параметр ε , характеризующий это отличие. В области вне следа на больших расстояниях от тела вращения (область I) потенциал скорости течения представим в виде

$$(2.1) \quad \Phi = a_* x + \varphi(x, y) + \varepsilon \chi(x, y)$$

Здесь через $\varphi(x, y)$ обозначен потенциал возмущений звукового потока, определяемый согласно (1.1), а $\chi(x, y)$ — его возмущение, связанное с изменением граничных условий на бесконечности. Будем искать главный член разложения $\chi(x, y)$ в виде

$$(2.2) \quad \chi = y^{-2m/3} \chi_m(\xi), \quad m < 1$$

Пусть постоянная m , характеризующая $\chi(x, y)$, определена. Рассмотрим главный член полного возмущения потенциала

$$(2.3) \quad y^{-2/3} \varphi_1(\xi) + \varepsilon y^{-2m/3} \chi_m(\xi)$$

и предположим, что отличие граничных условий на бесконечности от звуковых связано только с отклонением значения скорости набегающего потока M_∞ от единицы. Тогда сама форма (2.3) должна сохраняться при различных M_∞ , а от величины M_∞ зависит только значение параметра ε . Для определения характера зависимости произведем трансзвуковое преобразование подобия

$$x \rightarrow x/x_0, \quad y \rightarrow y|1 - M_\infty|^{1/2}/x_0$$

требуя сохранения ξ . Тогда отношение слагаемых суммы (2.3) дает искомую зависимость

$$(2.4) \quad \varepsilon = (1 - M_\infty)^{-(m-1)/3}$$

Условие $m < 1$ входит в определение главного члена разложения потенциала $\chi(x, y)$ посредством (2.2). Оно указывает, что существуют расстояния, на которых второе слагаемое в (2.3) становится сравнимым с первым, и разложение (2.1) по малому параметру ε перестает быть справедливым. Порядок этих расстояний, определяемый путем сравнения величин слагаемых в (2.3) при постоянном ξ , приводит к оценкам

$$y = O[|1 - M_\infty|^{-2/3}], \quad |x| = O[(1 - M_\infty)^{-2/3}]$$

внешних границ области применимости всех построенных ниже разложений. Эти оценки означают, что в рассматриваемой области параметры течения мало отличаются от соответствующих значений в звуковом потоке, поэтому, например, при $M_\infty < 1$ как окончание местной сверхзвуковой зоны, так и место возникновения скачка уплотнения не принадлежат ей.

3. Таким образом, центральным вопросом задачи является определение величины m . Выпишем для этой цели уравнение, которому подчиняется сама функция $\chi_m(\xi)$ [2, 12]

$$(3.1) \quad \left(\frac{d\varphi_2}{d\xi} - \frac{16}{49} \xi^2 \right) \frac{d^2\chi_m}{d\xi^2} + \left[\frac{d^2\varphi_1}{d\xi^2} - \frac{16}{49} (m+1) \xi \right] \frac{d\chi_m}{d\xi} - \frac{4}{49} m^2 \chi_m = 0$$

Предельная характеристика $\xi = \text{const}$, вдоль которой $d\varphi_1/d\xi = 16/49 \xi^2$, является для него особой линией. Наибольшее значение m , при котором χ_m аналитична перед скачком уплотнения и удовлетворяет условию симметрии при переходе через ось x при $x < 0$, получено в [2, 12]. Оно равно четырем.

В соответствии с этим перед скачком уплотнения по (2.4) отличие параметров течения с $M_\infty \neq 1$ от звукового пропорционально $(1 - M_\infty)^{1/3}$, что является теоретическим обоснованием указанного выше экспериментального факта стабилизации величин перед скачком уплотнения при обтекании тел в трансзвуковом диапазоне скоростей [2, 3]. Другой же экспериментальный результат заключается в быстром с ростом M_∞ движении скачка к задней кромке. Он может быть объяснен только существованием в области за скачком решений уравнения (3.1) со значениями $m > -4$.

На самом фронте скачка, форма которого согласно (1.2), (2.1) и (2.2) задается уравнением

$$(3.2) \quad x = (\kappa + 1)^{1/2} \xi_S y^{1/2} (1 + c_2 y^{-2/7} + c_3 y^{-4/7} + \dots + \varepsilon D_m y^{2(1-m)/7})$$

должны быть выполнены условие непрерывности потенциала и уравнение ударной поляры. Преобразованные в соответствии с (2.3), они приводят к данным Коши для уравнения (3.1) при $\xi = \xi_S$.

Решение полученной задачи Коши для уравнения (3.1) при $\xi > \xi_S$ удовлетворяет условию отсутствия источников на оси x только при $m = 2$ [9, 10]. Значение $m = 2$ выходит из рассматриваемой области изменения $-4 < m < 1$, поэтому при $\xi \geq \xi_S$ возмущенное течение описывается обоими линейно-независимыми решениями уравнения (3.1). Анализ их поведения при $\xi \rightarrow \infty$ дает оценку

$$(3.3) \quad \chi_m(\xi) \rightarrow \xi^{-m/2} (A_{m,1} + A_{m,2} \ln \xi)$$

в которой $A_{m,1}$ и $A_{m,2}$ — постоянные, пропорциональные D_m .

Для дальнейшего необходимо вычислить добавочные величины v_x' и v_y' в составляющих скорости, индуцируемые потенциалом $y^{-2m/7} \chi_m(\xi)$.

В окрестности оси x согласно формуле (3.3) получаются оценки

$$(3.4) \quad v_x' = O(x^{-1-m/2} \ln \xi), \quad v_y' \rightarrow B_m x^{-m/2} y^{-1}, \quad B_m = -4/7 A_{m,2} (\kappa + 1)^{m/6}$$

Соотношения (3.4) указывают, что возмущение звуковых условий на бесконечности приводит к бесконечно большим поперечным скоростям вблизи оси x . Этот результат является следствием неприменимости разложения (2.1) в области с площадью поперечного сечения порядка ε (область III), прилегающей к оси x , и не имеет места при $M_\infty = 1$.

4. Прежде чем заняться ликвидацией особенности при $y \rightarrow 0$, рассмотрим течение в области вихревого следа (область II), в которой, как указано в п. 2, потенциал скорости не существует. В качестве независимых переменных возьмем координаты x и Ψ , а искомыми функциями будут добавочные значения скорости v_x' и v_y' , энтропии S' и функции тока ψ' . Все они пропорциональны малому параметру ε . Течение в области II описывается уравнениями неразрывности, Крокко, адиабатичности и уравнениями для ψ' , линеаризованными относительно решения (1.3). Совместно с тремя граничными условиями при $\Psi \rightarrow \infty$, которые получаются путем применения принципа асимптотического сращивания с решением в области I при больших значениях x [13]

$$(4.1) \quad S' = v_x' = 0, \quad y v_y' = B_m x^{-m/2}$$

они полностью определяют поток в рассматриваемой области.

В соответствии с (4.1) решение указанных уравнений ищется в виде

$$(4.2) \quad v_x' = x^{1-m/2} f_m(\Psi), \quad v_y' = x^{-m/2} g_m(\Psi) \\ S' = x^{1-m/2} \sigma_m(\Psi), \quad \psi' = x^{1-m/2} \pi_m(\Psi)$$

Получающаяся в результате система линейных уравнений легко интегрируется

$$(4.3) \quad f_m = \frac{2}{m-2} B_m (1 - \mu^2 u^2)^{1/(\kappa-1)} u \frac{du}{d\Psi}, \quad g_m = B_m u y^{-1} \\ \sigma_m = \frac{2}{2-m} B_m (1 - \mu^2 u^2)^{1/(\kappa-1)} u \frac{dS}{d\Psi} \\ \pi_m = \frac{2}{m-2} B_m \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{1/(\kappa-1)} e^{S_* - S} u (1 - \mu^2 u^2)^{1/(\kappa-1)}$$

Из решения (4.3) следует, что граничные условия (4.1) действительно выполнены, потому что производные $du/d\Psi \rightarrow 0$, $dS/d\Psi \rightarrow 0$ при $\Psi \rightarrow \infty$ [10]. Кроме того, добавочный расход $\psi' = 2(m-2)^{-1} B_m x^{1-m/2}$ отличен от нуля при $\Psi \rightarrow \infty$ и при $\Psi = 0$. В полном соответствии с последним выводом вертикальная скорость $v_y = \varepsilon v_y'$ стремится к бесконечности как y^{-1} при приближении к оси x .

Этот результат заставляет ввести подобласть вихревого следа (область III), расположенную в непосредственной близости к оси x . Ее поперечный размер, как и поперечная скорость частиц в ней, имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$,

а горизонтальная скорость $v_x = O(1)$. Главный член разложения параметров потока в ней по ε дает равномерное течение с

$$(4.4) \quad v_x = a_* u(0), \quad v_y = 0$$

Значение функции тока в области *III* изменяется от $\psi'(x, 0)$ до нуля. Это означает, что полный дефицит расхода через обе области *II* и *III* равен $2\text{ле}\psi'(x, \infty)$. Подсчет избытка суммарного значения x — составляющей потока импульса, переносимого через плоскость $x = \text{const}$, пересекающую области *II* и *III*, при помощи решения (4.2) — (4.4), приводит к нулевому значению, хотя для частей этой плоскости, пересекающих каждую из областей, он отличен от нуля и пропорционален $x^{1-m/2}$.

5. Таким образом, построенная асимптотическая картина течения удовлетворяет как условиям на скачке уплотнения (3.2), так и условиям на оси симметрии $y = 0$. Остается выяснить, при каком значении m она имеет место.

Для этой цели рассмотрим следующие члены разложения добавочного потенциала, взятого в виде

$$(5.1) \quad \chi = \sum_{k=0} y^{-2(m+k)/7} \chi_{m+k}(\xi)$$

Каждая из функций χ_{m+k} удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, левая часть которого совпадает с (3.1), если в нем m заменить на $m + k$, а правая часть представляет собой сумму

$$-\sum_{p=1}^k \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\varphi_{p+1}}{d\xi} \frac{d\chi_{m+k-p}}{d\xi} \right) + \alpha(\varphi_p, \chi_{m+k-p})$$

В соответствии с (2.1) и (5.1) скачок задается равенством

$$(5.2) \quad x = (\kappa + 1)^{1/2} \xi_S y^{1/2} \left\{ 1 + c_2 y^{-2/7} + c_3 y^{-4/7} + \dots + \varepsilon \sum_{k=0} D_{m+k} y^{-2(m+k-1)/7} \right\}$$

Функции $\chi_{m+k}(\xi)$ подчиняются на линии $\xi = \xi_S$ условиям Коши, которые здесь не выписываются из-за громоздкости получающихся формул, но следует отметить, что задача Коши для каждой из функций χ_{m+k} зависит от произвольного параметра D_{m+k} , входящего в определение фронта скачка уплотнения (5.2). Решение (5.1) в области *I* порождает соответствующее разложение в областях *II* и *III*, каждый член которого описывается формулами (4.2) и (4.3), если в них заменить m на $m + k$. Особым является случай $m + k = 2$; ниже он будет подробно рассмотрен.

Вычислим по решению в области *I* энтропию, которую приобретают частицы при пересечении скачка уплотнения. Она имеет вид

$$S = b_1 y^{-18/7} + \varepsilon b_2 y^{-2(m+8)/7} + \dots, \quad (b_1 \text{ и } b_2 \text{ — постоянные})$$

Пропорциональный ε член этого выражения не зависит от x . Поэтому для срачивания энтропии в областях *I* и *II* в области *II* также должен по-

явиться независимый от x член разложения. Согласно (4.2) это возможно лишь при $m + k = 2$. Так как k целое положительное число, то m может принимать только целые отрицательные значения $0, -1, -2, \dots$. Наибольшее из них ноль.

Полученная величина $m = 0$ решает поставленную задачу об определении главного члена добавочного потенциала $\chi(x, y)$ при $M_\infty \neq 1$ за скачком уплотнения. Отличие же параметров потока в этой области от их значений при $M_\infty = 1$ оказывается согласно (2.4) пропорциональным $(1 - M_\infty)^{1/2}$.

6. Неравномерная зависимость от m является следствием неприменимости формул (4.3) для вычисления f_{m+k} , π_{m+k} и σ_{m+k} при $m + k = 2$. Это связано с изменением характера зависимости от x возмущений продольной скорости, энтропии и функции тока. Формулы (4.2) при $m + k = 2$ показывают, что искомые функции от x не зависят. При $m + k = 2$ вместо (4.2) следует рассмотреть более сложный вид решения, который является суммой двух членов: первый из них не зависит от x , а второй пропорционален $\ln x$. Существование второго члена позволяет найти решение с $g_2(\Psi) \neq 0$. Если же в потоке $g_2(\Psi) \equiv 0$, то искомое решение представляется только первым слагаемым, которое не зависит от x .

Система уравнений для вторых слагаемых получается однородной. Ее решение должно удовлетворять при $\Psi \rightarrow \infty$ условиям (4.1). Если в них $B_2 = 0$, то решение этой системы будет тривиальным. В случае $m = 0$ величина B_2 определяется. Действительно, при $m = 0$ уравнение для χ_2 имеет первый интеграл

$$\left(\frac{d\varphi_1}{d\xi} - \frac{16}{49} \xi^2 \right) \frac{d\chi_2}{d\xi} - \frac{16}{49} \xi \chi_2 + \frac{d\varphi_2}{d\xi} \frac{d\chi_1}{d\xi} + \frac{d\varphi_3}{d\xi} \frac{d\chi_0}{d\xi} = E$$

в котором E — постоянная величина. Она вычисляется при помощи данных Коши при $\xi = \xi_S$ и оказывается равной нулю при любых значениях D_0, D_1 и D_2 . Отсюда следует, что $B_2 = 0$.

Зависящие от χ_2 члены разложений параметров потока в области II определяются, если известно добавочное изменение энтропии $\varepsilon\sigma_2(\Psi)$, возникающее при пересечении частицами деформированного скачка уплотнения на небольших расстояниях от тела вращения. Они получают следующие:

$$f_2 = \frac{\kappa + 1}{2\kappa'} \frac{1 - \mu^2 u^2}{u} \sigma_2, \quad g_2 = 0$$

$$\pi_2 = \frac{1}{\kappa} \int_0^\Psi \frac{1 + \mu^2 u^2}{u} (1 - \mu^2 u^2)^{-\kappa/(\kappa-1)} \sigma_2 d\Psi$$

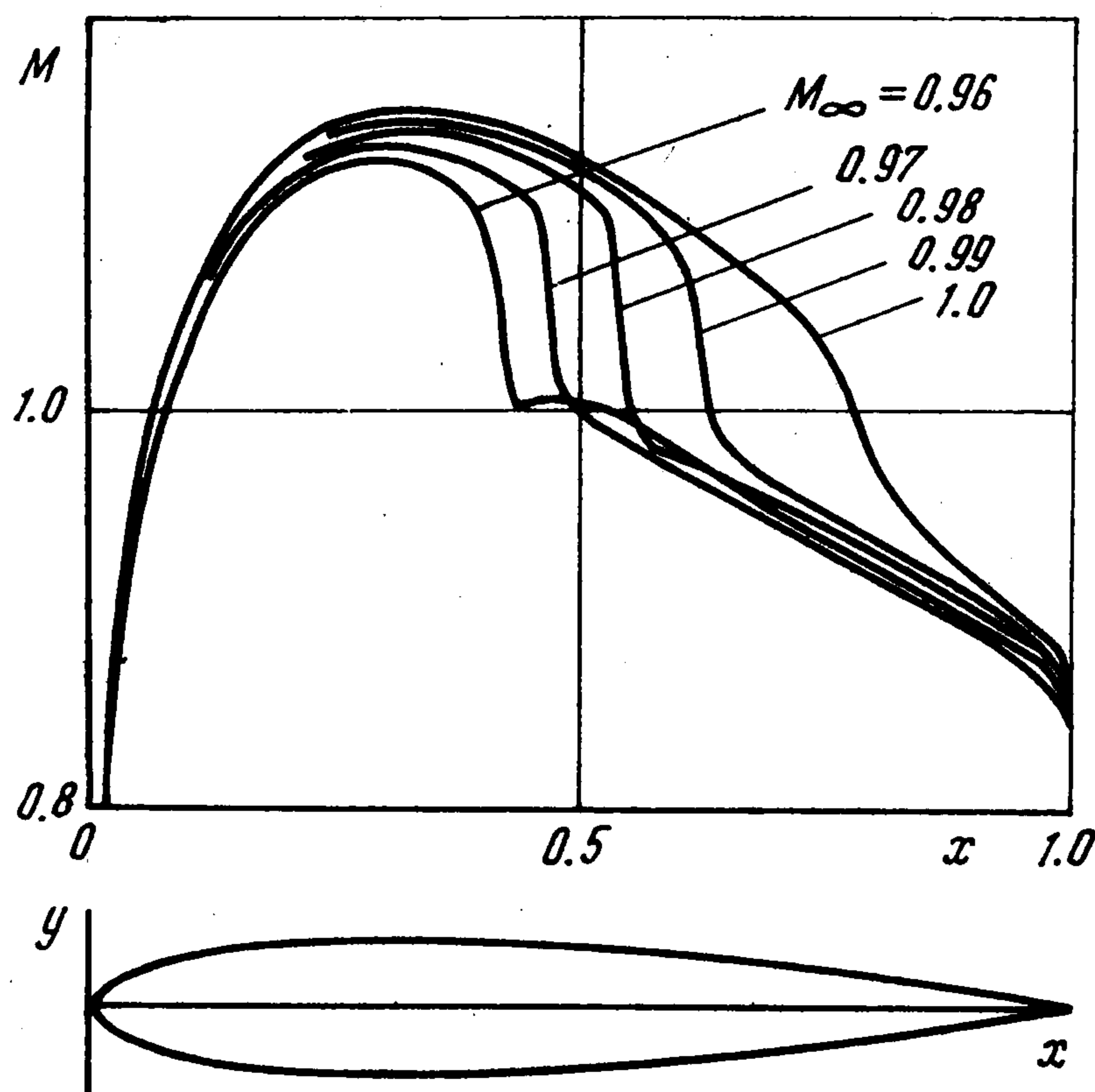
Функция $\sigma_2(\Psi)$ стремится к нулю при $\Psi \rightarrow \infty$ как $\Psi^{-1/2}$, поэтому $\pi_2(\infty)$ ограничена. Согласно ее значению формируется величина D_2 в формуле

(5.2), так чтобы выполнялось равенство

$$(2\pi)^{-1}Q_2' = \frac{4}{7}(\kappa + 1)^{1/2} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi \chi_2 = \pi_2(\infty)$$

выражающее непрерывность расхода при переходе из области *I* в *II*.

Рассмотренное течение обладает добавочным потоком импульса, который приводит к дополнительной к (1.4) силе сопротивления $\varepsilon F_x'$. Ее ве-



Фиг. 1

личина полностью определяется изменением энтропии в скачке уплотнения

$$(6.1) \quad F_x' = 4\pi\kappa^{-1}\rho_*a_*^2 \int_0^\infty \sigma_2 u^{-1} (1 - \mu^2 u^2)^{-\kappa/(\kappa-1)} d\Psi$$

7. При обтекании тел вращения может получиться так, что интеграл в (6.1) равен нулю. Предположим $\sigma_2(\Psi) \equiv 0$. Тогда в (2.1) $m = -1$, $\varepsilon = (1 - M_\infty)^{2/3}$, а $F_x' = a\varepsilon + d\varepsilon \ln \varepsilon$. Постоянные a и d могут иметь разный порядок. Именно эта ситуация возникла при расчете течений около двух тел вращения с плавной хвостовой частью. Расчет производился при помощи разностной релаксационной схемы, близкой к изложенной в [14], но примененной к телам вращения.

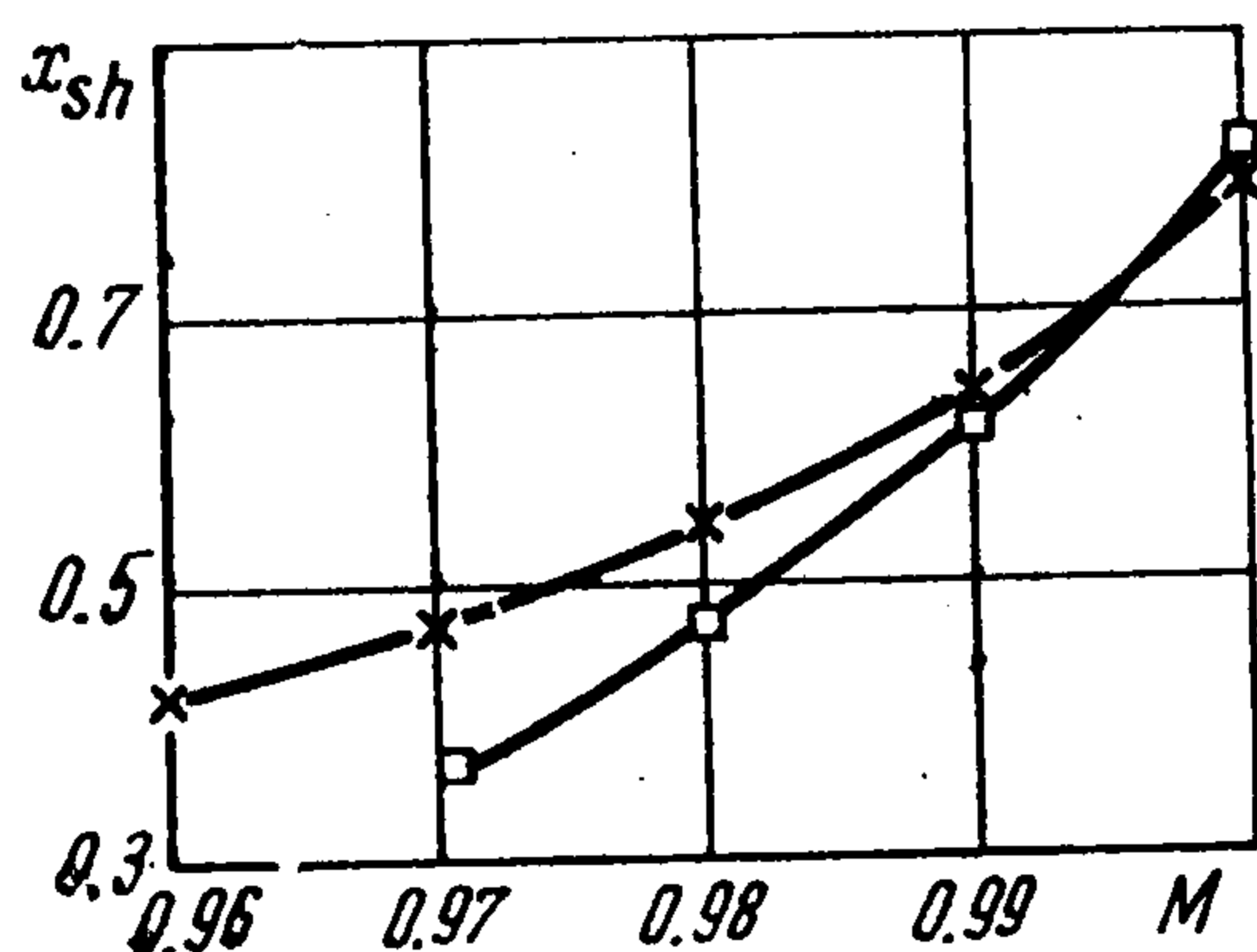
На фиг. 1 приведены распределения местных значений числа M при разных скоростях набегающего потока на одном из упомянутых тел вращения; его меридиональное сечение представляет собой профиль Чаплыгина. Видно, что с ростом M_∞ положение скачка уплотнения меняется гораздо быстрее, чем растут скорости в точках тела перед ним. Обработка их изменения, приведенная в [3], дала линейную зависимость от $(1 - M_\infty)^{5/3}$, что является численным подтверждением закона стабилизации.

Сопротивление тела вращения можно вычислить по распределению параметров на нем при помощи простого интегрирования коэффициента давления. Основной вклад в изменение интеграла, естественно, дает изменение положения скачка на теле или в не-

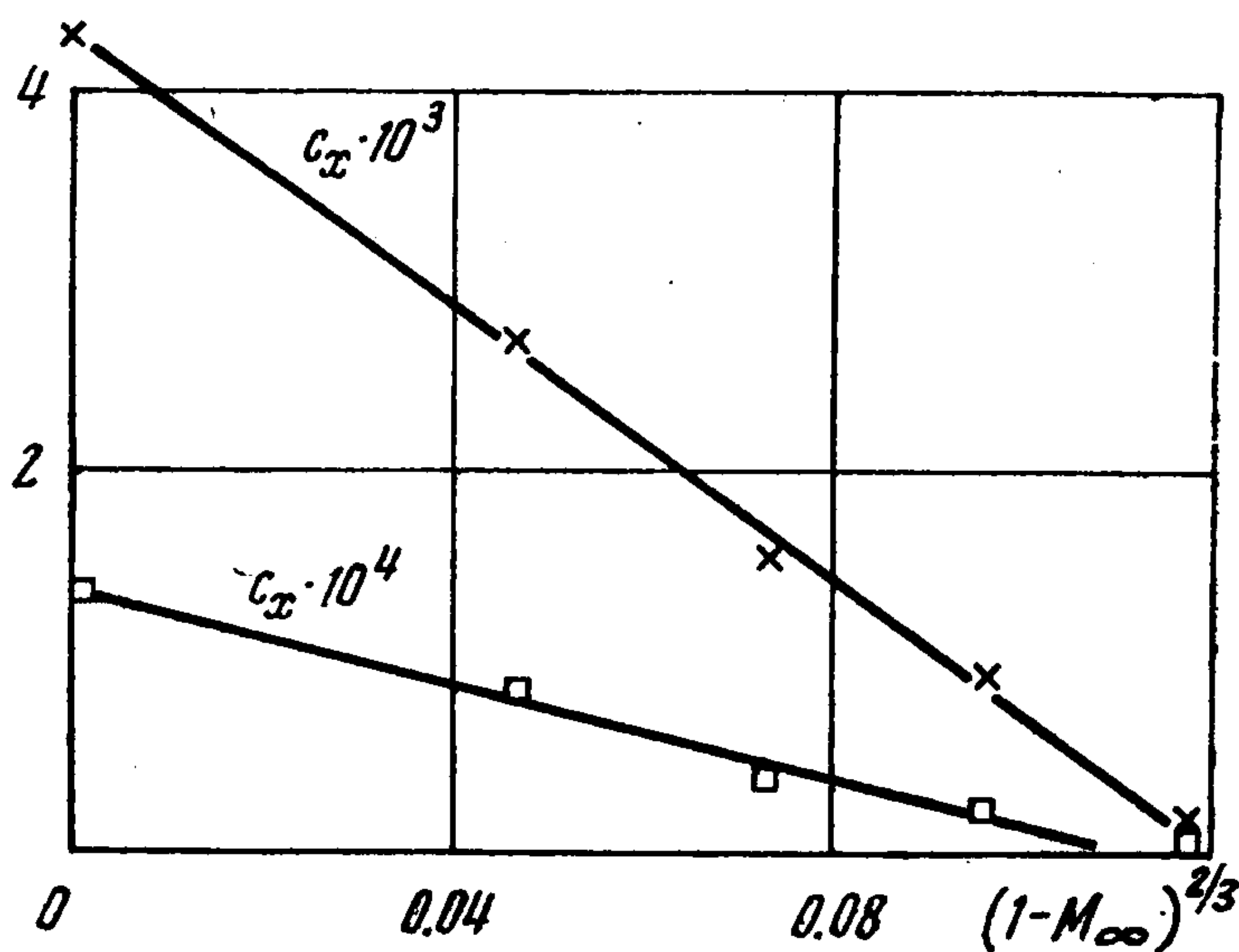
посредственной близости от него. На фиг. 2 построены координаты $x = x_{sh}$ скачка уплотнения для двух рассмотренных тел вращения при различных M_∞ на расстоянии $y = 0.1$ от них. Вычисление их значений производилось определением точки максимального градиента скорости. Результат обработки этих координат по формуле

$$\lg [x_{sh}(1) - x_{sh}(M_\infty)] = K + n \lg (1 - M_\infty)$$

показывает, что в обоих случаях $n = 0.66 \approx 2/3$. В полном согласии с полученным значением n построенные на фиг. 3 величины коэффициента сопротивления указы-



Фиг. 2



Фиг. 3

вают на линейную зависимость c_x от $(1 - M_\infty)^{2/3}$. Это хорошо согласуется с изложенным выше анализом асимптотических свойств осесимметричных трансзвуковых течений при $M_\infty \neq 1$.

Авторы благодарят О. С. Рыжова за обсуждение статьи.

Поступила 27 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперин В. Г., Горский И. П., Ковалев А. П., Христианович С. А. Физические основы околосзвуковой аэродинамики. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 5.
2. Гудерлей К. Г. Теория околосзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Диесперов В. Н., Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. Закон стабилизации для трансзвуковых течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.
4. Guderley K. G., Joshihara H. An axial-symmetric transonic flow pattern. Quart. Appl. Math., 1951, vol. 8, No. 4.
5. Barish D. T., Guderley K. G. Asymptotic forms of shock waves in flows over symmetrical bodies at Mach. 1. J. Aeronaut. Sci., 1953, vol. 20, No. 7.
6. Фалькович С. В., Чернов И. А. Обтекание тел вращения звуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
7. Müller E. A., Matshat K. Ähnlichkeitslösungen der transsonischen Gleichungen bei der Anström-Machzahl 1. Proc. 11-th Internat. Congr. of Appl. Mech. Munich, 1964, Berlin — New York — Springer-Verlag, 1966.
8. Envard D. Etude asymptotique de l'écoulement à grande distance d'un obstacle se déplaçant à la vitesse du son. III. Mecanique, 1968, t. 7, No. 3.
9. Диесперов В. Н., Рыжов О. С. О телах вращения в звуковом потоке идеального газа. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 1.
10. Tournemine G. Comportement asymptotique de l'écoulement sonique autour d'un corps de révolution de dimensions finies, en aval de l'onde de choc. Mecanique, 1968, t. 7, No. 3.
11. Лифшиц Ю. Б. Об обтекании тел вращения звуковым потоком идеального газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1973, т. 4, № 6.
12. Диесперов В. Н., Рыжов О. С. Об обтекании конечных тел равномерным потоком в околосзвуковом диапазоне скоростей. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 1.
13. Ван Дайк М. Методы теории возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
14. Garabedian P. R., Korn D. G. Analysis of transonic airfoils. Commun Pure and Appl. Math., 1971, vol. 24, No. 6.