Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 533.6.011

О МЕТОДЕ ГОДОГРАФА ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОКОЛОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

З. Н. Добровольская

(Москва)

Исследуется в плоскости годографа поведение возмущенного телом равномерного околозвукового потока газа вдали от тела вращения. Получено асимптотическое разложение потенциала Лежандра.

Рассматривается обтекание тонкого тела вращения потоком идеального газа, имеющим на бесконечности равномерную скорость, близкую к звуковой. Исследуется вопрос о затухании возмущений, вносимых телом вращения в околозвуковой поток, в области, расположенной вверх по потоку от скачков уплотнения и достаточно далеко от тела.

Асимптотическое разложение для потенциала скоростей в указанной области было получено в работе [1] в переменных физической плоскости течения. Однако известно, что переменные годографа в ряде задач оказываются более удобными, так как уравнение ударной волны в этих переменных становится известным. Поэтому в данной работе устанавливается асимптотика трансзвукового осесимметричного потока в переменных годографа. Исследование проводится в рамках приближенного уравнения Кармана для потенциала возмущенной скорости и основывается на использовании метода, развитого в работе [2]. В результате получено асимптотическое разложение потенциала Лежандра, обладающее необходимыми свойствами регулярности в плоскости годографа. Исследуется вопрос о сохранении регулярности полученного решения при отображении его на физическую плоскость течения.

1. Пусть тонкое тело вращения обтекается потоком идеального газа со скоростью на бесконечности v_∞, мало отличающейся от скорости звука a_∞. Введем цилиндрическую систему координат x, r, направив ось x по оси симметрии. Будем считать движение газа всюду изэнтропическим и воспользуемся для описания течения в рассматриваемой области приближенным уравнением Кармана [3] для потенциала $\Phi(x, r)$ возмущенной скорости

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0 \tag{1.1}$$

Функция $\Phi(x, r)$, а также переменные x, r в этом уравнении считаются безразмерными. Уравнение (1.1) выведено в предположении, что потенциал $\Phi(x, r)$ является малым добавком к потенциалу $a_* x$ равномерного потока, имеющего скорость, равную критической скорости a_*.

Известно, что главный член в асимптотическом законе затухания возмущений, вносимых телом вращения в равномерный звуковой поток, представляется автомодельной функцией [4–6]

$$\Phi_0(x, r) = r^{-2/7} f_0(\xi), \qquad \xi = x / r^{4/7} \tag{1.2}$$

В случае околозвуковой скорости невозмущенного потока в качестве главного члена решения уравнения Кармана в задаче обтекания тела вращения также принимается функция $\Phi_0(x, r)$, а решение ищется в виде

$$\Phi(x, r) = \Phi_0(x, r) + \Phi_1(x, r) \tag{1.3}$$

причем предполагается, что в исследуемой области $|\Phi_1| \ll |\Phi_0|$.

Перейдем в уравнении (1.1) к переменным годографа u, v: $u = \Phi_x$, $v = \Phi_r$. Для этого введем потенциал Лежандра

$$\varphi(u, v) = ux + vr - \Phi(x, r), \quad x = \varphi_u(u, v), \quad y = \varphi_v(u, v) \tag{1.4}$$

Применяя преобразование (1.4) к уравнению (1.1), получим уравнение для функции $\varphi(u, v)$

$$-u\varphi_{uv} + \varphi_{uu} + v\varphi_v^{-1}(\varphi_{uu}\varphi_{vv} - \varphi_{uv}^2) = 0 \tag{1.5}$$

По аналогии с видом автомодельного решения в физической плоскости [1] естественно искать решение уравнения (1.5), описывающее трансзвуковой поток вдали от тела, в виде

$$\varphi(u, v) = \varphi_0(u, v) + \varphi_1(u, v), \quad \varphi_1(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha_k} \Omega_{\alpha_k}(\eta) v^{\alpha_k}, \quad \eta = \frac{u^3}{v^2} \tag{1.6}$$

Перейдем к выбору новых переменных годографа. Для этого используем параметрическое представление функции $f_0(\xi)$ [5-7]

$$f_0 = 8 \cdot 9^{-1} s^{1/7}(6 + 3s - 2s^2), \quad \xi = s^{-2/7}(1 - 2s)$$

В рамках рассматриваемого приближения значение $s = 0$ соответствует оси симметрии $r = 0$, а $s = {}^6/_5$ — предельным характеристикам. Следуя работе [2], введем новую переменную σ

$$(2^{-7/3} r s^{-1/2})^{-6/7} = \exp\sigma \tag{1.7}$$

В исследуемой области, т. е. при больших значениях r, величина $\exp\sigma$ мала ($\sigma \to -\infty$). С учетом (1.7) компоненты скорости возмущений, отвечающие решению (1.2), будут иметь вид

$$u = 2 \cdot 3^{-1}(s - 1)\exp\sigma, \quad v = 2 \cdot 9^{-1} s^{1/2}(2s - 3)\exp(3\sigma/2) \tag{1.8}$$

Уравнения (1.8) будем рассматривать как формулы преобразования переменных годографа u, v в новые независимые переменные годографа s, σ. Якобиан этого преобразования показывает, что соответствие между переменными u, v и s, σ взаимно-однозначное. Если вместо переменных u, v ввести переменные s, σ по формулам (1.8), то переменная $\eta = u^3/v^2$ будет функцией только s, а разложение потенциала Лежандра (1.6) примет вид

$$\varphi(s, \sigma) = \varphi_0(\sigma) + \varphi_1(s, \sigma) \tag{1.9}$$

$$\varphi_0(\sigma) = c_0\exp(\sigma/3), \quad \varphi_1(s, \sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(\nu_k\sigma)\chi_k(s)$$

Первый член в правой части первого выражения (1.9) является главным членом, определяющим в плоскости годографа закон затухания возмущений, вносимых телом вращения в равномерный звуковой поток. Второе слагаемое позволяет учесть изменение поля течения, вызванное отклонением скорости невозмущенного потока от скорости звука.

Предполагается, что $|\varphi_1(s, \sigma)| \ll |\varphi_0(\sigma)|$ в исследуемой области. Однако на бесконечности физической плоскости ($r \to \infty$, $\sigma \to -\infty$) функция φ_1 должна превышать главный член, так как в противном случае, продолжая решение $\varphi(s, \sigma)$ до бесконечности, получили бы поток со звуковой скоростью на бесконечности. Последнее условие налагает следующее ограничение на выбор спектра значений ν_k:

$$\ldots < \nu_k < \nu_{k-1} < \ldots < \nu_1 < 1/3 \tag{1.10}$$

Более того, будем интересоваться только отрицательными значениями ν_k, так как на большом расстоянии от тела преобладающую роль в первом выражении (1.9) играют члены с отрицательными значениями ν_k. Уравнение (1.5) после введения в него новых независимых переменных s, σ принимает вид

$$\begin{aligned} &9\cdot 2^{-1}s(2s-3)(\varphi_{ss}\varphi_{\sigma\sigma}-\varphi_{s\sigma}^2) - 9\cdot 2^{-1}s(s-1)(3s-4)\times \\ &\times\varphi_s\varphi_{ss} + 9s(3s-4)\varphi_s\varphi_{s\sigma} + 27\cdot 2^{-1}(s-1)\varphi_s\varphi_{\sigma\sigma} + \\ &+ 9\cdot 2^{-1}s(s-1)\varphi_\sigma\varphi_{ss} - 9s\varphi_\sigma\varphi_{s\sigma} - 27\cdot 2^{-1}\varphi_\sigma\varphi_{\sigma\sigma} + 9\cdot 2^{-1}(-6s^2 + \\ &+ 9s - 2)\varphi_s^2 + 9\cdot 2^{-1}(3s-1)\varphi_s\varphi_\sigma + 9\cdot 2^{-1}\varphi_\sigma^2 \equiv R(\varphi, \varphi) = 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

с точностью до множителя $s^{1/2}\exp(-7\sigma/2)$, который отброшен в силу того, что отличен от нуля в исследуемой области.

Как видно из (1.11), нелинейный оператор $R(\varphi, \varphi)$ представляет собой конечную сумму квадратичных операторов $R^{ik}(\varphi, \varphi)$

$$R(\varphi, \varphi) = \sum_{i,k} R^{ik}(\varphi, \varphi) = \sum_{i,k} L^i(\varphi) L^k(\varphi)$$

Здесь $L^i(\varphi)$ и $L^k(\varphi)$ — линейные операторы, явно не содержащие переменной σ. Подставляя в оператор R функцию $\varphi(s, \sigma)$ из первого соотношения (1.9) и учитывая при этом линейность операторов $L^i(\varphi)$, $L^k(\varphi)$, получим

$$R(\varphi_0 + \varphi_1, \varphi_0 + \varphi_1) = R(\varphi_0, \varphi_0) + T(\varphi_0, \varphi_1) + R(\varphi_1, \varphi_1) \tag{1.12}$$

$$T(\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i,k} 2^{-1}[L^i(\varphi_0) L^k(\varphi_1) + L^i(\varphi_1) L^k(\varphi_0)]$$

где через $T(\varphi_0, \varphi_1)$ обозначена часть оператора $R(\varphi_0 + \varphi_1, \varphi_0 + \varphi_1)$, оставшаяся после выделения из него операторов $R(\varphi_0, \varphi_0)$ и $R(\varphi_1, \varphi_1)$. Функция $\varphi_0(\sigma)$ — решение трансзвукового приближения уравнения для потенциала Лежандра, поэтому $R(\varphi_0, \varphi_0) \equiv 0$ в выражении (1.12), и уравнение (1.11) после подстановки в него решения (1.9) принимает вид

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} c_k T(c_0 \exp(\sigma/3), \chi_k(s)\exp(\nu_k\sigma)) = \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} c_k c_l R(\chi_k(s)\exp(\nu_k\sigma), \chi_l(s)\exp(\nu_l\sigma)) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что операторы T и R в уравнении (1.13) представляют собой

(1.14) $$T\,(c_0 \exp(\sigma/3),\ \chi_k(s)\exp(\nu_k\sigma)) = \exp[(^1/_3 + \nu_k)\,\sigma]\,L\,(\nu_k,\ \chi_k(s))$$

$$R\,(\chi_k(s)\exp(\nu_k\sigma),\ \chi_l(s)\exp(\nu_l\sigma)) = \exp[(\nu_k + \nu_l)\,\sigma]\,P\,(\nu_k,\ \nu_l,\ \chi_k,\ \chi_l)$$

где через L и P обозначены соответственно линейный и квадратичный дифференциальные операторы. Уравнение (1.13) после подстановки в него выражений (1.14) и умножения на $\exp(-\sigma/3)$ принимает вид

(1.15) $$\sum_{k=1}^{\infty} c_k L(\nu_k,\ \chi_k(s))\exp(\nu_k\sigma) = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} c_k c_l P(\nu_k,\ \nu_l,\ \chi_k(s),\ \chi_l(s)) \times$$
$$\times \exp(\nu^{k,\,l}\sigma),\quad \nu^{k,\,l} = -\frac{1}{3} + \nu_k + \nu_l$$

Заметим, что из всех членов этого уравнения, в которые входит функция $\chi_k(s)$ (при некотором фиксированном k), член, находящийся в левой части, содержит $\exp\sigma$ в наименьшей степени. Группируя в уравнении (1.15) члены с одинаковыми множителями $\exp\alpha_i\,\sigma$ и приравнивая их нулю, получим уравнения для определения функций $\chi_i(s)$. При этом для каждого k могут представиться две возможности: (1.16) либо (1.17)

(1.16) $$L\,(\nu_k,\ \chi_k(s)) = 0$$

(1.17) $$c_k\,L\,(\nu_k,\ \chi_k(s)) = -c_m c_n P\,(\nu_m,\ \nu_n,\ \chi_m(s),\ \chi_n(s))$$

Уравнение (1.17) имеет место, если значение $\nu^{m,n} = -^1/_3 + \nu_m + \nu_n$ в показателе экспоненты в правой части уравнения (1.15), совпадает с каким-то показателем экспоненты в левой части уравнения. Если учесть, что все ν_k отрицательны, можно заключить, что $|\nu^{m,n}|$ всегда больше модуля тех значений ν, из которых $\nu^{m,n}$ образуется. Правая часть уравнения (1.17) содержит функции χ_m, χ_n с индексами $m, n < k$, поэтому на каждом этапе (для фиксированного k) она является известной функцией s.

Обозначим через ν_{0i} значения параметров ν, при которых разрешимо однородное уравнение (1.16), а под $\nu_1, \ldots, \nu_k, \ldots$ будем понимать теперь упорядоченную последовательность, состоящую из чисел ν_{0i} и $\nu^{m,n}$, расположенных согласно возрастанию их модулей.

Решение уравнения (1.16) с соответствующими граничными условиями представляет собой задачу на собственные значения. Уравнение (1.17) неоднородное и может быть решено, если значения $\nu^{m,n}$ не являются собственными значениями соответствующей однородной задачи.

Перейдем теперь к непосредственному определению собственных значений уравнения (1.16). Выписывая, согласно определению (1.14), оператор L, получим, что уравнение (1.16) будет иметь вид гипергеометрического дифференциального уравнения

(1.18) $$L\,(\nu,\ \chi_\nu(s)) = 2^{-1}\{s\,(5s-6)\chi''(s) + 6\chi'(s)\,[s\,(2-\nu) - 1] + 3\chi(s)\,\nu\,(1-3\nu)\} = 0$$

В качестве граничных условий при решении этого уравнения используется естественное требование отсутствия сингулярности решения в особых точках $s = 0$ и $^6/_5$, которым в физической плоскости течения соответствуют ось симметрии течения и предельная характеристика. Процедура определения собственных значений и собственных функций уравнения (1.18) подробно описана в работе [2] применительно к задаче обтекания тела вращения звуковым потоком газа. В упомянутой работе были найдены собственные значения ν, расположенные на числовой оси правее точки $^1/_3$. В отличие от этой задачи здесь представляет интерес та часть спектра собственных значений ν, которая расположена на числовой оси левее точки $^1/_3$, т. е. удовлетворяющая условию (1.10).

Решением уравнения (1.18) служит гипергеометрическая функция, регулярная в точке $s = {}^6/_5$, если ν принимает следующие значения:

$$\nu_{0i} = -6^{-1}[2i - 1 + (24i^2 + 24i + 1)^{1/2}], \quad i = 1, 2, \ldots \tag{1.19}$$

Формула (1.19) и определяет собственные значения уравнения (1.18). При этих значениях ν гипергеометрические ряды, представляющие собой собственные функции $\chi_i\,(s)$, вырождаются в полиномы. Полученные собственные значения ν_{0i} еще не позволяют получить искомого разложения потенциала Лежандра по степеням $\exp\sigma$, так как в ряд значений ν_{0i}, вычисляемых по формуле (1.19), будут вклиниваться значения $\nu^{m,n}$. Соответствующие им функции $\chi^{m,n}\,(s)$ должны находиться из решения неоднородного уравнения (1.17) при граничных условиях регулярности решения в точках $\sigma = 0$ и $^6/_5$.

Перейдем к вычислению значений $\nu^{m,n}$. Имеем

$$\nu^{1,1} = -{}^1/_3 + 2\nu_{01}$$

В силу того что справедливы неравенства

$$|\nu_{01}| < |\nu_{02}| < |\nu^{1,1}| < |\nu_{03}|$$

примем в качестве ν_1, ν_2, ν_3 следующие значения:

$$\nu_1 = \nu_{01}, \quad \nu_2 = \nu_{02}, \quad \nu_3 = \nu^{1,1} \equiv -{}^1/_3 + 2\nu_{01} \tag{1.20}$$

Согласно определению $\nu^{m,n}$

$$\nu^{1,2} = -{}^1/_3 + \nu_1 + \nu_2, \quad \nu^{1,3} = -{}^1/_3 + \nu_1 + \nu_3, \quad \nu^{2,2} = -{}^1/_3 + 2\nu_2, \quad \nu^{2,3} = -{}^1/_3 + \nu_2 + \nu_3, \quad \nu^{3,3} = -{}^1/_3 + 2\nu_3$$

Модули этих величин удовлетворяют неравенствам

$$|\nu_3| < |\nu_{03}| < |\nu^{1,2}| < |\nu^{1,3}| < |\nu_{04}| < |\nu^{2,2}|$$

Поэтому последовательность (1.20) продолжим следующим образом:

$$\nu_4 = \nu_{03}, \quad \nu_5 = \nu^{1,2} \equiv -{}^1/_3 + \nu_{01} + \nu_{02}, \quad \nu_6 = \nu^{1,3} \equiv -{}^2/_3 + 3\nu_{01}, \quad \nu_7 = \nu_{04}$$

При решении уравнения (1.17) естественно положить, что

$$c_k = c_m c_n \tag{1.21}$$

Тогда уравнение (1.17) принимает вид

$$(1.22)\qquad L\,(\nu^{m,n},\ \chi^{m,n}(s) = -P\,(\chi_m(s),\ \chi_n(s)\,)$$

причем правая часть этого уравнения является известной функцией и представляет собой полином. При этом условии можно показать методом индукции [2], что функции $\chi^{m,n}(s)$, удовлетворяющие уравнению (1.22), также будут полиномами.

При найденных значениях ν_k разложение потенциала Лежандра (1.9) принимает вид

$$(1.23)\qquad \begin{aligned}\varphi(s,\ \sigma) &= c_0\exp(\sigma/3) + c_1\chi_1(s)\exp(\nu_{01}\sigma) + c_2\chi_2(s)\exp(\nu_{02}\sigma) + \\ &+ c_3\chi_3(s)\exp\,[(-{}^1/_3 + 2\nu_{01})\sigma] + c_4\chi_4(s)\exp(\nu_{03}\sigma) + \\ &+ c_5\chi_5(s)\exp\,[(-{}^1/_3 + \nu_{01} + \nu_{02})\,\sigma] + c_6\chi_6(s)\exp\,[(-{}^2/_3 + \\ &+ 3\nu_{01})\,\sigma] + c_7\chi_7(s)\exp(\nu_{04}\sigma) + \ldots\end{aligned}$$

где показатели ν_{0i} определяются из (1.19). Все функции $\chi_i(s)$ в этом разложении — известные полиномы. Некоторые из постоянных c_i, а именно те, которые в разложении (1.23) стоят при собственных функциях однородного уравнения (1.16), произвольны и должны быть найдены из граничных условий конкретной задачи. Остальные постоянные, содержащиеся в членах, происходящих от неоднородного уравнения (1.17), должны определяться по формуле (1.21).

Перейдем в разложении (1.23) от переменных s, σ к переменным η, v, используя для этого формулы преобразования (1.8). Для переменной η получим выражение

$$\eta = u^3/v^2 = 6s^{-1}(s-1)^3(2s-3)^{-2}$$

которое показывает, что η зависит только от переменной s, а тогда функции $\chi_i(s)$ будут функциями переменной η. Используя одну из формул (1.8), получаем

$$(1.24)\qquad \exp(\nu_k\sigma) = 9^{{}^2/_3\nu_k}\cdot 2^{-{}^2/_3\nu_k}v^{{}^2/_3\nu_k}s^{-{}^1/_3\nu_k}(2s-3)^{-{}^2/_3\nu_k}$$

Заменяя теперь различные степени $\exp\sigma$ в разложении (1.23) выражением (1.24), а также учитывая, что $s = s(\eta)$, получим

$$(1.25)\qquad \begin{aligned}\varphi(s,\sigma) \equiv \varphi(\eta, v) &= c_0Q_0(\eta)\,v^{2/9} + c_1Q_1(\eta)\,v^{{}^2/_3\nu_{01}} + c_2Q_2(\eta)v^{{}^2/_3\nu_{02}} + \\ &+ c_3Q_3(\eta)v^{{}^2/_3(-{}^1/_3+2\nu_{01})} + c_4Q_4(\eta)v^{{}^2/_3\nu_{03}} + c_5Q_5(\eta)v^{{}^2/_3(-{}^1/_3+\nu_{01}+\nu_{02})} + \\ &+ c_6Q_6(\eta)\,v^{{}^2/_3(-{}^2/_3+3\nu_{01})} + c_7Q_7(\eta)\,v^{{}^2/_3\nu_{04}} + \ldots\end{aligned}$$

$$Q_k(\eta) = 9\cdot 2^{-1}s^{-\nu_k/3}(2s-3)^{-2\nu_k/3}\,\chi_k(s)$$

Решение (1.25) в силу способа его построения регулярно на предельной характеристике и поэтому может быть аналитически продолжено через эту характеристику. Однако остается неясным, сохранится ли свойство регулярности решения при его отображении на физическую плоскость течения. Этот вопрос исследуется ниже.

2. Воспользуемся решением, полученным в работе [1] в переменных физической плоскости. Напомним, что решение уравнения Кармана (1.1) ищется в виде (1.3). Если подставить сумму (1.3) в уравнение (1.1) и провести линеаризацию уравнения при $|\Phi_1| \ll |\Phi_0|$, то для функции $\Phi_1(x, r)$ будет получено линейное однородное уравнение второго порядка. Решение этого уравнения ищется в виде ряда

$$\Phi_1(x, r) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{\omega_i} r^{\omega_i} f_{\omega_i}(\xi) \tag{2.1}$$

где c_{ω_i} — постоянные. В работе [1] в результате решения задачи на собственные значения были найдены показатели ω_i

$$\omega_i = 7^{-1}\ (2i - 1 + \Delta_i), \quad \Delta_i = (24i^2 + 24i + 1)^{1/2}, \quad i = 1, 2 \ldots \tag{2.2}$$

и построена система функций $f_{\omega_i}(\xi)$, обеспечивающих непрерывность скорости и других параметров газа на оси x и предельной характеристике (такие функции называют естественными). Показано также, что функции $f_{\omega_i}(\xi)$ представляются полиномами.

Совершим отображение физической плоскости течения на плоскость годографа. Для этого найдем разложение переменных x, r в ряды по автомодельным функциям в переменных годографа. Компоненты скорости возмущений в физической плоскости, согласно (1.2), (1.3), (2.1), имеют вид

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = r^{-6/7} [F_0(\xi) + r^{\omega_1 + 2/7} F_1(\xi) + r^{\omega_2 + 2/7} F_2(\xi) + \ldots] \tag{2.3}$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = r^{-9/7} [G_0(\xi) + r^{\omega_1 + 2/7} G_1(\xi) + r^{\omega_2 + 2/7} G_2(\xi) + \ldots] \tag{2.4}$$

Используя (2.3), (2.4), получим для автомодельной переменной η разложение

$$\eta = \frac{u^3}{v^2} = \frac{F_0^3(\xi)}{G_0^2(\xi)} [1 + H_1(\xi) r^{\omega_1 + 2/7} + H_2(\xi) r^{\omega_2 + 2/7} + H_3(\xi) r^{2(\omega_1 + 2/7)} + \\ + H_4(\xi) r^{\omega_3 + 2/7} + H_5(\xi) r^{\omega_1 + \omega_2 + 4/7} + H_6(\xi) r^{3(\omega_1 + 2/7)} + \ldots] \tag{2.5}$$

На основании (2.4) переменная r может быть представлена в виде

$$r = a_0(\xi) v^{-7/9} + r_1(\xi, v), \quad r_1(\xi, v) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\xi) v^{-\beta_k} \tag{2.6}$$

где $a_0(\xi) v^{-7/9}$ — главный член, а сумма $r_1(\xi, v)$ мала по сравнению с главным членом в исследуемой области. Для определения показателей β_k подставим разложение (2.6) в правую часть выражения (2.4). Из условия совпадения правой и левой частей полученного тождества найдем последовательно все показатели β_k. Тогда разложение r по степеням v примет вид

$$r = a_0(\xi) v^{-7/9} + a_1(\xi) v^{-1-7/9\omega_1} + a_2(\xi) v^{-1-7/9\omega_2} + a_3(\xi) v^{-11/9-14/9\omega_1} + \\ + a_4(\xi) v^{-1-7/9\omega_3} + a_5(\xi) v^{-11/9-7/9(\omega_1+\omega_2)} + a_6(\xi) v^{-13/9-21/9\omega_1} + \ldots \tag{2.7}$$

Но это еще не окончательное разложение, поскольку коэффициенты зависят от переменной ξ, а не от переменной годографа. Ниже будет найдено разложение ξ в переменных годографа.

Подстановка (2.7) в выражение (2.5) дает

(2.8) $$\eta = h_0(\xi) + h_1(\xi)\, v^{-7/9(\omega_1+2/7)} + h_2(\xi)\, v^{-7/9(\omega_2+2/7)} + h_3(\xi)\, v^{-14/9(\omega_1+2/7)} + h_4(\xi)\, v^{-7/9(\omega_3+2/7)} + h_5(\xi)\, v^{-4/9-7/9(\omega_1+\omega_2)} + h_6(\xi)\, v^{-21/9(\omega_1+2/7)} + \ldots$$

(2.9) $$h_0(\xi) = F_0^3(\xi)\, G_0^{-2}(\xi)$$

Принимая во внимание разложение (2.8), представим ξ в виде

(2.10) $$\xi = \xi_0(\eta) + \xi_1(\eta, v), \quad \xi_0(\eta) = h_0^{-1}(\eta)$$

$$\xi_1(\eta, v) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\eta)\, v^{\gamma_k}$$

где через h_0^{-1} обозначен оператор, обратный оператору h_0. Главным членом в разложении (2.10) является функция $\xi_0(\eta)$, а функция $\xi_1(\eta, v)$ предполагается малой по сравнению с $\xi_0(\eta)$. Чтобы определить показатели γ_i, подставим выражение (2.10) в правую часть разложения (2.8). Как видно, переменная ξ входит в (2.8) только как аргумент функций $h_0(\xi)$, $h_1(\xi)$, ... Значения этих функций в точке ξ, определяемой выражением (2.10), могут быть найдены, если их разложить в ряд Тейлора в окрестности точки ξ_0

(2.11) $$h_i\left(\xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\eta)\, v^{\gamma_k}\right) = h_i(\xi_0) + h_i'(\xi_0) \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\eta)\, v^{\gamma_k} + \ldots \quad (i = 0, 1, 2)$$

причем

(2.12) $$h_0(\xi_0) = h_0(h_0^{-1}(\eta)) = \eta$$

С учетом (2.11), (2.12) из сравнения левой и правой частей разложения (2.8) найдем последовательно показатели $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$. Тогда разложение ξ в плоскости годографа примет вид

(2.13) $$\xi = h_0^{-1}(\eta) + b_1(\eta)\, v^{-7/9(\omega_1+2/7)} + b_2(\eta)\, v^{-7/9(\omega_2+2/7)} + b_3(\eta)\, v^{-14/9(\omega_1+2/7)} + b_4(\eta)\, v^{-7/9(\omega_3+2/7)} + b_5(\eta)\, v^{-4/9-7/9(\omega_1+\omega_2)} + b_6(\eta)\, v^{-21/9(\omega_1+2/7)} + \ldots$$

Раскрывая теперь в разложении (2.7) операторы $a_0, a_1, \ldots$ при ξ, определяемом выражением (2.13), по формуле, аналогичной (2.11), найдем окончательное разложение r в переменных годографа

(2.14) $$r = R_0(\eta)\, v^{-7/9} + R_1(\eta)\, v^{-1-7/9\omega_1} + R_2(\eta)\, v^{-1-7/9\omega_2} + R_3(\eta)\, v^{-11/9-14/9\omega_1} + R_4(\eta)\, v^{-1-7/9\omega_3} + R_6(\eta)\, v^{-11/9-7/9(\omega_1+\omega_2)} + R_6(\eta)\, v^{-13/9-21/9\omega_1} + \ldots$$

Цель проводимых преобразований состоит в том, чтобы, используя известное в физической плоскости решение, получить асимптотическое разложение потенциала Лежандра в плоскости годографа. Для этого кроме разложения r потребуются еще, как видно из выражения (1.4), разложения в плоскости годографа переменной x и потенциала возмущенной скорости Ф. Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательный вид этих разложений

(2.15) $$x = \xi r^{4/7} = X_0(\eta)\, v^{-4/9} + X_1(\eta)\, v^{-6/9-7/9\omega_1} + X_2(\eta)\, v^{-6/9-7/9\omega_2} + X_3(\eta)\, v^{-8/9-14/9\omega_1} + X_4(\eta)\, v^{-6/9-7/9\omega_3} + X_5(\eta)\, v^{-8/9-7/9(\omega_1+\omega_2)} + X_6(\eta)\, v^{-10/9-21/9\omega_1} + \ldots$$

$$\Phi = r^{-2/7} f_0(\xi) + \sum_{i=1}^{\infty} c_{\omega_i} r^{\omega_i} f_{\omega_i}(\xi) = E_0(\eta) v^{2/9} + E_1(\eta) v^{-7/9\omega_1} +$$
$$+ E_2(\eta) v^{-7/9\omega_2} + E_3(\eta) v^{-2/9-14/9\omega_1} + E_4(\eta) v^{-7/9\omega_3} + E_5(\eta) v^{-2/9-7/9(\omega_1+\omega_2)} +$$
$$+ E_6(\eta) v^{-4/9-21/9\omega_1} + \ldots$$

Формулы (2.14), (2.15) позволяют выписать разложение потенциала Лежандра

$$\varphi(\eta, v) = \Omega_0(\eta) v^{2/9} + \Omega_1(\eta) v^{-7/9\omega_1} + \Omega_2(\eta) v^{-7/9\omega_2} + \Omega_3(\eta) v^{-2/9-14/9\omega_1} +$$
$$+ \Omega_4(\eta) v^{-7/9\omega_3} + \Omega_5(\eta) v^{-2/9-7/9(\omega_1+\omega_2)} + \Omega_6(\eta) v^{-4/9-21/9\omega_1} +$$
$$+ \Omega_7(\eta) v^{-7/9\omega_4} + \ldots \tag{2.16}$$

где ω_i определяются формулами (2.2).

Это разложение получено в результате отображения на плоскость годографа решения, регулярного на предельной характеристике в физической плоскости течения. Сравним его с аналогичным разложением потенциала Лежандра (1.25), полученным в результате решения задачи в переменных годографа.

Как видно из формул (1.19) и (2.2), показатели ν_{0i} и ω_i связаны между собой соотношением

$$\nu_{0i} = -7\omega_i/6, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{2.17}$$

которое показывает, что показатели степени при переменной v в разложениях (1.25) и (2.16) совпадают. Условие (2.17), а также тот факт, что закон образования показателей степени ряда (2.16) получен из условия регулярности решения на предельной характеристике физической плоскости, позволяют сделать заключение о том, что решение (1.25) будет обладать этим же свойством регулярности.

Заметим, что выше было использовано асимптотическое представление потенциала скорости (1.3), найденное в работе [1] как результат линеаризации уравнения Кармана относительно функции $\Phi_1(x, r)$. Тем не менее оказалось, что это решение, отображенное на плоскость годографа, имеет такой же вид, как и решение (1.25), которое было получено в результате решения нелинеаризованного уравнения, являющегося точным аналогом уравнения Кармана для потенциала Лежандра.

Если бы в уравнении Кармана (1.1) были учтены члены, нелинейные относительно функции $\Phi_1(x, r)$, то в асимптотическом представлении (2.1) появились бы члены, содержащие r в степени $2\omega_1 + {}^2/_7$, $\omega_1 + \omega_2 + {}^2/_7$, ... (эти дополнительные показатели степени образуются по закону $\omega^{m,n} = \omega_m + \omega_n + {}^2/_7$). Однако это полное решение после отображения его на плоскость годографа опять будет иметь представление вида (2.16), отличаясь от последнего только коэффициентами Ω_3, Ω_5, Ω_6, ...

Соответствие решений в физической плоскости и плоскости годографа в задаче обтекания тела вращения звуковым потоком газа было установлено в работе [8].

В заключение автор выражает искреннюю признательность О. С. Рыжову за многие ценные советы и дискуссии.

Поступила 9 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диесперов В. Н.*, *Рыжов О. С.* Об обтекании конечных тел равномерным потоком в околозвуковом диапазоне скоростей. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 1.
2. *Guderley K. G.*, *Breiter M. C.* The development at infinity of axisymmetric flow patterns with a free stream Mach number one. Project 7071 Rept. Appl. Math. Lab. Aerospace Research Lab. Wright-Patterson Air Force Base. Ohio, 1966.
3. *Von Kármán Th.* The similarity law of transonic flow. J. Math. and Phys., 1947, vol. 26, No. 3, p. 182—190.
4. *Guderley K. G.*, *Yoshihara H.* An axial-symmetric transonic flow patterns. Quart. Appl. Math., 1951, vol. 8, No. 4, p. 333—339.
5. *Фалькович С. В.*, *Чернов И. А.* Обтекание тела вращения звуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
6. *Randall D.* Some results in the theory of almost axisymmetric flow at transonic speed. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 12, p. 2339—2341.
7. *Müller E. A.*, *Matschat K.* Ähnlichkeitslösungen der transsonischer Gleichungen bei der Anström-Machzahl 1. Proc. 11-th Internat. Congr. Appl. Mech. München, 1964, Berlin—New York, Springer, 1966, p. 1061—1068.
8. *Euvrard D.* Etude asymptotique de l'écoulement à grande distance d'un obstacle se déplaçant à la vitesse du son. J. mécaniq., 1968, vol. 7, No. 3, p. 281—307.