

## НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ С МЕСТНЫМИ СВЕРХЗВУКОВЫМИ ЗОНАМИ

П. А. Вельмисов, С. В. Фалькович

(Саратов)

Получены точные частные решения нелинейных уравнений, описывающих неустановившиеся околосвуковые течения газа. На основе этих решений рассматриваются нестационарные течения в соплах Лавалья с местными сверхзвуковыми зонами.

В стационарном случае на основе упрощенного уравнения для околосвуковых течений газа местные сверхзвуковые зоны исследовались для плоских сопел [1] и для сопел с круглым поперечным сечением [2]. Затем решения [1, 2] были обобщены на случай трехмерных течений в соплах Лавалья [3]. Исследование изменения местных сверхзвуковых зон с течением времени осложняется нелинейностью уравнения для околосвуковых нестационарных течений, поэтому представляют интерес даже частные примеры. Решение этого уравнения, описывающее неустановившиеся течения типа Тейлора в сопле, имеющем две плоскости симметрии, было указано в работе [3]. Позже аналогичные решения в нестационарном случае рассматривались для плоских сопел [4]. Оказалось, что все указанные выше решения можно обобщить. Такое обобщенное решение околосвукового уравнения, описывающее неустановившиеся течения типа Тейлора в плоском и осесимметричном соплах Лавалья, приведено в [5]. В данной работе на основе этого решения изучается изменение местных сверхзвуковых зон с течением времени (процесс их возникновения, развития и смыкания на оси сопла или обратный процесс) для двух классов автомодельных течений.

1. 1°. Неустановившиеся «медленные» околосвуковые течения идеального газа описываются системой уравнений

$$(1.1) \quad 2u_\tau + uu_x - v_y - w_z = 0, \quad u_y = v_x, \quad u_z = w_x, \quad v_z = w_y$$

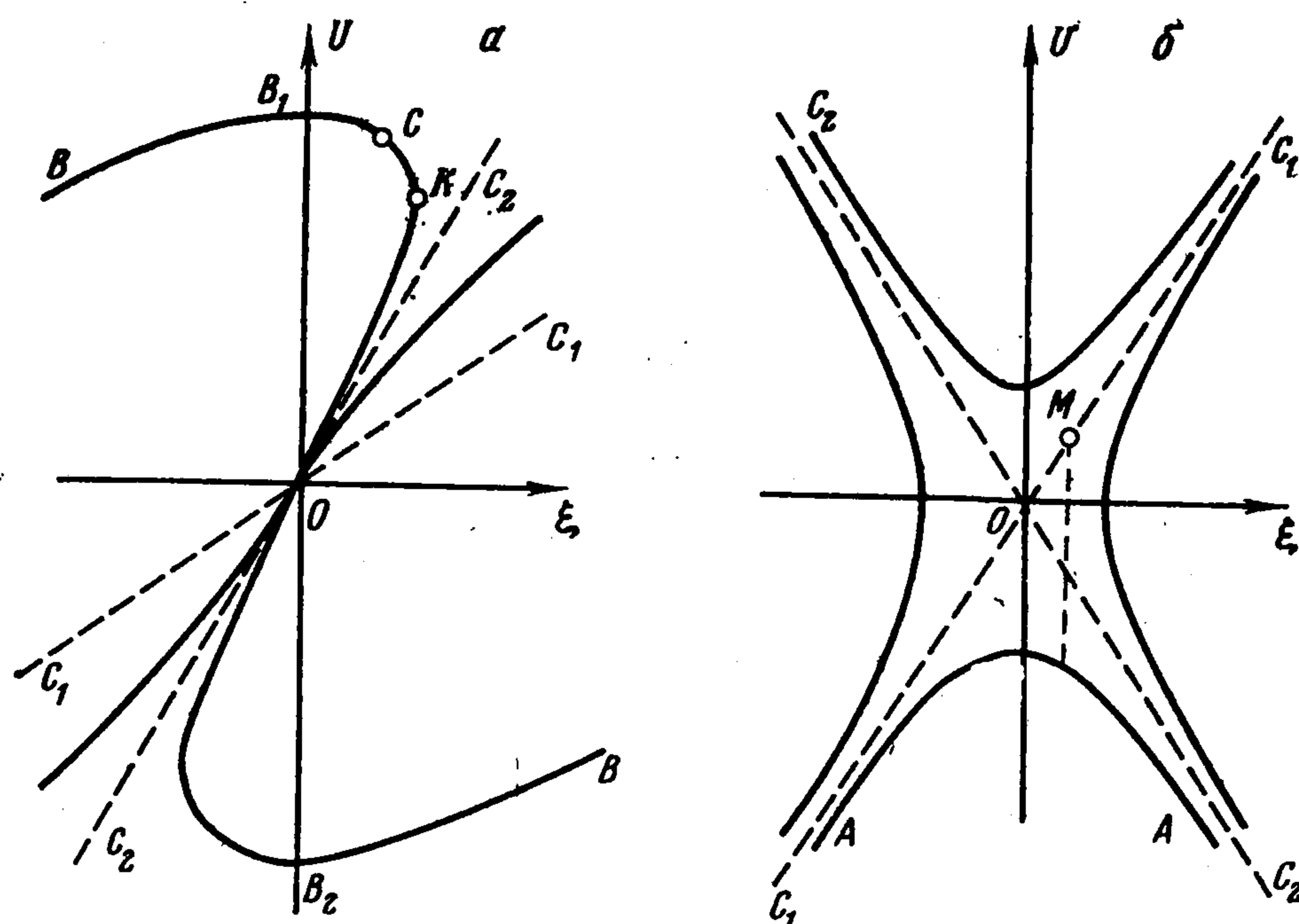
Здесь  $u, v, w$  — проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат  $x, y, z$ ;  $\tau$  — время. Для потенциала скорости имеем уравнение

$$(1.2) \quad 2\varphi_{x\tau} + \varphi_x\varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0$$

Продифференцировав уравнение (1.2) по  $x$ , получим уравнение для  $u = \varphi_x$ . Решение этого уравнения, описывающее течение в сопле Лавалья с местными сверхзвуковыми зонами (рассмотрим для простоты здесь и далее сопло с двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии), имеет вид

$$(1.3) \quad u = U(\xi, \tau) + a_1(\tau)y^2 + a_2(\tau)z^2, \quad x = m(\tau)\xi + n(\tau) + c_1(\tau)y^2 + c_2(\tau)z^2$$

Уравнение для  $U(\xi, \tau)$  просто записать [5]. Основная цель работы — изучение изменения местных сверхзвуковых зон (МСЗ) с течением времени. Поэтому для простоты рассмотрим только плоские и осесимметричные



Фиг. 1

течения. Обобщение результатов, которые будут получены ниже, на трехмерный случай (1.3) не представляет труда.

2°. Система уравнений (1.1) допускает следующую форму решения:

$$(1.4) \quad u = \tau^{n-1} u_*(x_*, y_*, t) + 2\lambda'(\tau), \quad v = \tau^{1/2(n-1)} v_*(x_*, y_*, t) + \frac{4\lambda''(\tau)}{\omega+1} y$$

$$x_* = \frac{x - \lambda(\tau)}{\tau^n}, \quad y_* = y\tau^{-1/2(n+1)}, \quad t = \ln \tau$$

Решение для  $u_*$ ,  $v_*$  будем искать в виде (1.3)

$$(1.5) \quad u_* = mU(\xi, t) + 2c(2c-1)y_*^2, \quad x_* = m\xi + cy_*^2$$

$$v_* = 2cm[2(2c-1)\xi - U(\xi, t)]y_* + \frac{8c(c-1)(2c-1)}{\omega+3} y_*^3$$

Здесь  $m$ ,  $c$ ,  $n$  — произвольные постоянные,  $\lambda(\tau)$  — произвольная функция,  $\omega = 0$  для плоских и  $\omega = 1$  для осесимметричных течений. Для функции  $U(\xi, t)$  получаем уравнение

$$(1.6) \quad 2U_t + (U - 2n\xi)U_\xi + 2[n-1 + (\omega+1)c]U - 4c(2c-1)(\omega+1)\xi = 0$$

3°. Рассмотрим сначала автомодельные решения при  $U_t = 0$ . Для  $U$  имеем тогда обыкновенное дифференциальное уравнение, в которое входят два произвольных параметра  $c$  и  $n$ . Поведение интегральных кривых в этом случае зависит от значений величин  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$

$$(1.7) \quad \lambda_{1,2} = q_{1,2} - 2n, \quad q_{1,2} = 1 - (\omega+1)c \mp [1 - (\omega+1)c(6 - 8c) + (\omega+1)^2 c^2]^{1/2}$$

Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  различные и одного знака, то в начале координат плоскости  $(U, \xi)$  имеем особую точку типа узел (фиг. 1, а), если разных знаков — седло (фиг. 1, б); если  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ , то имеем вырожденный узел; в случае, когда одна из величин  $\lambda_k$  (или обе) равна нулю, решения на плоскости  $(U, \xi)$  изображаются параллельными прямыми. Заметим, что кривые  $U = U(\xi, t)$  дают распределение скорости (давления)  $u = u(x, t)$  на

оси  $y = 0$ . Решения, которые изображаются прямыми, проходящими через особую точку (им соответствуют пунктирные прямые), имеют вид

$$(1.8) \quad U = q_1 \xi, \quad U = q_2 \xi$$

В плоском случае ( $\omega = 0$ )  $q_1 = 2(1 - 2c)$ ,  $q_2 = 2c$ .

В случае узла кривые касаются в особой точке прямой  $U = q_1 \xi$ , если  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ , и прямой  $U = q_2 \xi$ , если  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ . В случае, когда  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , решение уравнения (1.6) записывается в виде

$$(1.9) \quad (U - q_1 \xi)^{-\lambda_1} (U - q_2 \xi)^{\lambda_2} = A = \text{const}$$

или в параметрической форме

$$(1.10) \quad U = \frac{q_2}{q_2 - q_1} \eta + q_1 B \eta^\kappa, \quad \xi = \frac{1}{q_2 - q_1} \eta + B \eta^\kappa, \quad \kappa = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

При  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$  ( $q_1 = q_2 = q$ ) решение также просто выписывается

$$(1.11) \quad U = \frac{q}{\lambda_0} \eta \ln \eta + \eta(1 + qB), \quad \xi = \frac{1}{\lambda_0} \eta \ln \eta + B \eta$$

В формулах (1.9) — (1.11)  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Уравнение звуковой линии для (1.5) в параметрической форме  $y = y(\xi, \tau)$ ,  $x = x(\xi, \tau)$  при  $c \neq 1/2$ ,  $c \neq 0$  имеет вид

$$(1.12) \quad y^2 = \frac{m\tau^{n+1}}{2c(1-2c)} U(\xi, t) - \frac{\tau^2 \lambda'(\tau)}{c(2c-1)}, \quad x = m\xi\tau^n + \frac{c}{\tau} y^2 + \lambda(\tau)$$

В случае  $c = 0$  или  $c = 1/2$  звуковая линия имеет вид  $\xi = \xi_0(\tau)$ . В дальнейшем будем рассматривать случай  $\omega = 0$  (в осесимметричном случае анализ проводится аналогично) и положим сначала  $\lambda'(\tau) = 0$ . Тогда для (1.10) уравнение звуковой линии принимает вид

$$(1.13) \quad y^2 = \frac{m\tau^{n+1}}{2c(1-2c)} \left[ \frac{c}{3c-1} \eta + 2(1-2c)B\eta^\kappa \right] = \frac{m\tau^{n+1}}{2c(1-2c)} U(\eta)$$

$$x = m\tau^n \left[ \frac{1-c}{2(3c-1)(1-2c)} \eta + 2B\eta^\kappa \right], \quad \kappa = \frac{1-2c-n}{c-n}$$

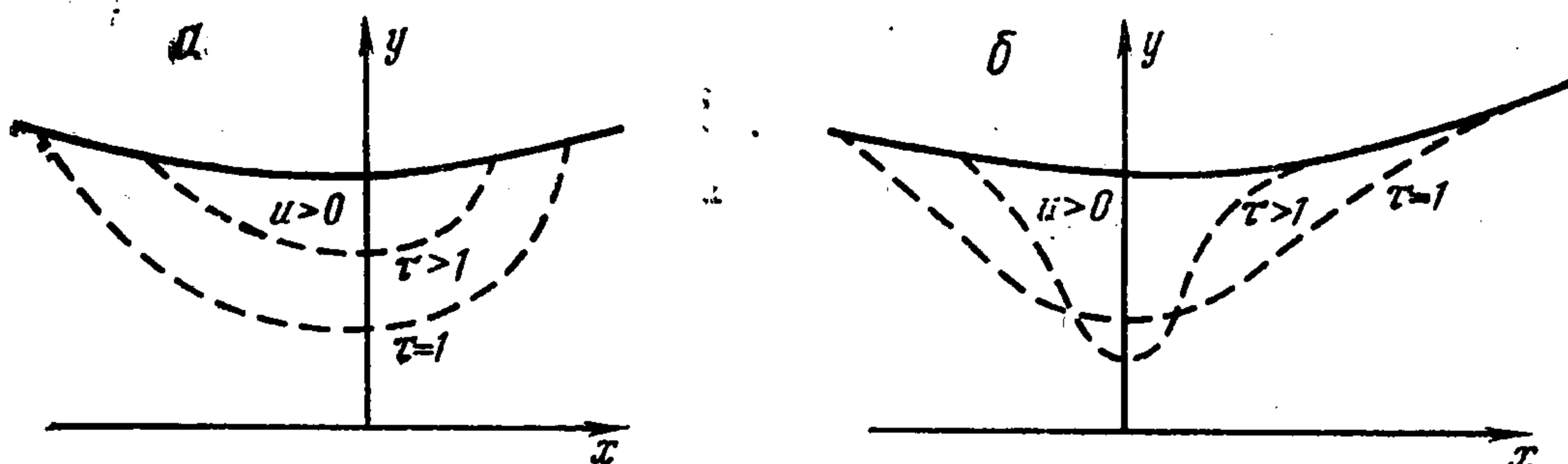
Будем считать  $m = 1 > 0$  (при  $m < 0$  рассуждения проводятся аналогично). Из первой формулы (1.13) ясно, что звуковую линию можно построить при  $0 < c < 1/2$ , если  $U > 0$ , и при  $c < 0$  или  $c > 1/2$ , если  $U < 0$ . Анализируя поведение интегральных кривых на фиг. 1 и учитывая первую формулу (1.5), приходим к выводу, что кривые  $AA$  и  $C_1OC_2$ , изображенные на фиг. 1, б, при  $c < 0$  или  $c > 1/2$  могут описывать течения с МСЗ в соплах Лаваля. Формулы (1.13) показывают, как МСЗ изменяются с течением времени.

Учитывая, что в околосзвуковом приближении уравнения стенок сопла (их нетрудно построить в параметрической форме) имеют вид

$$(1.14) \quad y = y_0 + \varepsilon f(x, \tau), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = v(y_0, x, \tau), \quad y_0 = \text{const}, \quad \varepsilon \ll 1$$

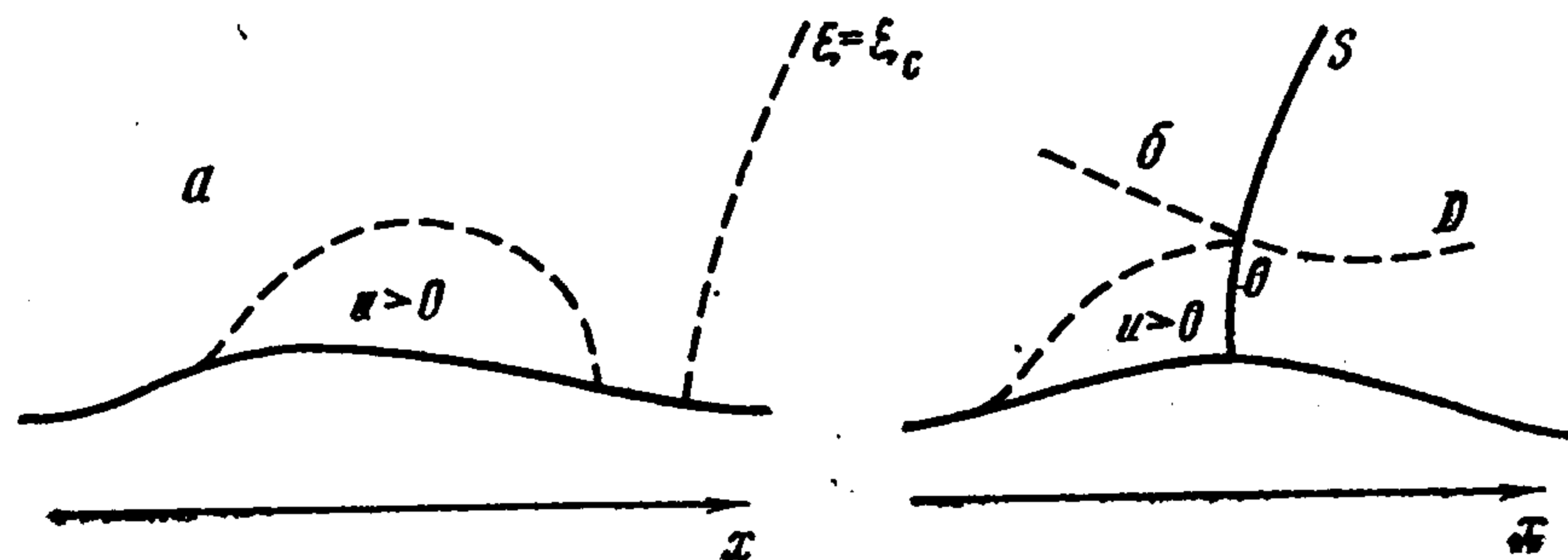
видим из (1.13), что при  $n > -1$  МСЗ, занимающие в начальный момент часть горловины сопла, с течением времени исчезают, и поток всюду становится дозвуковым, т. е. решения при  $n > -1$  описывают течения с ис-

чезающими МСЗ. В качестве примера на фиг. 2, а приведена качественная картина такого течения (при  $n = 2$ ,  $c = -3$ ,  $B > 0$ ). При  $n < -1$ , наоборот, наблюдается развитие МСЗ (пример приведен на фиг. 2, б,  $n = -3/2$ ,  $c = 4$ ,  $B < 0$ ). Аналогично из второй формулы (1.13) ясно, что при  $n > 0$  МСЗ расширяется, при  $n < 0$  сужается с ростом времени.



Фиг. 2

Заметим, что во всех формулах можно заменить  $\tau$  на  $(\tau + \tau_0)$ ,  $0 \leq \tau < \infty$ ,  $\tau_0 > 0$ . При  $\lambda'(\tau) = 0$ , согласно (1.13), имеют место течения с МСЗ, смыкающимися на оси сопла при  $\tau \rightarrow \infty$  для  $n < -1$ . Если  $\lambda'(\tau) \neq 0$ , то при тех же значениях  $c$  ( $c < 0$ ,  $c > 1/2$ ) МСЗ смыкается на оси сопла при  $\tau = \tau_1$ , и затем сверхзвуковая зона занимает целый отрезок оси (или же с ростом времени происходит обратный процесс). Такие МСЗ легко построить по формулам (1.12), (1.13). Заметим, что решения, которые даются кривыми, имеющими замкнутые участки  $U > 0$  на оси  $y = 0$ ,



Фиг. 3

могут описывать течения с МСЗ около профиля (фиг. 3, а). Решения, имеющие такие участки, даются, например, кривыми  $BOB$  (фиг. 1, а), а также кривыми  $AA$ ,  $C_1OC_2$  (фиг. 1, б), если  $\lambda'(\tau) > 0$ . Однако из первой формулы (1.13) тогда следует, что для таких течений  $0 < c < 1/2$ . Но при таких значениях  $c$  для течений указанного типа решение имеет недостатки (области неоднозначности и области несуществования решения). На фиг. 3, а изображена качественная картина течения около профиля при  $c = 1/4$ ,  $n = 5/8$ ,  $B > 0$ ,  $y_0 = 3.35$ . Этому течению соответствует интегральная кривая  $BB_1C$  на фиг. 1, а ( $\xi_c \leq \xi_k$ ,  $U'(\xi_k) = \infty$ ). Течение за  $\xi = \xi_c$  не удастся построить в классе решений (1.5). По-видимому, это решение можно продолжить за  $\xi = \xi_c$ , используя более общее, чем (1.5), (1.9) решение, допускаемое системой (1.1), следующего вида:

$$(1.15) \quad \begin{aligned} u_* &= U_0(\xi) + U_2(\xi) y_*^2, & x_* &= X_0(\xi) + X_2(\xi) y_*^2 \\ v_* &= V_1(\xi) y_* + V_3(\xi) y_*^3 \end{aligned}$$

4°. Рассмотрим течения с МСЗ, имеющие скачки уплотнения. Условия на ударном фронте имеют вид

$$(1.16) \quad 2 \frac{\partial x}{\partial \tau} + \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{2} (u^{(1)} + u^{(2)}), \quad v^{(1)} + u^{(1)} \frac{\partial x}{\partial y} = v^{(2)} + u^{(2)} \frac{\partial x}{\partial y}$$

Параметры с разными индексами соответствуют течению с разных сторон от скачка. Предположим, что с одной стороны от скачка решение берется в виде (1.5), с другой — в виде (1.15) (рассматриваем случай  $U_t = 0$ ). Тогда, удовлетворяя условиям (1.16) на скачке уплотнения  $\xi = \xi_0 = \text{const}$ ,  $x = \xi_0 \tau^n + (c/\tau)y^2 + \lambda(\tau)$ , получим ( $m = 1$ )

$$(1.17) \quad \begin{aligned} U_0(\xi_0) + U(\xi_0) &= 4n\xi_0, & U_2(\xi_0) &= 2c(2c - 1), & X_0(\xi_0) &= \xi_0 \\ X_2(\xi_0) &= c \\ V_1(\xi_0) &= 4c(2c - 1)\xi_0 - 2cU_0(\xi_0), & V_3(\xi_0) &= \frac{8}{3}c(c - 1) \times \\ & \times (2c - 1) \end{aligned}$$

Аналогично записываются условия на ударном фронте  $\xi = \xi_0(\tau)$  в случае, когда коэффициенты в (1.5), (1.15) зависят еще от  $\tau$ . Интенсивность скачка, согласно (1.17), дается выражением

$$(1.18) \quad u^{(1)} - u^{(2)} = 2U(\xi_0) - 4n\xi_0$$

Если перед ударной волной решение берется в виде (1.5), (1.10), то к условиям (1.17) необходимо добавить, согласно (1.18), еще одно

$$(1.19) \quad U(\xi_0) > 2n\xi_0$$

выражающее тот факт, что скачок является скачком уплотнения. Если решение (1.5), (1.10) берется позади скачка, то знак неравенства заменяется на обратный.

Анализируя условия (1.17) и поведение интегральных кривых, видим, что можно построить множество течений различных типов со скачками уплотнения. Рассмотрим некоторые из них. На фиг. 3, б изображено течение около профиля с МСЗ, оканчивающейся скачком уплотнения ( $c = 1/4$ ,  $n = 5/8$ ,  $B > 0$ ). Перед скачком  $\xi = 0$  решение дается интегральной кривой  $VB_1$ , за скачком — кривой  $B_2V$  (фиг. 1, а). Таким образом, область трехзначности заменяется скачком уплотнения. Однако в этом случае, согласно (1.18), скачок уплотнения имеет постоянную интенсивность, не уменьшающуюся с ростом  $y$ , и не может быть продолжен в область  $D$ , расположенную выше точки  $O$  пересечения звуковой линии с ударным фронтом. Очевидно, рассматриваемый класс решений непригоден с точки зрения физики явления для описания течений около профиля.

В случае  $\lambda_1 = 0$  или  $\lambda_2 = 0$  также легко построить течения с МСЗ, ограниченной скачком уплотнения  $\xi = \xi_0$ . Одно из таких возможных течений имеет вид, изображенный на фиг. 3, б. Для построения течений с ударными волнами можно успешно использовать также решения  $U = q_k \xi$  (они изображаются прямыми  $C_k C_k$  ( $k = 1, 2$ )). Например, взяв до скачка  $\xi = \xi_0 > 0$  одно из указанных решений, а позади него — другое, получим течение с МСЗ в сопле Лавала, оканчивающейся скачком уплотнения. При этом, удовлетворяя первому условию (1.17) (остальные удовлетворя-

ются автоматически), получаем  $c = 1 - 2n$ . Кроме того, удовлетворяя условию (1.19) и требуя, чтобы  $q_1$  и  $q_2$  были разных знаков (т. е. чтобы указанные прямые лежали в разных четвертях), приходим, выбирая  $\xi_0 > 0$ , к выводу:  $c < 0$ , если перед скачком берется решение  $U = q_1\xi$ ,  $c > 1/2$ , если перед скачком  $U = q_2\xi$ . Течение непосредственно за скачком может быть сверхзвуковым, если  $\xi_0$  достаточно мало. Затем при удалении от скачка оно становится дозвуковым. Если  $\xi_0$  достаточно велико, то течение за скачком сразу дозвуковое. Если  $\xi_0 = 0$ , то скачок исчезает, и кривая  $\xi_0 = 0$  является характеристикой, вдоль которой соединяются два решения  $U = q_1\xi$  и  $U = q_2\xi$ . На фиг. 1, б это решение изображается ломаной  $C_1OC_2$ . Оно описывает безударное течение в сопле с МСЗ, смыкающимися в одной точке на оси сопла. Возможно также течение, когда сверхзвуковые области позади скачка прилегают к стенкам, ни в одной точке не достигая оси сопла, а вблизи оси течение за скачком дозвуковое. Такие сопла изучались в стационарном случае в [6]. Взяв перед скачком одно из решений  $U = q_k\xi$ , позади скачка — общее решение (1.9), такое течение легко построить.

5°. Рассмотрим теперь решение (1.5) в общем случае  $U = U(\xi, t)$ . Для уравнения (1.6), используя (1.10), легко получить два первых интеграла, после чего общее решение при  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  записывается в виде

$$(1.20) \quad F[(U - q_1\xi)^{-\lambda_1} (U - q_2\xi)^{\lambda_2}, (U - q_1\xi) \exp(-1/2\lambda_2 t)] = 0$$

Здесь  $F$  — произвольная функция двух аргументов. Записав решение (1.20) в форме, разрешенной относительно второго аргумента, получим решение в виде  $t = t(U, \xi)$ . Заметим здесь, что для функции  $t(U, \xi)$  уравнение (1.6) линейное. В параметрической форме, удобной для расчета, решение (1.20) записывается в виде (1.10), где  $B$  — произвольная функция переменной  $\eta \exp(-1/2\lambda_2 t)$ .

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$  ( $q_1 = q_2 = q$ ), то общее решение уравнения (1.6) имеет вид

$$(1.21) \quad F\left[\ln(U - q\xi) - \frac{\lambda_0\xi}{U - q\xi}, (U - q\xi) \exp(-1/2\lambda_0 t)\right] = 0$$

В параметрической форме решение дается формулами (1.11), где  $B(\eta \exp(-\lambda_0 t / 2))$  — произвольная функция.

2. Рассмотрим для системы уравнений (1.1) еще один класс решений. Перейдем в (1.1) к новым переменным

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u &= e^{2n\tau} u_*(x_*, y_*, \tau) + 2\lambda'(\tau), & v &= e^{3n\tau} v_*(x_*, y_*, \tau) + \\ &+ \frac{4}{\omega + 1} \lambda''(\tau) y \\ x_* &= [x - \lambda(\tau)]e^{-2n\tau}, & y_* &= ye^{-n\tau} \end{aligned}$$

Для (2.1) также существуют решения, описывающие течения с МСЗ. Они имеют вид (запишем их сразу в физических переменных  $x, y, \tau$ )

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u &= me^{2n\tau} U(\xi, \tau) + 4c^2 y^2 + 2\lambda'(\tau), & x &= m\xi e^{2n\tau} + cy^2 + \lambda(\tau) \\ v &= 2cme^{2n\tau} (4c\xi - U)y + \frac{16}{\omega + 3} c^3 y^3 + \frac{4}{\omega + 1} \lambda''(\tau) y \end{aligned}$$

Функция  $U$  удовлетворяет уравнению

$$(2.3) \quad 2U_\tau + (U - 4n\xi)U_\xi + 2[2n + (\omega + 1)c]U - 8(\omega + 1)c^2\xi = 0$$

Рассмотрим сначала автомодельный случай  $U = U(\xi)$ . В этом случае при  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  решение записывается в виде (1.9), (1.10), где

$$(2.4) \quad \lambda_k = q_k - 4n, \quad q_{1,2} = (-\omega - 1 \pm \sqrt{\omega^2 + 10\omega + 9})c$$

Если  $\lambda_1 = \lambda_2$  ( $c = 0$ ), решение также просто записать. Исследование поведения интегральных кривых (а также соответствующих типов течений) в зависимости от  $\lambda_1, \lambda_2$  проводится в точности так же, как для (1.9) (рассуждения повторяются дословно). Но в отличие от (1.5), (1.6) поведение кривых будет зависеть уже не от  $c$  и  $n$  в отдельности, а от отношения  $\alpha = n/c$ . При  $\alpha < -1$ ,  $\alpha > 1/2$  в точке  $U = \xi = 0$  будем иметь узел, при  $-1 < \alpha < 1/2$  — седло. Асимптоты  $U = q_k \xi$  лежат всегда в разных четвертях. Уравнение звуковой линии имеет вид (взяли  $m = 1$ )

$$(2.5) \quad y^2 = -\frac{\lambda'(\tau)}{2c^2} - \frac{1}{4c^2} e^{2n\tau} U(\eta), \quad x = -\frac{\lambda'(\tau)}{2c} + e^{2n\tau} \left[ \xi(\eta) - \frac{1}{4c} U(\eta) \right]$$

Звуковые линии (2.5) строились в [4] при  $n = 0$ . Формулы (2.5) дают ясное представление об изменении звуковых линий с течением времени. При  $n > 0$  (и соответствующей функции  $\lambda(\tau)$ ), как видно из (2.5), решения описывают процесс «затухания» МСЗ в соплах Лавала, при  $n < 0$  — процесс развития.

Так же, как и для (1.5), с помощью решения (2.2) можно построить течения в соплах Лавала со скачками уплотнения. Уравнение скачка задается при этом в виде

$$(2.6) \quad \xi = \xi_0, \quad x = \xi_0 e^{2n\tau} + cy^2 + \lambda(\tau)$$

Ударная волна здесь не изменяет свою форму с течением времени (для решений (1.5) ударная волна имеет изменяющуюся с течением времени форму  $x = \xi_0 \tau^n + (c/\tau)y^2 + \lambda(\tau)$ ). Предположив, что с одной стороны скачка решение берется в виде (1.15), (2.1), с другой — в виде (2.2), нетрудно записать аналогично (1.17) условия на ударном фронте. Рассмотрим частный случай, когда перед скачком решение имеет вид (2.2) с  $U = U_1(\xi)$ , за скачком — с  $U = U_2(\xi)$ . Тогда из условий на ударном фронте (1.16) получим единственное требование

$$(2.7) \quad U_1(\xi_0) + U_2(\xi_0) = 8n\xi_0$$

Потребовав, чтобы скачок был скачком уплотнения, приходим к условию

$$U_1(\xi_0) > 4n\xi_0$$

Заметим, что для (2.2) ударные волны имеют постоянную, не меняющуюся с изменением  $y$  интенсивность (но с течением времени она изменяется). В этом классе решений, как и для (1.5), элементарно строится, согласно (2.7), течение в сопле со скачком уплотнения, изучавшееся в [6]. Такие течения могут изображаться, например, кривой  $C_1OMA$  (фиг. 1, б).

В этом случае интересен тот факт, что течение до скачка уплотнения стационарное (при  $\lambda = 0$ ), за скачком же оно с течением времени меняется. Изменение потока с ростом времени легко проследить по формулам (2.5), (2.6). Отметим, что решение (2.2) является обобщением решений, которые рассматривались в [1, 2, 4]. В самом деле, эти решения получим из (2.2) при  $n = 0$ . Кроме того, как уже отмечалось выше, решения (2.2) тотчас обобщаются на трехмерный случай

$$(2.8) \quad u = e^{2n\tau} U(\xi, \tau) + a_1 y^2 + a_2 z^2 + 2\lambda'(\tau), \quad x = \xi e^{2n\tau} + c_1 y^2 + c_2 z^2 + \lambda(\tau)$$

Таким образом, из решения (2.8) получаем как частный случай при  $n = 0$  все известные решения этого типа [1-4], например решения для установившихся течений. При этом условия на ударном фронте и на характеристиках также переходят при  $n = 0$  в условия для стационарных течений. Отметим также, что указанным свойством обладает и более общий класс решений (2.1) при  $\partial u_* / \partial \tau = \partial v_* / \partial \tau = \lambda = 0$ . В общем случае (2.2), когда  $U = U(\xi, \tau)$ , записав первые интегралы для (2.3), общее решение при  $c \neq 0$  ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) получим в виде (1.20), (2.4), где  $t$  заменено на  $\tau$ . При  $\lambda_1 = \lambda_2$  ( $c = 0$ ) общее решение аналогично (1.21) также просто записать.

3. В заключение сделаем одно замечание. Рассмотрим систему уравнений

$$(3.1) \quad Au_\tau + G^{(1)}u_x + F^{(1)}v_x + F^{(2)}u_y + G^{(2)} = 0, \quad F^{(3)}u_x + Bv_x + Cu_y + F^{(4)} = 0$$

$$G^{(k)} = \sum_{n=0}^2 G_n^{(k)} y^n + G_4^{(k)} x + G_5^{(k)} u, \quad F^{(k)} = F_1^{(k)} + F_2^{(k)} y$$

Здесь коэффициенты  $A, B, C, G_n^{(k)}, F_n^{(k)}$  — в общем случае некоторые функции  $\tau$ . Система (3.1) содержит как частные случаи (рассматриваем плоские и осесимметричные течения): а) уравнения (1.1), б) уравнения для околосвуковых вихревых течений [7], в) уравнения околосвуковых течений для химически активного газа [8], г) уравнения коротких волн [9], д) уравнения магнитной газодинамики для трансзвуковых и гиперкритических течений [10].

Система уравнений (3.1) имеет двухпараметрический класс решений

$$(3.2) \quad u = \sum_{k=0}^2 U_k(\xi, \tau) \eta^k, \quad v = \sum_{k=0}^3 V_k(\xi, \tau) \eta^k$$

$$x = \sum_{k=0}^2 X_k(\xi, \tau) \eta^k, \quad y = Y_0(\xi, \tau) + Y_1(\xi, \tau) \eta$$

При  $Y_0 = 0$  ( $\eta = y$ ) из (3.2) получаем однопараметрические решения, содержащие в частном случае решения вида (1.3). При  $Y_1 = 0$  ( $\xi = y$ ) в (3.2) содержатся решения

$$(3.3) \quad u = \sum_{k=0}^2 U_k(y, \tau) x^k, \quad v = \sum_{k=0}^3 V_k(y, \tau) x^k$$

В качестве примеров приведем некоторые частные решения для уравнений [8]

$$(3.4) \quad uu_x - v_y - \frac{\omega}{y} v + \alpha u = 0, \quad u_y = v_x, \quad \alpha = \text{const}$$

Примером решения вида (3.2) с  $Y_0 = 0$  системы (3.4) является решение, описывающее течение с МСЗ в соплах Лавала

$$(3.5) \quad u = mU(\xi) + 4c^2y^2, \quad x = m\xi + cy^2 \\ v = 2ct(4c\xi - U)y + \frac{4c^2}{\omega + 3}(4c + 1)y^3$$

Функция  $U$  дается формулами (1.9), (1.10), где

$$(3.6) \quad \frac{\lambda_{1,2}}{c} = \frac{q_{1,2}}{c} = -\left(\frac{\alpha}{2c} + \omega + 1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2c} + \omega + 1\right)^2 + 8(\omega + 1)}, \quad q_1 \neq q_2$$

В случае  $q_1 = q_2$  решение также легко записать. При  $\alpha = 0$  получаем решение системы (1.1) для химически неактивного газа. Качественное поведение интегральных кривых изображено на фиг. 1, б. Примером решения вида (3.3) может быть решение системы (3.4), описывающее течение в окрестности точки пересечения двух звуковых линий (одна из которых задается в виде  $y = 0$  при  $\omega = 0$ , и  $r = r_0 \neq 0$  при  $\omega = 1$ ) при обтекании профиля свободной звуковой струей газа. Для простоты запишем только формулы для  $u$ , положив в (3.4)  $\alpha = 1$

$$(3.7) \quad u = y(2ax + \frac{1}{3}a^2y^3 + a/3y^2 + c), \quad \omega = 0 \\ u = \xi [2/3x + c + 1/9r^2(\xi - 1/2)], \quad \xi = \ln r + 3/2b, \quad \omega = 1$$

В формулах (3.5) — (3.7)  $a, b, c, m$  — произвольные постоянные. Решения вида (3.5), (3.7) легко записать также для уравнений [7], описывающих вихревые течения.

Поступила 12 V 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluid (p. I). Quart. Appl. Math., 1950, vol. 7, No. 4. (Рус. перев.: Механика. Сб. перевод., 1951, № 4).
2. Tomotika S., Hasimoto Z. On the transonic flow of a compressible fluid through an axially symmetrical nozzle. J. Math. Phys., 1950, vol. 29, No. 2.
3. Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лавала. М., ВЦ АН СССР, 1965.
4. Adamson T. C. Unsteady transonic flows in two-dimensional channels. J. Fluid Mech., 1972, vol. 52, pt. 3, p. 437—449.
5. Вельмисов П. А. Неустановившееся движение газа в сопле Лавала. В сб.: Аэродинамика. Изд-во Саратовск. ун-та, вып. 2, 1973.
6. Рыжов О. С. О работе сопел Лавала в нерасчетных режимах. Ж. выч., матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 4.
7. Фидрус В. И., Шифрин Э. Г. Осесимметричное вихревое течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии вектору скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
8. Наполитано Л. Дж., Рыжов О. С. Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околосзвуковых скоростях. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5.
9. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
10. Горский В. Б. Уравнения релятивистской магнитной газодинамики в случае продольного магнитного поля. Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 1.