Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 533.6.011

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ПРИ НАЛИЧИИ ГРАНИЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Л. В. Петухов, В. А. Троицкий

(Ленинград)

Рассматривается оптимальное управление процессами, описываемыми двумерными уравнениями, в частных производных гиперболического типа. В отличие от задач оптимизации, изученных в работах [1-3], управляющие параметры входят как в правую часть уравнения, так и в граничные условия.

Строятся необходимые условия минимума функционала, дается их развернутая форма. В качестве примеров решаются задачи об оптимальном нагружении стержней, среди которых имеются задачи с непрерывными и разрывными множителями Лагранжа. Приводится также пример особого оптимального управления в задаче о минимуме полной энергии стержня.

Наиболее важной частью работы, отличающей ее от работ ряда других авторов, которые рассматривали аналогичные и более общие задачи, является исследование разрывов множителей Лагранжа на характеристиках уравнения и связанных с этими разрывами изменениями в концевых и граничных условиях. Разрывы множителей Лагранжа были впервые изучены при решении вариационных задач газовой динамики [4]. В цитированной статье, в также в последующих работах ряда авторов широко использовались как разрывы множителей Лагранжа на характеристиках, так и разрывы переменных, описывающих состояние (ударные волны и тангенциальные разрывы).

1. Постановка задачи. Рассмотрим заданные в двумерной области Ω $(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$ уравнения в частных производных и соотношения следующего вида:

$$L(z) = a_1 z_{xx} - a_2 z_{yy} + a_3 z_x + a_4 z_y = f(x, y, z, u) \tag{1.1}$$

$$\psi_k(x, y, u) = 0, \quad k = 1, \ldots, r < m$$

Здесь z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy} — первые и вторые частные производные разыскиваемой непрерывной функции $z(x, y)$. Под $u = (u_1(x, y), \ldots, u_m(x, y))$ понимается m-мерный вектор кусочно-непрерывных распределенных управлений.

Будем считать заданными начальные и граничные условия

$$z(a, y) = \varphi_1(y), \quad z_x(a, y) = \varphi_2(y) \tag{1.2}$$

$$\varphi_c = \varphi_c[x, z(x, c), z_y(x, c)] = 0$$

$$\varphi_d = z_y(x, d) - g[x, z(x, d), v(x)] = 0$$

$$\psi_{d\tau}(x, v) = 0, \quad \tau = 1, \ldots, r_1 < m_1$$

где $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_{m_1}(x))$ — вектор кусочно-непрерывных граничных управлений. На границе $x = b$ могут иметь место условия

$$\chi_j[z(b, y_1^\circ), \ldots, z(b, y_{m_2}^\circ)] = 0, \quad j = 1, \ldots, r_2 \leqslant m_2 \tag{1.3}$$

связывающие значения функции z в фиксированных точках (b, y_γ°), $\gamma = 1, \ldots, m_2$, $y_1^\circ = c$, $y_{m2}^\circ = d$.

Поставим следующую оптимальную задачу: среди поверхностей, удовлетворяющих внутри области Ω уравнениям (1.1), а на границах Ω условиям (1.2), (1.3), найти такую, которая сообщает минимальное значение функционалу

$$\begin{aligned} J = \iint\limits_{\Omega} f_0(x, y, z, u)\,dx\,dy + \int\limits_a^b g_0[x, z(x, d), v(x)]\,dx + \\ + \int\limits_c^d \varphi_0[y, z(b, y), z_y(b, y), z_x(b, y)]\,dy + \chi_0[z(b, y_1^\circ), \ldots, z(b, y_{m_2}^\circ)] \end{aligned} \tag{1.4}$$

Коэффициенты $a_i(x, y)$ в уравнениях (1.1), а также функции f, ψ_k, φ_1, φ_2, φ_c, $\psi_{d\tau}$, g, χ_j, f_0, g_0, φ_0, χ_0 считаются непрерывными вместе со своими производными до третьего порядка включительно.

2. Необходимое условие стационарности. Сформулированная выше задача является двумерной задачей Больца вариационного исчисления. Для нее могут быть доказаны леммы о включении поверхности E, сообщающей минимум функционалу (1.4), в однопараметрическое или многопараметрическое семейство поверхностей сравнения. При помощи этих лемм доказывается следующее необходимое условие стационарности функционала J: для того чтобы функционал J принимал минимальное значение на поверхности E, на ней необходимо выполнить равенство

$$\Delta I = 0$$

в котором

$$\begin{aligned} I = \iint\limits_{\Omega} [\lambda L(z) + H]\,dx\,dy + \int\limits_a^b [\nu_c\varphi_c + \nu_d z_y(x, d) + h]\,dx + \\ + \int\limits_c^d \{\nu_1[z(a, y) - \varphi_1] + \nu_2[z_x(a, y) - \varphi_2] + \varphi_0\}\,dy + \\ + \chi[z(b, y_1^\circ), \ldots, z(b, y_{m_2}^\circ)], \quad H = f_0 - \lambda f + \sum_{k=1}^{r} \mu_k\psi_k \\ h = g_0 - \nu_d g + \sum_{\tau=1}^{r_1} \mu_{d\tau}\psi_{d\tau}, \quad \chi = \chi_0 + \sum_{j=1}^{r_2} \rho_j\chi_j \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\lambda(x, y)$, $\mu_k(x, y)$, $\mu_{d\tau}(x)$, $\nu_1(y)$, $\nu_2(y)$, $\nu_c(x)$, $\nu_d(x)$, ρ_j — неопределенные множители Лагранжа. Первая вариация I обозначена через ΔI.

Повторив выкладки, подробно описанные в работе [2], получим вариацию ΔI в виде

$$
\begin{aligned}
(2.2)\qquad \Delta I = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\omega_i} \Big\{\Big[M(\lambda) + \frac{\partial H}{\partial z}\Big]\delta z_i + \\
+ \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial u_k}\delta u_{ki}\Big\}\, dx\, dy + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\tau_i}\int_{S_{ij}} \{A\lambda\Delta z_N + \\
+ (-A\lambda_N - 2B\lambda_s + G_2\lambda)\Delta z + [2B\lambda z_{sN} + A'\lambda z_{ss} + G_1\lambda z_N + \\
+ (-a_3 n_2 + a_4 n_1 - 2B\rho^{-1})\lambda z_s + (A\lambda_N + 2B\lambda_s - \\
- G_2\lambda) z_N + H]\,\delta N\}\, ds + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\tau_i} [B\lambda\, dz - B\lambda (z_x dx + z_y dy)]_{M_{ij}}^{M_{ij+1}} + \\
+ \sum_{j=k_a+1}^{k_a+m_a} \int_{y_{j-1}}^{y_j} [\nu_{1j}\Delta z_j(a, y) + \nu_{2j}\Delta z_{jx}(a, y)]\, dy + \\
+ \sum_{j=k_c+1}^{k_c+m_c} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \nu_{cj}\Big[\frac{\partial\varphi_c}{\partial z}\Delta z_j(x, c) + \frac{\partial\varphi_c}{\partial z_y}\Delta z_{jy}(x, c)\Big] dx + \\
+ \sum_{j=k_d+1}^{k_d+m_d} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \Big[\nu_{dj}\Delta z_{jy}(x, d) + \frac{\partial h}{\partial z}\Delta z_j(x, d) + \\
+ \sum_{t=1}^{m_1} \frac{\partial h}{\partial v_t}\Delta v_{tj}(x)\Big] dx + \sum_{j=k_b+1}^{k_b+m_b} \Big\{ \int_{y_{j-1}}^{y_j} \Big[\Big(\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} - \frac{d}{dy}\frac{\partial\varphi_0}{\partial z_y}\Big)\Delta z_j(b, y) + \\
+ \frac{\partial\varphi_0}{\partial z_x}\Delta z_{jx}(b, y)\Big] dy + \Big[\frac{\partial\varphi_0}{\partial z_y} dz(b, y) + \Big(\varphi_0 - \frac{\partial\varphi_0}{\partial z_y} z_y\Big) dy\Big]_{y_{j-1}}^{y_j} \Big\} + \\
+ \sum_{\gamma=1}^{m_2} \frac{\partial\chi}{\partial z(b, y_\gamma^\circ)}\, dz(b, y_\gamma^\circ) = 0
\end{aligned}
$$

$$M(\lambda) = (a_1\lambda)_{xx} - (a_2\lambda)_{yy} - (a_3\lambda)_x - (a_4\lambda)_y$$

$$A = a_1 n_1^2 - a_2 n_2^2, \qquad B = -(a_1 + a_2) n_1 n_2, \qquad A' = a_1 n_2^2 - a_2 n_1^2$$

$$G_1 = a_3 n_1 + a_4 n_2 + A'\rho^{-1}, \qquad G_2 = G_1 - A_N - 2B_s - A\rho^{-1}$$

Здесь n_1, n_2 — направляющие косинусы нормали к рассматриваемой кривой, ρ — ее радиус кривизны, n — число элементарных областей w_i, τ_i — число угловых точек на границе S_i каждой элементарной области, m_a, m_c, m_d, m_b — числа элементарных областей, имеющих границей соответственно линии $x = a$, $y = c$, $y = d$, $x = b$, k_a, k_c, k_d , k_b — числа, с которых начинается нумерация указанных выше областей, A_N, B_s — производные соответственно по нормали и по длине дуги рассматриваемой кривой.

На основании равенства (2.2) при помощи обычных рассуждений можно сделать вывод, что коэффициент при каждой вариации должен быть равен нулю. Следовательно, будем иметь уравнения

(2.3) $$M(\lambda) = -\partial H / \partial z, \quad \partial H / \partial u_k = 0, \quad k = 1, \ldots, m$$

справедливые в каждой элементарной области ω_i.

Вдоль нехарактеристических граничных для ω_i линий, лежащих внутри области Ω, должны выполняться условия

$$\lambda_N^- = \lambda_N^+, \quad \lambda^- = \lambda^+, \quad H^- = H^+$$

Вдоль характеристических линий будем иметь

$$-2B(\lambda^- - \lambda^+)_s + G_2(\lambda^- - \lambda^+) = 0$$

В каждой угловой точке, лежащей внутри области Ω, должно выполняться условие [2]

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0$$

Анализ слагаемых, содержащих вариации $\Delta z_y(x, c)$ и $\Delta z(x, c)$ для граничного участка $y = c$, $a \leqslant x \leqslant b$, приводит к следующим соотношениям:

(2.4) $$\left.\begin{aligned} &a_2\lambda = \nu_c \partial\varphi_c / \partial z_y \\ &a_2\lambda_y + (a_4 + a_{2y})\lambda = -\nu_c \partial\varphi_c / \partial z \end{aligned}\right. \quad (y = c)$$

для каждой элементарной области, имеющей границей $y = c$.

В каждой угловой точке, лежащей на границе $y = c$, не совпадающей с (a, c) и (b, c), должно быть при $\partial\varphi_c / \partial z_y \neq 0$

$$\lambda(x - 0, c) - 2\lambda(x, c) + \lambda(x + 0, c) = 0$$

На границе $y = d$ будем иметь

(2.5) $$\left.\begin{aligned} &a_2\lambda = \nu_d, \quad a_2\lambda_y + (a_4 + a_{2y})\lambda = \partial h / \partial z \\ &\partial h / \partial v_t = 0, \quad t = 1, \ldots, m_1 \end{aligned}\right. \quad (y = d)$$

для каждой элементарной области ω_i, имеющей границей $y = d$.

В каждой угловой точке, лежащей на границе $y = d$, не совпадающей с (a, d) и (b, d), должно выполняться равенство

$$\lambda(x - 0, d) - 2\lambda(x, d) + \lambda(x + 0, d) = 0$$

На границе $x = a$ справедлива зависимость

$$a_1\lambda = -\nu_1, \quad a_1\lambda_x - (a_3 - a_{1x})\lambda = \nu_2, \quad x = a$$

вдоль границ элементарных областей, совпадающих с $x = a$.

В угловых точках, лежащих на границе $x = a$, может быть

$$\lambda(a, y - 0) - 2\lambda(a, y) + \lambda(a, y + 0) \neq 0$$

т. е. на границе $x = a$ может возникать разрыв множителя Лагранжа λ на одной или на двух характеристиках уравнения (2.3).

Для участка границы $x = b$, $c < y < d$ получаются следующие условия:

(2.6) $$a_1\lambda = -\partial\varphi_0 / \partial z_x, \quad x = b$$
$$a_1\lambda_x - (a_3 - a_{1x})\lambda = \partial\varphi_0 / \partial z - (d / dy)(\partial\varphi_0 / \partial_{zy})$$

в каждой элементарной области, имеющей границей $x = b$. В каждой угловой точке, лежащей на границе $x = b$, не совпадающей с (b, c) или с (b, d), имеем

(2.7) $$\lambda(b, y) = {}^1/_2\,\lambda(b, y - 0) - {}^1/_2\,\lambda(b, y + 0) + (a_1a_2)^{-1/2}[\partial\chi / / \partial z(b, y) - \partial\varphi_0^+ / \partial z_y + \partial\varphi_0^- / \partial z_y] \quad (x = b)$$

$$\partial\chi / \partial z(b, y) = \begin{cases} \partial\chi / \partial z(b, y_\gamma^\circ), & y = y_\gamma^\circ \\ 0, & y \neq y_\gamma^\circ \end{cases}$$

В точке (b, d) должно быть

(2.8) $$\lambda(b - 0, d) = \lambda(b, d - 0) - (a_1a_2)^{-1/2}[\partial\chi / \partial z(b, d) + + \partial\varphi_0 / \partial z_y \mid_{y=d}]$$

а в точке (b, c) при $\partial\varphi_c / \partial z_y \neq 0$

(2.9) $$\lambda(b - 0, c) = \lambda(b, c + 0) - (a_1a_2)^{-1/2}[\partial\chi/\partial z(b, c) - - \partial\varphi_0 / \partial z_y|_{y=c}]$$

Кроме условий, полученных выше, в каждой угловой точке (b, y_j) должно иметь место еще одно условие, аналогичное (4.14) работы [2]. Для рассматриваемой здесь задачи оно будет иметь следующий вид:

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{i=1}^{k_\alpha}\Theta_{\alpha i}\left(\vartheta_{\alpha i} + \int_{x_{\alpha i}}^{x_{\alpha i+1}}\theta_{\alpha i}\,dx\right) = \left[a_1\lambda(z_x^+ - z_k^-) + \varphi_0^+ - \right.$$
$$\left. - \varphi_0^- - \frac{\partial\varphi_0^+}{\partial z_y} z_y^+ + \frac{\partial\varphi_0^-}{\partial z_y} z_y^-\right] = 0, \quad x = b,\ y = y_j$$

$$\vartheta_{\alpha i} = \begin{cases} 0, & i = 1, \alpha = 1, 2 \text{ или } i = 2, \ldots, k_\alpha,\ k_\alpha - i + \alpha\text{-нечетное} \\ \dfrac{[g_0^- - g_0^+ - {}^1/_2(\nu_d^- + \nu_d^+)(g^- - g^+)]\,|_{x_{\alpha i}}}{F_{2x}(x_{\alpha i}, d)}, & i = 2,\ldots, k_\alpha,\ k_\alpha - i + \alpha\text{-четное} \end{cases}$$

Все остальные величины были определены в работе [2].

3. Необходимые условия Вейерштрасса сильного минимума. Перейдем теперь к установлению необходимых условий Вейерштрасса сильного минимума. Они будут включать в себя условие во внутренних точках области Ω и условие в точках границы $y = d$. Первое из этих условий было получено в работе [3]. Оно имеет следующий вид:

(3.1) $$H(x, y, z, U, \mu, \lambda) \geqslant H(x, y, z, u, \mu, \lambda)$$

где U — любое допустимое управление, а u — управление, дающее искомую поверхность.

Второе необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума может быть представлено неравенством

(3.2) $$h(x, z, V, \nu_d, \mu_d) \geqslant h(x, z, v, \nu_d, \mu_d)$$

$$V = (V_1, \ldots, V_{m_1}), \quad \mu_d = (\mu_{d1}, \ldots, \mu_{dr_1})$$

где V — допустимые параметры управления, μ_d — множители Лагранжа, v — управление, дающее искомую поверхность.

Доказательство условия (3.2) дано в п. 6.

Таким образом, для того, чтобы поверхность сообщала функционалу J минимальное значение, необходимо выполнение условия стационарности (2.2) в каждой внутренней точке элементарных областей условия Вейерштрасса (3.1), а в каждой точке границы $y = d$, не совпадающей с угловой, условия Вейерштрасса сильного минимума (3.2).

4. Построение оптимальных нагружений стержня сосредоточенной силой. Дан стержень постоянного сечения, закрепленный на одном конце. На другом конце действует сосредоточенная сила. Уравнение движения стержня в области Ω $(0 \leqslant x \leqslant T,\ 0 \leqslant y \leqslant l)$ имеет вид

(4.1) $$z_{xx} - a^2 z_{yy} = 0$$

Пусть начальные и граничные условия представляются равенствами

(4.2) $$z(0, y) = z_x(0, y) = 0$$

(4.3) $$z(x, 0) = 0, \quad z_y(x, l) = v_1(x), \quad |v_1(x)| \leqslant F$$

Для решения оптимальных задач необходимо перейти к открытой области задания $v_1(x)$. Это можно сделать путем введения дополнительного управления $v_2(x)$ [3] и построения зависимости

(4.4) $$\psi = F^2 - v_1^2 - v_2^2 = 0$$

Задачу оптимизации сформулируем следующим образом: найти управление $v_1(x)$, сообщающее функционалу (1.4) при $f_0 \equiv 0$ минимальное значение.

Введем, согласно сказанному, неопределенные множители Лагранжа $\lambda(x, y)$, $\nu_1(y)$, $\nu_2(y)$, $\nu_c(x)$, $\nu_d(x)$, $\mu_d(x)$. Для множителя λ уравнение Эйлера запишется в форме

(4.5) $$\lambda_{xx} - a^2 \lambda_{yy} = 0$$

Формулы (2.4), (2.5) позволяют найти граничные условия

(4.6) $$\lambda(x, 0) = 0, \quad a\lambda_y(x, l) = -\partial g_0 / \partial z$$

$$\nu_c(x) = a\lambda_y(x, 0), \quad \nu_d(x) = a\lambda(x, l)$$

и уравнения

(4.7) $$-\nu_d - 2\mu_d \nu_1 = 0, \quad -2\mu_d v_2 = 0$$

связывающие управления v_1 и v_2. Из необходимого условия Вейерштрасса (3.2) может быть найдено управление в виде

(4.8) $$v_1(x) = F \operatorname{sign} \nu_d(x)$$

Рассмотрим функционал

$$J = \int_0^T z(x, l)\, dx \tag{4.9}$$

Формулы (2.6) позволяют найти концевые условия

$$\lambda(T, y) = \lambda_x(T, y) = 0, \quad 0 \leqslant y < l \tag{4.10}$$

Решая уравнение (4.5) с концевыми условиями (4.10) и с граничными условиями (4.6), можно найти $\lambda(x, y)$ и $\nu_d(x)$

$$\nu_d(x) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left[\cos \frac{(2k+1)\pi a(x-T)}{2l} - 1\right] \tag{4.11}$$

Из (4.11) следует, что $\nu_d(x) \leqslant 0$, поэтому $v_1(x) = -F$. Подставив полученное управление в граничные условия (4.3) и решив уравнение (4.1), найдем $z(x, y)$, а следовательно, и функционал

$$J = -\frac{Fl^3}{a}\left[n + \frac{ax_1}{2l} - (-1)^n \left(1 - \frac{ax_1}{2l}\right)\right]$$

$$n = \text{entier}\,[aT / (2l)], \quad x_1 = T - 2nl / a$$

Возьмем теперь функционал

$$J = \int_0^l z_x(T, y)\, dy \tag{4.12}$$

Концевые и граничные условия для множителя λ в этом случае примут вид

$$\lambda(T, y) = -1, \quad \lambda_x(T, y) = \lambda(x, 0) = \lambda_y(x, l) = 0 \tag{4.13}$$

откуда видно, что в точке $x = T$, $y = 0$ множитель λ претерпевает разрыв. Для нахождения решения уравнения (4.5) с разрывными начальными условиями применим процедуру, подробно описанную в работе [3]. Анализ знака множителя Лагранжа $\nu_d(x)$ и условие Вейерштрасса (4.8) позволяют получить следующие формулы:

$$v_1(x) = (-1)^{n-1}F, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = 1, \ldots, n+1$$

$$x_0 = 0, \quad x_i = T - l / a - 2(n-i)\, l / a, \quad x_{n+1} = T$$

$$n = \text{entier}\,[1 + aT / (2l)]$$

$$J = \begin{cases} -FTa^2, & 0 \leqslant T < l / a \\ Fla(-2n + 1 - ax_1 / l), & T \geqslant l / a \end{cases}$$

Пусть функционал J записывается в форме

$$J = -\alpha l z(T, l) + \int_0^l z(T, y)\, dy \tag{4.14}$$

Концевые условия для множителя $\lambda(x, y)$ при таком функционале получим из формул (2.6) и (2.8)

$$\lambda(T, y) = 0, \quad \lambda_x(T, y) = 1, \quad 0 \leqslant y < l, \quad \lambda(T, l) = \alpha l / a \tag{4.15}$$

Граничные условия останутся прежними. Из условий (4.15) и граничных условий (4.14) видно, что множитель λ терпит разрыв в точке $(x = T,\ y = l)$. Применяя процедуру нахождения разрывного решения, изложенную в статье [3], получим $\lambda\ (x,\ y)$ и управление $v_1\ (x)$:

при $\alpha < 0$

(4.16) $$v_1\ (x) = (-1)^{n-i}F, \quad x_{i-1} < x < x_i \quad \text{при } 0 < \alpha < 1$$

(4.17) $$v_1(x) = \begin{cases} -(-1)^{n-i}F, & x_i - \alpha l\,/\,a < x < x_i \\ (-1)^{n-i}F, & x_{i-1} + \alpha l\,/\,a < x < x_i - \alpha l\,/\,a \\ -(-1)^{n-i}F, & x_{i-1} < x < x_{i-1} + \alpha l\,/\,a \end{cases}$$

$$i = 1,\ \ldots,\ n+1, \quad n = \text{entier}\ [aT\,/\,(2l)], \quad x_0 = 0, \quad x_i = T - 2l\,(n+1-i)\,/\,a$$

Значение функционала J при управлении (4.16) дается формулой $J = J_0$, а при управлении (4.17) $J = J_0 + J_\alpha$, где

$$J_0 = \begin{cases} Fl^2\,[-n + 2\alpha n + \alpha a x_1\,/\,l - a^2 x_1^2\,/\,(2l)^2], & 0 \leqslant x_1 \leqslant l\,/\,a \\ Fl^2\,[-n - 1 + 2\alpha n + \alpha a x_1\,/\,l + {}^1/_2\,(2 - a x_1\,/\,l)^2], & l\,/\,a \leqslant x_1 < 2l\,/\,a \end{cases}$$

$$J_\alpha = \begin{cases} Fl^2\,[-2n\alpha^2 - 2\alpha a x_1\,/\,l + a^2 x_1^2\,/\,l^2], & 0 \leqslant x_1 \leqslant \alpha l\,/\,a \\ Fl^2\,(-2n\alpha^2 - \alpha^2), & \alpha l\,/\,a \leqslant x_1 \leqslant 2l\,/\,a - \alpha l\,/\,a \\ Fl^2\,[-2n\alpha^2 - 2\alpha^2 + 4\alpha - 2\alpha a x_1\,/\,l - (2 - a x_1\,/\,l)^2], & 2l\,/\,a - \alpha l\,/\,a \leqslant x < 2l\,/\,a \end{cases}$$

5. Пример особого управления. В работе [5] решена задача о минимуме коэффициента динамичности. Найдено нагружение, при котором этот коэффициент равен единице. Очевидно, что задача о минимуме коэффициента динамичности одномассовой системы эквивалентна задаче о нагружении силой так, чтобы в заданное время полная энергия системы принимала минимальное значение.

Для систем с распределенными параметрами также может быть поставлена задача о нагружении силой так, чтобы колебания около статического равновесия были возможно меньше. Возьмем по аналогии с одномассовой системой в качестве критерия оптимальности полную энергию системы.

Сформулируем следующую задачу. Нагрузить стержень постоянного сечения, закрепленный на одном конце, силой P, приложенной на другом конце, за время $0 \leqslant x \leqslant T$ так, чтобы полная энергия стержня в момент T принимала минимальное значение.

Сформулированная задача описывается уравнениями (4.1) — (4.3), причем последнее неравенство заменяется следующим:

$$0 \leqslant v_1\ (x) \leqslant F = P\,/\,(\sigma E)$$

где σ — площадь поперечного сечения, E — модуль Юнга. Полная энергия стержня пропорциональна функционалу

$$J = \int_0^l \{z_x^2\ (T,\ y) + a^2\,[z_y\ (T,\ y) - z_{cmy}\ (y)]^2\}\ dy$$

где $z_{cm}\ (y)$ — статическое смещение стержня под силой P.

Множитель Лагранжа $\lambda\ (x,\ y)$ удовлетворяет уравнению (4.5), граничным и концевым условиям

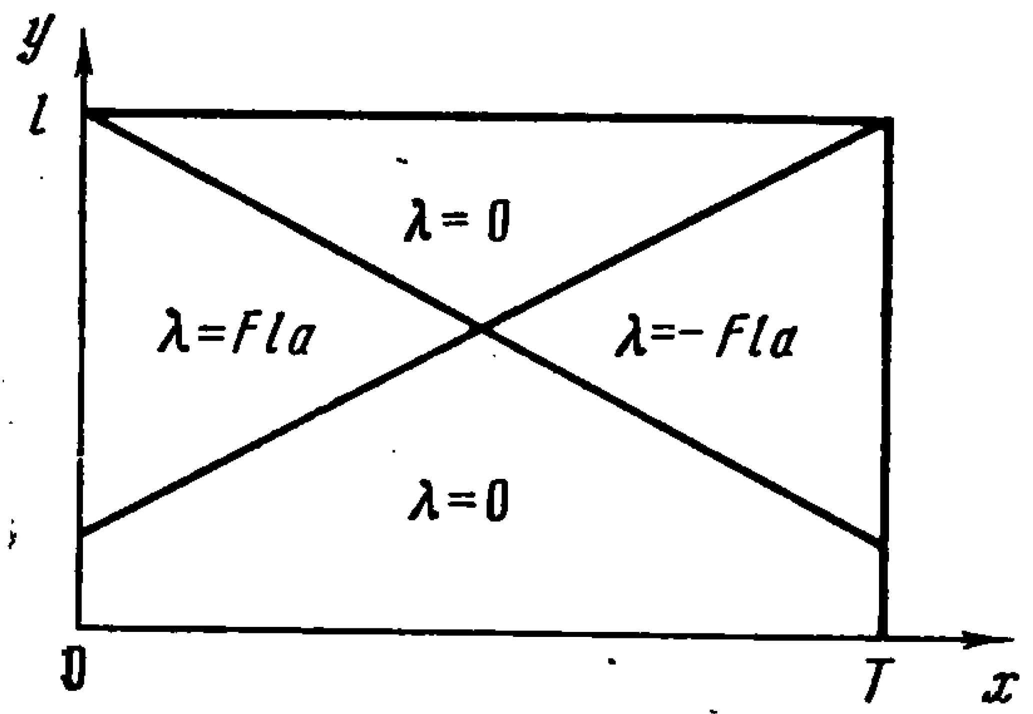
(5.1) $$\lambda\ (x,\ 0) = \lambda_y\ (x,\ l) = 0$$

(5.2) $$\lambda\ (T,\ y) = -2z_x\ (T,\ y), \quad 0 \leqslant y < l$$

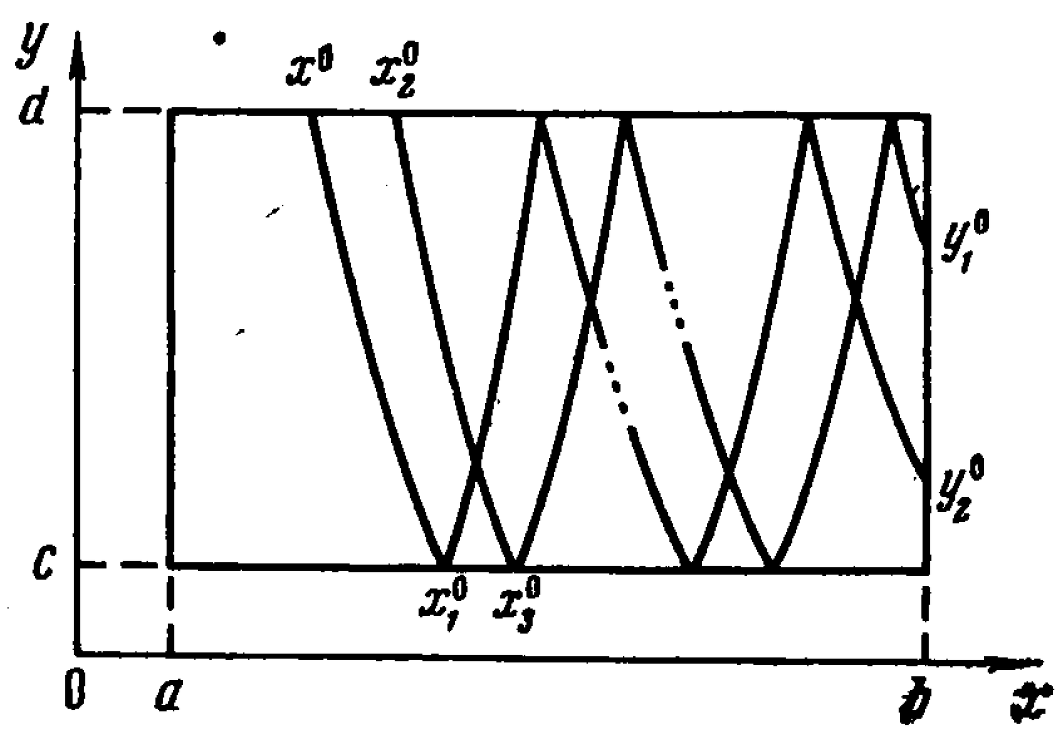
$$\lambda\ (T,\ l) = \lambda\ (T,\ l - 0) - 2a\,[z_y\ (T,\ l) - z_{cmy}\ (l)]$$

$$\lambda_x\ (T,\ y) = -2a^2\,[z_{yy}\ (T,\ y) - z_{cmyy}\ (y)], \quad 0 < y < l$$

Поставленная задача решалась градиентным методом при $F = a = l = 1$, причем разрывная часть множителя $\lambda(x, y)$, обусловленная вторым соотношением (5.2), вычислялась отдельно. В результате было получено решение $v_1(x) = {}^1/_2 F$. Оказалось, что такое управление дает точное решение поставленной задачи. Покажем, что оно



Фиг. 1



Фиг. 2

удовлетворяет всем необходимым условиям, полученным ранее. Подставляя $v_1(x) = {}^1/_2 F$ в граничные условия (4.3) уравнения (4.1) и решая его, найдем

$$z(x, y) = \frac{4Fl^2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \left[1 - \cos\frac{(2k+1)\pi a x}{2l}\right] \sin\frac{(2k+1)\pi y}{2l}$$

Решение уравнения (4.5) дает

$$\lambda(x, y) = -\frac{4Fla}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left[\sin\frac{(2k+1)\pi a x}{2l} - \right.$$

$$\left. - \sin\frac{(2k+1)\pi a (T - x)}{2l}\right] \sin\frac{(2k+1)\pi y}{2l} + \begin{cases} 0, & x, y \in \Omega \setminus \omega \\ 2Fla, & x, y \in \omega \end{cases}$$

На фиг. 1 представлен множитель $\lambda(x, y)$ в области Ω. Таким образом, $\nu_d(x) = a\lambda(x, l) \equiv 0$, и управление $v_1(x)$ является особым. Оно может принимать любые допустимые значения.

Значение функционала дается формулой

$$J(T) = \begin{cases} Fl^2a^2[1 - aT/(2l)], & T \leqslant 2l/a \\ 0, & T > 2l/a \end{cases}$$

т. е. за $T = T^* = 2l/a$ стержень может быть нагружен силой так, что начиная с момента T^* будет находиться в статическом положении равновесия.

6. Доказательство условия (3.2). Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума (3.2) можно получить следующим образом. Возьмем нормальную поверхность E, сообщающую минимум функционалу J. Выберем на границе $y = d$ точки x° и $x_2^\circ = x^\circ + e$, не совпадающие с угловыми, так чтобы отрезок $[x^\circ, x_2^\circ]$ принадлежал какой-либо одной элементарной области ω_i. Проведем из точек (x°, d) и (x_2°, d) пилообразные линии Q_1 и Q_2, состоящие из отрезков характеристик семейств C и D (фиг. 2).

Построим следующее допустимое семейство функций:

$$z(x, y),\quad u_k(x, y),\quad v_t(x),\quad x, y \in \Omega_1,\quad k = 1, \ldots, m \tag{6.1}$$

$$Z(x, y),\quad u_k(x, y),\quad V_t(x),\quad x, y \in \Omega_2$$

$$z(e, x, y),\quad u_k(x, y),\quad v_t(x),\quad x, y \in \Omega_3,\quad t = 1, \ldots, m_1$$

включающее в себя поверхность E при $e = 0$. Здесь $V_t(x)$ — любые управления, удовлетворяющие последним уравнениям (1.2).

На границах областей Ω_1, Ω_2, Ω_3 выполняются условия

$$z(x, y)|_D = Z(x, y)|_D,\quad Z(x, y)|_{D_e} = z(e, x, y)|_{D_e} \tag{6.2}$$

а на остальных отрезках линий Q_1 и Q_2 условия

(6.3) $$z(e,\ x,\ y+0) = z(e,\ x,\ y-0)$$

Вариации семейства (6.1) по параметру e на поверхности E ($e = 0$) равны

$$\delta z(x,\ y) = (dz/\partial e)_{e=0}\,de = 0, \quad x,\ y \in \Omega_1 \cup \Omega_2$$
$$\delta u_k(x,\ y) = (\partial u_k/\partial e)_{e=0}\,de = 0, \quad k = 1,\ \ldots,\ m$$
$$\delta v_t(x) = (\partial v_t/de)_{e=0}\,de = 0, \quad t = 1,\ \ldots,\ m_1$$

так как изменение граничных управлений в точке x_2° приводит к изменению $z(x,\ y)$ в области Ω_3, а функции $u_k(x,\ y)$, $v_t(x)$ от параметра e не зависят.

На характеристике D_e вариация δz удовлетворяет условию

$$[(Z_N - z_N)\delta N]_{D_e} = \delta z\,|_{D_e}, \quad e = 0$$

которое получается дифференцированием по e второго условия (6.2). Дифференцированием по e условий (6.3) получим

$$[(z_N^- - z_N^+)\delta N]_{Q_2} = (\delta z^+ - \delta z^-)\,|_{Q_2}, \quad \delta z^+\,|_{Q_1} = \delta z^-\,|_{Q_1}$$

так как координаты x, y вдоль линии Q_1 от e не зависят.

После подстановки функций (6.1) в функционал (2.2) и дифференцирования его по e при $e = 0$ получим

$$\Delta I = \left(\frac{\partial I}{\partial e}\right)_{e=0} de = \pm \int\limits_{Q_2} [L^+(z) - L^-(z) + H^+ - H^-]\,\delta N\,ds +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n'} \left\{ \iint\limits_{\omega_i} \left[M(\lambda) + \frac{\partial H}{\partial z} \right] \delta z_i\,dx\,dy + \oint\limits_{\tau_i'} [A\lambda\delta z_N + \right.$$
$$+ (-A\lambda_N - 2B\lambda_s + G_2\lambda)\,\delta z]\,ds + \sum_{j=1} [B\lambda\delta z]_{M_{ij}}^{M_{ij+1}} +$$
$$+ \sum_{j=k_c'+1}^{k_c'+m_c'} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \nu_{cj} \left[\frac{\partial \varphi_c}{\partial z}\,\delta z_j(x,\ c) + \frac{\partial \varphi_c}{\partial z_y}\,\delta z_{jy}(x,\ c) \right] dx +$$
$$+ \sum_{j=k_d'+1}^{k_d'+m_d'} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \left[\nu_{dj}\delta z_{jy}(x,\ d) + \left(\frac{\partial h}{\partial e}\right)_{e=0} de \right] dx +$$
$$\left. + [\nu_d(x)\,z_y(x,\ d) + h]\,\delta x\,\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} \right\} + \sum_{j=k_b'+1}^{k_b'+m_b'} \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial e}\right)_{e=0} de\,dy +$$
$$+ [(\varphi_0^- - \varphi_0^+)\,\delta y_2^0] + \left(\frac{\partial \chi}{\partial e}\right)_{e=0} de$$
$$x_{k_c'} = x_1^c, \quad x_{k_c'+m_c'} = b, \quad x_{k_d'} = x^\circ, \quad x_{k_d'+m_d'} = b, \quad x_{k_b'} = c, \quad x_{k_b'+m_b'} = d$$

Здесь величины со штрихами — целые числа, определенные так же, как и соответствующие величины без штрихов, но относящиеся к области Ω_3, знак плюс берется для характеристик с положительной, а знак минус для характеристик с отрицательной производной dy/dx.

Прежде всего заметим, что вдоль линии Q_2 множитель Лагранжа λ и функция $L(z) + H$ непрерывны, так как линия Q_2 не является угловой линией поверхности E, сообщающей минимум функционалу J. При $e = 0$ будет $\delta z\,|_{Q_2} = (z_N^+ - z_N^-)\delta N\,|_{Q_2} = 0$, поэтому интегралы на линии Q_2 и слагаемые в точках, лежащих на этих линиях, обращаются в нуль.

Воспользовавшись условием стационарности функционала J в форме (2.2), получим

$$\Delta I = \sum_{j=k_d'}^{k_d'+m_d'} [h(x_j, z, v^-) - h(x_j, z, v^+)]\, \delta x_j \tag{6.4}$$

Во всех точках x_j, кроме $x_{k_d'} = x^\circ$, $v^- = v^+$, поэтому равенство (6.4) переходит в

$$\Delta I = [h(x^\circ, z, V) - h(x^\circ, z, v)]de$$

Поверхность E сообщает минимум функционалу I, поэтому

$$\Delta I \geqslant 0 \tag{6.5}$$

Точка x° взята произвольно, $de > 0$ по построению, поэтому (6.5) может быть записано в виде

$$h(x, z, V, \nu_d, \mu_d) - h(x, z, v, \nu_d, \mu_d) \geqslant 0 \tag{6.6}$$

где V — допустимые параметры управления, связанные последними соотношениями (1.2), μ_d — множители Лагранжа. На управления $V_t(x)$ никаких дополнительных условий не налагается, поэтому говорят о необходимом условии Вейерштрасса сильного минимума (6.6).

Поступила 8 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петухов Л. В., Троицкий В. А.* Вариационные задачи оптимизации для уравнений в частных производных гиперболического типа. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 5.
2. *Петухов Л. В., Троицкий В. А.* Вариационные задачи оптимизации для уравнений гиперболического типа. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
3. *Петухов Л. В., Троицкий В. А.* Некоторые оптимальные задачи теории продольных колебаний стержней. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
4. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
5. *Петухов Л. В., Троицкий В. А.* О минимуме коэффициента динамичности. Тр. Ленингр. политехн. ин-та им. М. И. Калинина, 1969, № 307.