Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 534.222.2

МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

М. Ю. Козманов

(Челябинск)

Предлагается метод получения точных решений некоторых краевых задач для гиперболических систем квазилинейных уравнений первого порядка с двумя неизвестными при помощи специальных рядов. В качестве примера решается задача о движении плоского, цилиндрического и сферического поршня в газе с распределенной плотностью.

1. Рассмотрим систему уравнений

$$A(x, \mathrm{U})\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} + B(x, \mathrm{U})\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + C(x, \mathrm{U}) = 0 \tag{1.1}$$

$$\mathrm{U} = \{u_i(x, t)\}, \ A(x, \mathrm{U}) = \{a_{ij}(x, \mathrm{U})\}, \ B(x, \mathrm{U}) = \{b_{ij}(x, \mathrm{U})\}$$

$$\mathrm{C}(x, \mathrm{U}) = \{c_i(x, \mathrm{U})\}, \quad i, j = 1, \ldots, m$$

Пусть $\mathrm{U}^\circ(x) = \{u_1^\circ(x), \ldots, u_m^\circ(x)\}$ — аналитическое решение системы (1.1). Предполагаем, что $a_{ij}(x, \mathrm{U})$, $b_{ij}(x, \mathrm{U})$, $c_i(x, \mathrm{U})$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ — аналитические функции в окрестности точки $M = \{x = 0, \ \mathrm{U} = \mathrm{U}^\circ\}$, а также, что решению $\mathrm{U}^\circ(x)$ соответствует действительная характеристика системы (1.1), которую всегда можно представить в виде

$$\varphi(x, t) = t + \Psi(x) = 0 \tag{1.2}$$

Будем считать, что $0 < |\varphi_x'| < \infty$, $\Psi(0) = 0$, а также, что отличен от нуля в окрестности точки M следующий определитель $(m-1)$-го порядка:

$$\det\{a_{ij} + b_{ij}\varphi_x'\} \neq 0 \quad i, j = 2, \ldots, m$$

Требуется найти решение системы (1.1) при условиях

$$\mathrm{U}(x, t)|_{\varphi(x, t)=0} = \mathrm{U}^\circ(x) \tag{1.3}$$

$$u_1(0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k t^k = H(t), \qquad u_1^\circ(0) = \xi_0$$

где ξ_k $(k = 0, \ldots, \infty)$ — заданные константы.

Решение ищем в окрестности точки $\{x = 0, \ t = 0, \ \varphi = 0\}$ при $t > 0$, $\varphi > 0$.

Людвигом [1] разработан метод решения задачи Коши для линейных гиперболических систем при помощи сходящихся разложений на бегущие волны. Члены рядов имеют в качестве множителей обобщенные функции, содержащие при увеличении номера члена ряда все более слабые особенности. Коэффициенты при обобщенных функциях определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказательство сходимости таких рядов сведено к теореме существования Коши — Ковалевской.

В ряде работ А. Ф. Сидорова [2, 3] предложен метод нахождения точных решений некоторых краевых задач для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка. Решения представляются в пространстве годографа специальными рядами. Доказательство сходимости таких рядов проведено С. П. Баутиным [4] и сводится также к теореме Коши — Ковалевской.

Данная статья примыкает к перечисленным работам.

2. Решение задачи ищем в виде рядов

$$u_i(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_i^{(k)}(x)\varphi^k(x,t),\qquad i=1,\ldots,m \tag{2.1}$$

Найдем коэффициенты $u_i^{(k)}(x)$. Прежде всего, разложим в ряд в окрестности точки $\mathrm{U}=\mathrm{U}^\circ$ коэффициенты $a_{ij}(x,\mathrm{U})$, $b_{ij}(x,\mathrm{U})$, $c_i(x,\mathrm{U})$ $(i,j=1,\ldots,m)$.

Разложение в ряд для $a_{ij}(x,\mathrm{U})$ будет иметь такой вид:

$$a_{ij}(x,\mathrm{U})=a_{ij}(x,\mathrm{U}^\circ)+$$
$$+\sum_{l_1+\ldots+l_m=1}^{\infty}\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_m}a_{ij}(x,\mathrm{U}^\circ)(u_1-u_1^\circ)^{l_1}\ldots(u_m-u_m^\circ)^{l_m}}{\partial u_1^{l_1}\ldots\partial u_m^{l_m}l_1!\ldots l_m!}$$

Подставим в это разложение вместо $u_i(i=1,\ldots,m)$ ряды (2.1) и найдем коэффициенты $F(a_{ij},k)$ при $\varphi^k(k\geqslant1)$ в полученном выражении. Обозначим коэффициент при φ^k в разложении в ряд по φ функции вида $(u_q-u_q^\circ)^{l_q}$ $(k\geqslant l_q\geqslant1)$ через $f_{l_q}(k)$. Получим (δ_i^j — символ Кронкера)

$$f_{l_q}(k)=\sum_{\beta_1+\ldots+\beta_k=l_q}(u_q^{(1)})^{\beta_1}\ldots(u_q^{(k)})^{\beta_k}c_{\beta_1\ldots\beta_k}^{l_q}\delta_{\beta_1+2\beta_2+\ldots+k\beta_k}^{k}$$
$$c_{\beta_1\ldots\beta_k}^{l_q}=\frac{l_q!}{\beta_1!\ldots\beta_k!}$$

Далее введем обозначение

$$F_{l_i}(k)=\begin{cases}f_{l_i}(k), & k\geqslant l_i\geqslant1\\ 1, & l_i=0\\ 0, & k<l_i\end{cases}$$

Коэффициент при φ^k $(k\geqslant1)$ в разложении в ряд по φ функции $(u_1-u_1^0)^{l_1}\ldots(u_m-u_m^\circ)^{l_m}$ обозначим $F_{l_1\ldots l_m}(k)$. Тогда

$$F_{l_1\ldots l_m}(k)=$$
$$=\sum_{\Delta_1,\ldots,\Delta_{m-1}=0}^{k}F_{l_1}(\Delta_1)\ldots F_{l_{m-1}}(\Delta_{m-1})F_{l_m}(k-\Delta_1-\ldots-\Delta_{m-1})$$

В принятых обозначениях коэффициент $F(a_{ij},k)$ имеет вид

$$F(a_{ij},k)=\sum_{l_1+\ldots+l_m=1}^{k}\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_m}a_{ij}(x,\mathrm{U}^\circ)F_{l_1\ldots l_m}(k)}{\partial u_1^{l_1}\ldots\partial u_m^{l_m}l_1!\ldots l_m!}$$

Аналогичные вычисления можно провести с коэффициентами $b_{ij}(x, \mathrm{U})$, $c_i(x, \mathrm{U})$.

Таким образом, подставив в i-е уравнение системы (1.1) вместо u_j ($j = 1, \ldots, m$) ряды (2.1), получим в левой части ряд, коэффициент при φ^k у которого можно вычислить по формуле

$$R_{ki} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\Delta=0}^{k} \Big[(\Delta + 1) u_j^{(\Delta+1)} F(a_{ij}, k - \Delta) + + (\Delta + 1) u_j^{(\Delta+1)} F(b_{ij}, k - \Delta) \varphi_x' + \frac{\partial u_j^{(\Delta)}}{\partial x} F(b_{ij}, k - \Delta)\Big] + F(c_i, k)$$

$$k = 0, \ldots, \infty$$

Для того чтобы ряды (2.1) являлись формальным решением системы (1.1), достаточно, чтобы

$$R_{ki} = 0, \quad i = 1, \ldots, m; \ k = 0, \ldots, \infty \tag{2.2}$$

Систему (2.2) можно записать в виде

$$(k + 1) A_x(\mathrm{U}^{(k+1)}) + L_k(\mathrm{U}^{(k)}, x) = 0, \quad k = 0, \ldots, \infty$$

Здесь

$$L_k = \{(L_k)_i\}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$(L_k)_i = \sum_{j=1}^{m} \Big[\sum_{\Delta=0}^{k-1} F(a_{ij}, k - \Delta) u_j^{(\Delta+1)} (\Delta + 1) + + F(b_{ij}, k - \Delta)(\Delta + 1) u_j^{(\Delta+1)} \varphi_x' + \sum_{\Delta=0}^{k} F(b_{ij}, k - \Delta) \frac{\partial u_j^{(\Delta)}}{\partial x}\Big] + F(c_i, k)$$

$$A_x = \{a_{ij}(x, \mathrm{U}^\circ) + b_{ij}(x, \mathrm{U}^\circ) \varphi_x'\}, \qquad i, j = 1, \ldots, m$$

(A_x — вырожденная матрица, так как $\varphi = 0$ — характеристика).

Используя тот факт, что $\mathrm{U}^\circ(x)$ — решение системы (1.1), для нахождения $u_i^{(k)}(x)$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & A_x \mathrm{U}^{(1)} = 0 \\ & L_1(\mathrm{U}^{(1)}, x) + 2A_x \mathrm{U}^{(2)} = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & L_k(\mathrm{U}^{(k)}, x) + (k + 1) A_x \mathrm{U}^{(k+1)} = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Система (2.3) отличается от уравнений, полученных Людвигом [1], видом операторов L_k.

Для решения системы (2.3), следуя Людвигу, найдем правый ($\mathbf{r}(x)$) и левый ($\mathbf{d}(x)$) нуль-векторы матрицы A_x. Они ненулевые, так как $\det A_x = 0$.

Предположим, что

$$\sum_{i, j} d_i(x) b_{ij}(x, \mathrm{U}^\circ) r_j(x) > 0$$

в окрестности точки M. Затем положим $\mathrm{U}^{(1)} = \sigma_1(x)\, \mathbf{r}(x)$, где $\sigma_1[x)$ — скалярный множитель.

Определим $\sigma_1(x)$ так, чтобы система, записанная во второй строке в (2.3), была совместна. Решение этой системы существует, если $\mathbf{d}(x)L_1(\sigma_1\mathbf{r}, x) = 0$. Запишем это уравнение в другом виде

$$\partial\sigma_1/\partial x + G(x)\,\sigma_1 = Q(x)\,\sigma_1^2 \tag{2.4}$$

$$G(x) = \frac{1}{\Sigma_0}(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3), \qquad Q(x) = \frac{1}{\Sigma_0}\Sigma_4$$

$$\Sigma_0 = \sum_{i,j=1}^{m} d_i b_{ij}(x, \mathbf{U}^\circ) r_j, \quad \Sigma_1 = \sum_{i,j=1}^{m} d_i b_{ij}(x, \mathbf{U}^\circ)\frac{\partial r_j}{\partial x}$$

$$\Sigma_2 = \sum_{i,j,q=1}^{m} d_i \frac{\partial b_{ij}(x, \mathbf{U}^\circ)}{\partial u_q} r_q \frac{\partial \overset{\circ}{u}_j}{\partial x}, \quad \Sigma_3 = \sum_{i,q=1}^{m} d_i \frac{\partial c_i(x, \mathbf{U}^\circ)}{\partial u_q} r_q$$

$$\Sigma_4 = -\sum_{i,j,q=1}^{m} d_i \left[\frac{\partial a_{ij}(x, \mathbf{U}^\circ)}{\partial u_q} + \frac{\partial b_{ij}(x, \mathbf{U}^\circ)}{\partial u_q^{\circ}}\right] r_q r_j$$

Интегрируя уравнение (2.4), получаем

$$\sigma_1(x) = \exp\left(-\int G(x)\,dx\right)\left[\gamma_1 - \int \exp\left(-\int G(x)\,dx\right) Q(x)\,dx\right]^{-1}$$

Функцую $\mathbf{U}^{(2)}$ ищем в виде

$$\mathbf{U}^{(2)} = \sigma_2(x)\,\mathbf{r}(x) + \mathbf{h}_2(x) \qquad \mathbf{h}_2(x) = \{h_2^i(x)\}$$

где $\mathbf{h}_2(x)$ определяется из системы

$$L_1(\mathbf{U}^{(1)}, x) + 2A_x\mathbf{h}_2 = 0$$

Эта система совместна.

Функция $\sigma_2(x)$ находится из соотношения $\mathbf{d}(x)L_2(\sigma_2\mathbf{r} + \mathbf{h}_2, x) = 0$, которое можно записать в виде

$$\partial\sigma_2/\partial x + G_1(x)\,\sigma_2 = Q_1(x)$$

Общее решение этого уравнения легко выписывается.

Функции $\sigma_k(x)$ $(k > 2)$ находятся последовательно, аналогично $\sigma_2(x)$. Произвольные постоянные γ_k определяются из условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} [\sigma_k r_1 t^k + h_k^1 t^k]$$

$r_1 \neq 0$, так как $\det\{a_{ij} + b_{ij}\varphi_x'\} \neq 0$, $i, j = 2, \ldots, m$.

Сходимость полученных рядов следует из [4].

Проведенное построение справедливо также и для случая, когда коэффициенты исходной системы (1.1) зависят от t, и для случая уравнений со многими переменными. В этих случаях для нахождения σ_k получаются уравнения в частных производных.

3. Пусть покоящийся газ ($u = \mu_0(x) \equiv 0$) с плотностью $\rho = \alpha_0(x)$ и энтропией $S = S_0(x)$ находится вне сферического (или цилиндрического) поршня радиуса x_0 или справа от плоского поршня, расположенного на расстоянии x_0 от начала координат. Величины $\alpha_0(x)$, $\mu_0(x)$, $S_0(x)$ удовлет-

воряют системе уравнений

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\nu\rho u}{x} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}=0$$

Здесь ν и $P = P(\rho, S)$ берутся в соответствии с [5].

В момент времени $t = 0$ поршень начинает вдвигаться в газ (радиус поршня увеличивается) с нулевой начальной скоростью и ненулевым ускорением. Движение газа будет описываться системой (3.1). Будем искать решение этой системы в окрестности точки $\{\varphi = 0,\ t = 0,\ x = x_0\}$, где $\varphi = 0$ — характеристика, соответствующая решению $\alpha_0(x)$, $\mu_0(x)$, $S_0(x)$.

Течение газа удовлетворяет следующим условиям ($x(t)$ — закон движения поршня):

$$u(x, t)|_{\varphi=0} = 0,\quad \rho(x, t)|_{\varphi=0} = \alpha_0(x) \tag{3.2}$$

$$S(x, t)|_{\varphi=0} = S_0(x),\quad u(x(t), t) = \partial x(t)/\partial t$$

$$(x(t) = x_0 + \xi_1 t^2 + \ldots,\ \xi_1 > 0)$$

Решение задачи (3.1), (3.2) ищем в виде

$$\rho(x, t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(x)\varphi^k(x, t),\qquad u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(x)\varphi^k(x, t)$$

$$S(x, t)=\sum_{k=0}^{\infty}S_k(x)\varphi^k(x, t)$$

Вычисления проведем для случая

$$P(\rho, S) = S\rho^2,\quad S_0 = \alpha_0^{-2},\quad x(t) = x_0 + \xi_1 t^2$$

Система (3.1) запишется при этом так:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\nu\rho u}{x} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+2S\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial S}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}=0$$

Матрица A_x для системы (3.3) имеет вид

$$A_x=\begin{Vmatrix}-1 & \alpha_0\varphi_x' & 0\\ 2\alpha_0^{-2}\varphi_x' & -1 & \alpha_0\varphi_x'\\ 0 & 0 & -1\end{Vmatrix}$$

Правый и левый нуль-векторы соответственно такие:

$$\mathbf{r}(x)=\begin{Vmatrix}2^{-1/2}\alpha_0^{3/2}(x)\\ 1\\ 0\end{Vmatrix},\qquad \mathbf{d}(x)=\begin{Vmatrix}2^{1/2}\alpha_0^{-3/2}(x)\\ 1\\ 2^{-1/2}\alpha_0^{3/2}(x)\end{Vmatrix}$$

Для отыскания $\alpha_1(x)$, $\mu_1(x)$, $S_1(x)$ получаем соотношения

$$-2\alpha_2 + 2\mu_1\alpha_1\varphi_x' + 2\alpha_0\mu_2\varphi_x' + \frac{\nu\alpha_0\mu_1}{x} + \frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\mu_1 + \frac{\partial\mu_1}{\partial x}\alpha_0 = 0$$

$$-2\mu_2 + \mu_1^2\varphi_x' + 2S_0\frac{\partial\alpha_1}{\partial x} + 4S_0\alpha_2\varphi_x' + \frac{\partial S_0}{\partial x}\alpha_1 + 2S_2\alpha_0\varphi_x' = 0$$

$$-2S_2 + \mu_1 S_1\varphi_x' + \frac{\partial S_0}{\partial x}\mu_1 = 0$$

В соответствии с п. 2 полагаем

$$\alpha_1(x) = \sigma_1(x)\,2^{-1/2}\alpha_0^{3/2}(x), \quad \mu_1(x) = \sigma_1(x), \quad S_1(x) = 0$$

Для нахождения $\sigma_1(x)$ получаем уравнение

$$2^{3/2}\alpha_0^{-1/2}\frac{\partial\sigma_1}{\partial x} + 3\alpha_0^{1/2}2^{-1/2}\sigma_1^2 + \left(2^{1/2}\frac{\nu}{x}\alpha_0^{-1/2} + 2^{-1/2}\alpha_0^{-3/2}\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\right)\sigma_1 = 0$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\sigma_1(x) = \alpha_0^{-1/4}(x)\,x^{-\nu/2}\left[\gamma_1 + {}^3/_4\int\alpha_0^{3/4}(x)\,x^{-\nu/2}\,dx\right]^{-1}$$

Пусть $\alpha_0(x) = \alpha_0 = \mathrm{const}$, $x(t) = x_0 + \xi_1 t^2$. Тогда

$$\sigma_1(x) = \left[x^{\nu/2}\left(\gamma_1 + {}^3/_4\alpha_0\frac{x^{1-\nu/2}}{1-\nu/2}\right)\right]^{-1} \quad (\nu = 0, 1)$$

$$\sigma_1(x) = [x(\gamma_1 + {}^3/_4\alpha_0\ln x)]^{-1} \quad (\nu = 2)$$

$$\gamma_1 = -{}^1/_4\left(2x_0^{-\nu/2}\xi_1^{-1} + 3\alpha_0\frac{x_0^{1-\nu/2}}{1-\nu/2}\right) \quad (\nu = 0, 1)$$

$$\gamma_1 = -{}^1/_4(2x_0^{-1}\xi_1^{-1} + 3\alpha_0\ln x_0) \quad (\nu = 2)$$

Место появления бесконечных градиентов x^* определяется из условия равенства нулю выражения в круглых скобках в соотношениях для $\sigma_1(x)$. Время появления бесконечных градиентов $t^*(t^* > 0)$ определяется из уравнения

$$\varphi(x^*, t) = 0$$

В рассматриваемом случае (поршень вдвигается в газ, $\xi_1 > 0$) бесконечные градиенты возникают всегда.

Если начальная скорость звука в газе равна единице, то получаем

$$t^* = {}^2/_3 w, \quad w = 2\xi_1 \quad (\nu = 0)$$

$$t^* = \left[6 + \frac{1}{wx_0}\right]\frac{1}{9w} \quad (\nu = 1)$$

Для этого случая аналогичные формулы определения получены в [3]. Пусть теперь $\rho = \alpha_0(x)$, $S = S_0(x)$. Тогда

$$\gamma_1 = -{}^1/_4\left(2\xi_1^{-1}x_0^{-\nu/2}\alpha_0^{-1/4}(x_0) + 3\int\alpha_0^{3/4}(x)\,x^{-\nu/2}\,dx\,|_{x=x_0}\right)$$

Достаточным условием для образования бесконечных градиентов является следующее:

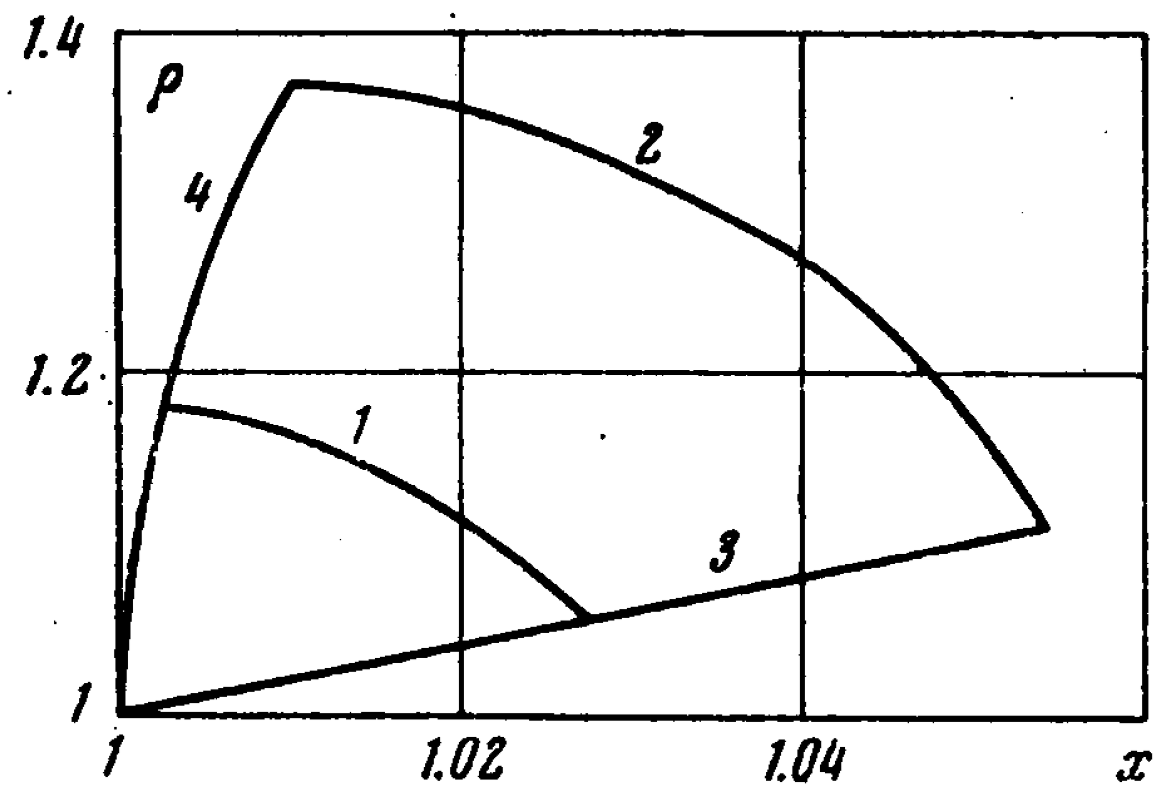
$$\int\alpha_0^{3/4}(x)\,x^{-\nu/2}\,dx \to \infty, \quad x \to \infty$$

Пусть $\nu = 1$, $\alpha_0(x) = x^2$, $x(t) = 1 + {}^{20}/_3\, t^2$. Получаем

$$\sigma_1(x) = [0.75\ x\,(0.6-0.5\ x^2)]^{-1},\ x^* = 1.1,\quad t^* = 0.074$$

$$\rho(x,t) = x^2\,[1 + 8^{1/2} / 3(0.5\ x^2 - 0.6)^{-1}(-t - 8^{-1/2} + x^2 8^{-1/2})] + \ldots$$

Выражения для $\sigma_2(x)$, $h_2(x)$ громоздкие, поэтому не приводятся; $u(x, t)$ и $S(x, t)$ записываются аналогично.



На фигуре приведены результаты численных расчетов плотности $\rho(x, t)$ с использованием трех членов разложения для $t = 0.02$ и $t = 0.04$, соответствующих кривым *1* и *2*. Кривая *3* задает начальное распределение плотности, кривая *4* определяет положение поршня. Значения максимальных ρ и соответствующие значения x следующие: (1.18, 1.0025), (1.372, 1.011).

В заключение автор благодарит А. Ф. Сидорова за руководство и помощь.

Поступила 6 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ludwig D.* Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem, Communs Pure and Appl. Math., 1960, vol. 13, № 3.
2. *Сидоров А. Ф.* Метод решения некоторых краевых задач для нелинейных уравнений гиперболического типа и распространение слабых ударных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
3. *Сидоров А. Ф.* О разрушении потенциальных течений, примыкающих к области покоя. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
4. *Баутин С. П.* Аналитические решения задачи о движении поршня. В сб.: «Численные методы механики сплошной среды», т. 4. № 1. Новосибирск, 1973.
5. *Рождественский Б. Л.*, *Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М., «Наука», 1966.