Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 534.222.2

О ВЛИЯНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ТЕЧЕНИЕ ГАЗА ПРИ СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ ДЛЯ БОЛЬШОГО ЗНАЧЕНИЯ ВРЕМЕНИ

В. В. Александров, Г. Л. Стенчиков

(Москва)

В приближении слабого влияния излучения на течение серого излучающе-поглощающего газа при сильном взрыве в однородной среде методом сращиваемых асимптотических разложений для достаточно большого значения времени получены условия, при которых в центре реализуются кинетический, планковский и росселандов режимы передачи лучистого тепла. В планковском режиме найдено аналитическое решение. Анализируются ошибки полученных первых приближений.

В [1] анализировалось течение вязкого теплопроводного газа при сильном взрыве для большого значения времени. В данной работе аналогичная задача рассматривается для излучающе-поглощающего невязкого газа.

1. Рассматривается сильный взрыв в излучающем нерассеивающем поглощающем сером невязком газе. Зависимость объемного коэффициента поглощения $\varkappa$ от давления p и плотности ρ принимается степенной $\varkappa = cp^\alpha\rho^\beta$. Считается, что газ совершенный и находится в состоянии локального термодинамического равновесия. Начальное распределение плотности равномерное: $\rho = c_\rho$.

Задача содержит константы E_0, c, c_ρ, $a = \sigma R^{-4}$, где E_0 — энергия, выделяющаяся при взрыве, σ — постоянная Стефана — Больцмана, R — газовая постоянная [2]. Размерности этих констант равны $ML^{d-1}T^2$, ML^{-3}, $ML^{-8}T^5$ и $M^{-\alpha-\beta}T^{2\alpha}L^{\alpha+3\beta-1}$. Величина $d = 1, 2, 3$ для плоской, цилиндрической, сферической симметрии. Через M, L, T обозначены символы массы, длины и времени. В качестве масштабов длины и времени выберем

$$l^\circ = a^{2/(5d)}c_\rho^{-7/(5d)}E^{1/d}, \quad t^\circ = a^{(d+2)/(5d)}c_\rho^{-(d+7)/(5d)}E^{1/d}$$

и определим безразмерные скорость v°, давление p°, плотность ρ°, энтальпию h°, интенсивность излучения I° и лагранжеву координату ψ° следующими формулами:

$$v = (c_\rho / a)^{1/5}v^\circ, \; p = c_\rho(c_\rho / a)^{2/5}p^\circ, \; \rho = c_\rho\, \rho^\circ$$
$$h = (c_\rho / a)^{2/5}h^\circ, \; I = a\,(c_\rho / a)^{8/5}\, I^\circ, \; \psi = c_\rho\,(l^\circ)^d\, \psi^\circ$$

В этих обозначениях запишем уравнения Эйлера, состояния, неразрывности, траектории частицы, энергии и переноса излучения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + r^{d-1}\frac{\partial p}{\partial \psi} = 0, \quad p = \frac{\gamma-1}{\gamma}\rho h, \quad \rho r^{d-1}\frac{\partial r}{\partial \psi} = 1, \quad v = \frac{\partial r}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} = 4\tau_0 p^\alpha\rho^\beta\left(\frac{1}{4}\int\limits_{4\pi} I\, d\Omega - \frac{p^4}{\rho^4}\right)$$

$$\mu \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{d-1}{r}\left[\frac{5-d}{d+1}(1-\mu^2) - (3-d)\mu_1^2\right]\frac{\partial I}{\partial \mu} = \tau_0 p^\alpha \rho^\beta \left(\frac{p^4}{\pi \rho^4} - I\right)$$

$$\tau_0 = c c_\rho^{7(\alpha-1/d)/5+\beta} a^{-2(\alpha-1/d)/5} E^{1/d}$$

Здесь r — расстояние от плоскости ($d = 1$), оси ($d = 2$) или центра ($d = 3$) симметрии, γ — показатель адиабаты. Интенсивность излучения I зависит от координаты r, времени t и единичного вектора Ω направления полета фотонов. В плоском и сферическом случаях последнюю зависимость можно описать косинусом μ угла между направлением оси r и вектором Ω. В цилиндрическом случае нужно добавить зависимость от косинуса μ_1 угла между Ω и осью симметрии. Величина τ_0 является характерной оптической толщиной задачи. Энергия E пропорциональна энергии взрыва E_0 [1]. Индекс° всюду опущен.

2. Рассмотрим решение задачи (1.1) для достаточно большого значения времени, когда влияние излучения на движение среды можно считать слабым повсюду, за исключением малой окрестности центра. В этой окрестности течение неизлучающего газа имеет асимптотику [1]

$$(2.1) \qquad r = a_0 Y_{00} t^{2k/d} n^l, \quad v = \frac{4a_0 V_{00}}{(2+d)(\gamma+1)} t^{-k} n^l$$

$$p = \frac{8a_0^2 P_{00}}{(2+d)^2(\gamma+1)} t^{-2k}, \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} R_{00} n^{1/\gamma}$$

$$h = \frac{8a_0^2 \gamma H_{00}}{(2+d)^2(\gamma+1)^2} t^{-2k} n^{-1/\gamma}, \quad n = d a_0^{-d} t^{-2k} \psi \to 0$$

$$k = d / (2+d), \quad l = (\gamma-1) / \gamma d$$

Здесь постоянные a_0, Y_{00}, ..., H_{00} известны из точного решения Л. И. Седова.

Введем внутреннюю переменную

$$(2.2) \qquad N = d^{-1} a_0^\alpha n t^\delta = \psi\, t^{\delta - 2dk}$$

Величина δ будет определена ниже из условия равенства конвективных и лучистых потоков в окрестности центра. Она должна удовлетворять двум неравенствам

$$(2.3) \qquad 0 < \delta < 2d / (2+d).$$

Левое неравенство означает, что с течением времени неоднородность решения локализуется в окрестности центра, а правое эквивалентно требованию, что за счет излучения область неоднородности в лагранжевых координатах расширяется с временем.

Из (2.1) и (2.2) следует, что во внутренней области решение нужно искать в асимптотической форме

$$(2.4) \qquad r = t^{2k/d - \delta l} y_i(N), \quad v = t^{-k-\delta l} v_i(N)$$

$$p = t^{-2k} p_i(N), \quad \rho = t^{-\delta/\gamma} \rho_i(N)$$

$$h = t^{-2k+\delta/\gamma} h_i(N), \quad I = t^{-8k+4\delta/\gamma} I_i(N, \Omega)$$

В центре

$$(2.5) \qquad y_i(0) = v_i(0) = 0, \quad I_i(0, \Omega) = I_i(0, -\Omega)$$

Из требования сращивания внутреннего решения с внешним и (2.1), (2.4) следует:

$$y_i \to a_0 Y_{00}\left(\frac{d}{a_0{}^d}N\right)^l, \quad v_i \to \frac{4a_0V_{00}}{(2+d)(\gamma+1)}\left(\frac{d}{a_0{}^d}N\right)^l \tag{2.6}$$

$$p_i \to \frac{8a_0{}^2}{(2+d)^2(\gamma+1)}P_{00}, \quad \rho_i \to \frac{\gamma+1}{\gamma-1}R_{00}\left(\frac{d}{a_0{}^d}N\right)^{1/\gamma}$$

$$h_i \to \frac{8a_0{}^2\gamma}{(2+d)^2(\gamma+1)^2}H_{00}\left(\frac{d}{a_0{}^d}N\right)^{-1/\gamma} \quad \text{при } N\to\infty$$

Первое приближение уравнений (1.1) в переменных (2.2), (2.4) дает асимптотические уравнения в окрестности центра

$$p_i' = 0, \quad p_i = \frac{\gamma-1}{\gamma}\rho_i h_i \tag{2.7}$$

$$\rho_i y_i^{d-1} y_i' = 1 \tag{2.8}$$

$$v_i = \left(\frac{2}{2+d} - \delta\frac{\gamma-1}{\gamma d}\right)y_i + \left(\delta - \frac{2d}{2+d}\right)Ny_i' \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{2d}{2+d} - \delta\right)\left(N\frac{\rho_i'}{\rho_i} - \frac{1}{\gamma}\right) = \tag{2.10}$$

$$= 4t^{\delta_E}\frac{\gamma-1}{\gamma}\tau_0 p_i^{\alpha-1}\rho_i{}^\beta\left(\frac{1}{4}\int\limits_{4\pi} I_i\,d\Omega - \frac{p_i{}^4}{\rho_i{}^4}\right)$$

$$\delta_E = \left(\frac{2+3d}{2+d} - \frac{2d}{2+d}(\alpha+4)\right) - \frac{\delta}{\gamma}(\beta-4)$$

$$\mu\frac{\partial I_i}{\partial y_i} + \frac{d-1}{y_i}\left[\frac{5-d}{d+1}(1-\mu^2) - (3-d)\mu_1{}^2\right]\frac{\partial I_i}{\partial\mu} = \tag{2.11}$$

$$= t^{\delta_\tau}\tau_0 p_i{}^\alpha\rho_i{}^\beta\left(\frac{p_i{}^4}{\pi\rho_i{}^4} - I_i\right)$$

$$\delta_\tau = \frac{2d}{2+d}\left(\frac{1}{d} - \alpha\right) - \frac{\delta}{\gamma}\left(\beta + \frac{\gamma-1}{d}\right)$$

Штрихом обозначены производные по N.

Из уравнения движения (2.7) следует, что течение в окрестности центра изобарично. Давление определяется из условия сращивания (2.6)

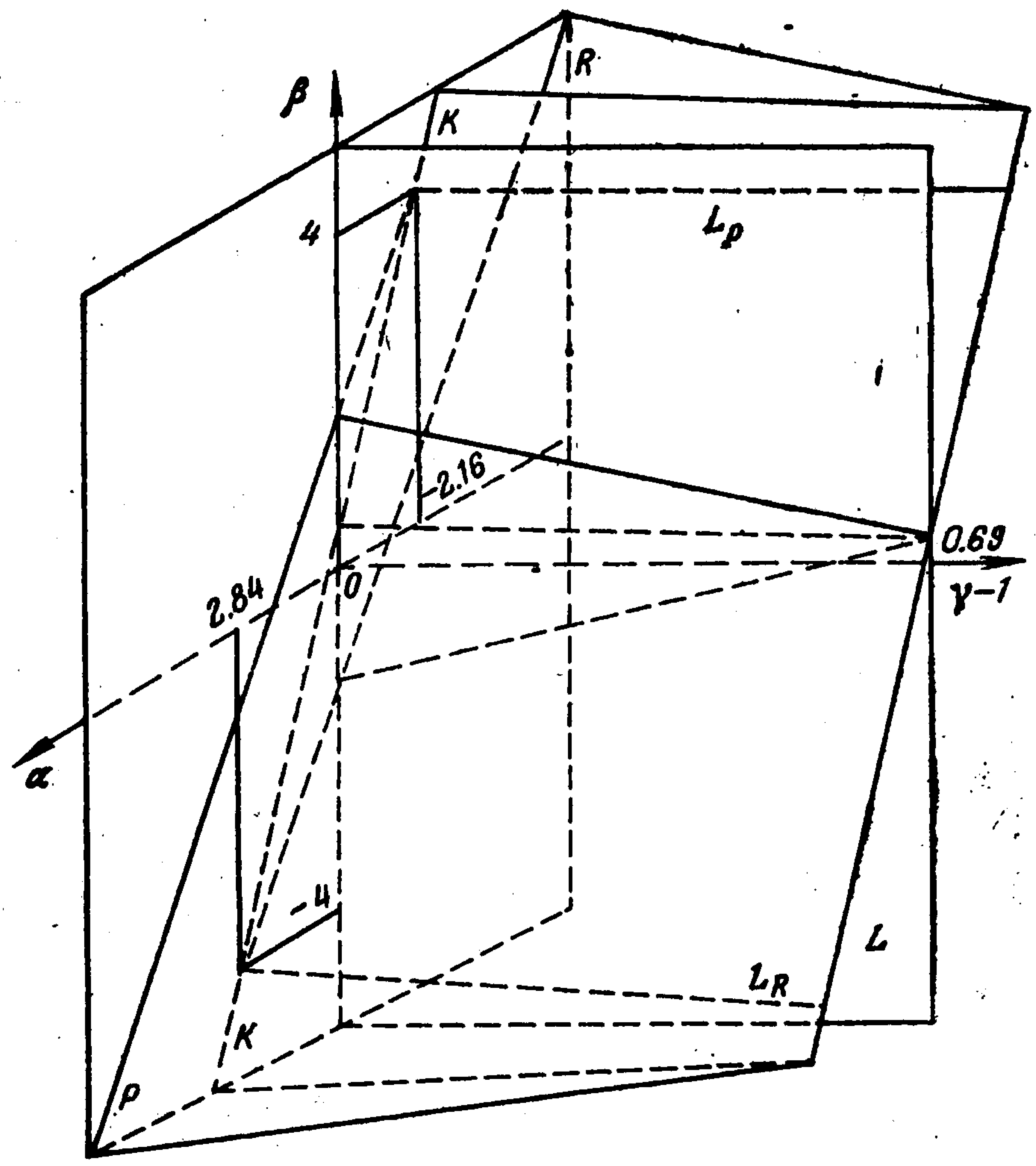
$$p_i = \frac{8a_0{}^2}{(2+d)^2(\gamma+1)}P_{00} \tag{2.12}$$

Наличие интеграла (2.12) сводит задачу к совместному решению уравнения энергии (2.10) с уравнением переноса (2.11) относительно функций ρ_i и I_i.

Если правое неравенство (2.3) не выполняется, то члены в правой части (2.10), описывающие поглощение и эмиссию тепла, изменяют свой смысл на противоположный, что физически бессодержательно.

3. Из уравнения переноса (2.11) следует, что для больших значений времени оптическая толщина неоднородности имеет порядок τ_0 при

$$\delta_\tau = 0 \tag{3.1}$$



Это кинетический режим переноса излучения. Правая часть уравнения энергии сохраняет вид (2.10). Величина области неоднородности

(3.2) $$\delta = \delta_K = \frac{2d}{2+d}\gamma\frac{1/d-\alpha}{\beta+(\gamma-1)/d}$$

найденная из (3.1), должна удовлетворять дополнительному условию

(3.3) $$\delta_E = 0$$

следующему из уравнения энергии (2.10). Равенство (3.3) вместе с (3.2) определяет в пространстве $\alpha\ \beta\ \gamma$ поверхность K — гиперболический параболоид

$$2\,\alpha\,(\gamma-1)\,d + 8\,\alpha\,d^2 + 5\,\beta\,d^2 + (5\,d-2)\,(\gamma-1) - 8\,d = 0$$

Неравенства (2.3) на δ_k приводят к дополнительному ограничению на показатель адиабаты

(3.4) $$\gamma < \gamma_{max} = 2\,(4\,d-1)\,/\,(5\,d-2)$$

Часть поверхности K, ограниченной плоскостью $\gamma = 1$ и прямой L, образованной пересечением K с плоскостью $\gamma = \gamma_{max}$, показана на фигуре для $d = 3$. Если

(3.5) $$\delta_\tau < 0$$

то оптическая толщина центра мала. Выделение лучистого тепла происходит в планковском режиме объемного высвечивания — P -режим. Первый член в правой части уравнения (2.10), описывающий поглощение, мал по сравнению со вторым членом, описывающим эмиссию фотонов.

Величина $\delta = \delta_P$ определяется из условия (3.3)

$$\delta_P = \frac{2d}{2+d}\frac{\gamma}{\beta-4}\left(\frac{2-5d}{2d}-\alpha\right) \tag{3.6}$$

В P-режиме уравнение энергии (2.10) отделяется от уравнения переноса (2.11). С учетом (3.6) оно имеет вид

$$\frac{1}{\gamma} - N\frac{\rho_i'}{\rho_i} = c_P\rho_i^{\beta-4} \tag{3.7}$$

$$c_P = 4\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{2d}{2+d}-\delta_P\right)^{-1}\tau_0 p_i^{\alpha+3}$$

Уравнение (3.7) с условием сращивания (2.6) на ρ_i имеет решением функцию

$$\rho_i = \left\{\gamma c_P + \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}R_{00}\left(\frac{d}{a_0{}^d}N\right)^{1/\gamma}\right]^{4-\beta}\right\}^{1/(4-\beta)} \tag{3.8}$$

если

$$\beta < \beta_P = 4 \tag{3.9}$$

Неравенства (2.3), (3.5) и (3.9) определяют область P-режима в пространстве $\alpha\ \beta\ \gamma$. Снизу она ограничена поверхностью K, а сверху — гиперболическим параболоидом P

$$\beta = \gamma\left(\frac{2-5d}{2d}-\alpha\right)+\beta_P$$

Поверхность P пересекает поверхность K по прямой L и прямой L_P : : $\beta = 4$, $\alpha = -(5\,d-2)\,/\,(2\,d)$. Если

$$\delta_\tau > 0 \tag{3.10}$$

то оптическая толщина центра велика. Перенос лучистой энергии происходит в росселандовом режиме лучистой теплопроводности — R-режим. Уравнение энергии (2.10) снова отделяется от уравнения переноса

$$\frac{1}{\gamma} - N\frac{\rho_i'}{\rho_i} = c_R t^{\delta_E-2\delta_\tau}\rho_i\,[y_i^{2(d-1)}\rho_i^{-4-\beta}\rho_i{}']' \tag{3.11}$$

$$c_R = \frac{16}{3}\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{1}{\tau_0}\left(\frac{2d}{2+d}-\delta_R\right)^{-1}p_i^{3-\alpha}$$

Величина

$$\delta = \delta_R = \frac{2d}{2+d}\,\gamma\,\frac{(2+5d)\,/\,(2d)-\alpha}{\beta+4+2\,(\gamma-1)\,/\,d} \tag{3.12}$$

определяется, согласно (3.11), из уравнения $\delta_E - 2\,\delta_\tau = 0$.

В R-режиме интенсивность излучения в первом приближении совпадает с ее равновесным значением. Поэтому в центре

$$\rho_i'(0) = 0 \tag{3.13}$$

Введем функцию $z = y_i{}^d$. Из уравнения неразрывности (2.8) следует:

$$\rho_i = d\,/\,z' \tag{3.14}$$

Подставляя (3.14) в (3.11) и интегрируя один раз с учетом (3.13), получим уравнение

$$(3.15)\qquad z^m z'^{\beta+2} z'' + A\left(Nz' - \frac{\gamma-1}{\gamma} z\right) = 0, \quad A = \frac{d^{2+\beta}}{c_R}, \quad m = \frac{2(d-1)}{d}$$

Граничные условия для (3.15) определяются (2.6) и равенством нулю геометрической координаты в центре

$$(3.16)\qquad N \to \infty : z \to a_0{}^d Y_{00}{}^d \, (da_0^{-d} N)^{(\gamma-1)/(\gamma)}$$

$$N = 0 : z = 0$$

Поведение (3.16) функции z при больших N формируется двумя последними членами уравнения (3.15). Поэтому при $N \to \infty$ необходимо потребовать, чтобы первый член уравнения (3.15) был мал на асимптотике (3.16). Это возможно при

$$(3.17)\qquad \beta > \beta_R = -4-2(\gamma-1)/d$$

Неравенства (2.3), (3.10) и (3.17) определяют область R-режима на фигуре. Эта область сверху ограничена поверхностью K, а снизу — гиперболическим параболоидом R

$$\beta = \beta_R + \gamma\left(\frac{2+5d}{2d} - \alpha\right)$$

Поверхность R пересекает поверхность K по прямой L и прямой $L_R : \beta = \beta_R$, $\alpha = (2+5d)/(2d)$.

При $\beta = -2$ уравнение (3.15) совпадает с уравнениями, полученными [1] при анализе аналогичного течения в неизлучающем газе, вязкость и теплопроводность которого линейно зависят от температуры.

Отметим еще раз, что кинетический, планковский и росселандов режимы реализуются только при достаточно малых значениях (3.4) показателя адиабаты.

4. Укажем точность полученных решений. Ошибку во внешнем решении можно оценить двумя способами. По первому способу оценивается точность, с которой уравнения (1.1) выполняются на решении Л. И. Седова. По второму — точность, с которой сохраняется энергия газа в возмущенном объеме с исключенной окрестностью центра. Баланс энергии необходимо принимать во внимание, так как использованное внешнее решение удовлетворяет закону сохранения полной энергии [1].

Оптическая толщина $\tau_0 p^\alpha \rho^\beta$ внешнего течения для больших значений времени пропорциональна $t^{-2\alpha d/(2+d)}$. При $\alpha > 0$ перенос излучения во внешней области происходит в P-режиме, при $\alpha = 0$ — в K-режиме, а при $\alpha < 0$ — в R-режиме. В первых двух случаях отношение правой части уравнения энергии (1.1) к левой имеет порядок $O(t^{-\chi_K})$, а в третьем, росселандовом режиме,— порядок $O(t^{-\chi_R})$, где

$$\chi_K = \frac{2d}{2+d}\left(\frac{5d-2}{2d} + \alpha\right) > 0, \quad \alpha \geqslant 0$$

$$\chi_R = \frac{2d}{2+d}\left(\frac{5d+2}{2d} - \alpha\right) > 0, \quad \alpha < 0$$

Ошибка в вычислении интеграла энергии имеет порядок $O(t^{-\delta(\gamma-1)/\gamma})$ [1].

Из фигуры видно, что при $\alpha \geqslant 0$ в окрестности центра возможен любой из трех режимов. Поэтому ошибка во внешнем решении при $\alpha \geqslant 0$ имеет порядок $O(t^{-\zeta_K})$, $\zeta_K = \min[\chi_K, \delta(\gamma - 1)/\gamma]$. Под δ понимается одно из выражений (3.2), (3.6) или (3.12) в зависимости от типа течения в окрестности центра. Аналогичная ошибка при $\alpha < 0$ имеет порядок $O(t^{-\zeta_R})$, $\zeta_R = \min[\chi_R, \delta(\gamma - 1)/\gamma]$, а δ равно δ_K, δ_P или δ_R, так как при $\alpha < 0$ в центре также возможен любой из трех режимов.

Обратимся к оценке ошибки при описании течения в окрестности центра. Асимптотические соотношения (2.1) имеют точность $O(n^{\zeta_i})$, $\zeta_i = (\gamma - 1)/(\gamma d)$. Поэтому формулы (2.4) имеют точность $O(t^{-\delta\zeta_i})$. Уравнение Эйлера (2.7) получено из (1.1) и (2.4) с точностью $O(t^{-\delta\zeta_E})$, $\zeta_E = (2\gamma + d - 2)/(\gamma d)$. В кинетическом режиме нет дальнейших упрощений. Поэтому уравнения (2.10), (2.11) описывают K-режим в окрестности центра с точностью $O(t^{-\lambda_K})$, $\lambda_K = \min(\delta_K\zeta_i, \zeta_E\delta_K)$.

В планковском режиме уравнение (3.7) аппроксимирует (2.10) с точностью $O(t^{\delta_\tau} \ln t^{-\delta_\tau})$. Поэтому решение (3.8) описывает это течение с точностью

$$O\{\min[t^{-\delta_P\zeta_i}, t^{-\delta_P\zeta_E}, t^{\delta_\tau(\delta_P)} \ln t^{-\delta_\tau(\delta_P)}]\}$$

В R-режиме редукция (2.10) к (3.11) совершается с ошибкой $O(t^{-2\delta_\tau})$. Результирующая ошибка, с которой задача (3.14) и (3.15) описывает такое течение, равна

$$O(t^{-\lambda_R}), \quad \lambda_R = \min[\delta_R\zeta_i, \ \delta_R\zeta_E, \ 2\,\delta_\tau(\delta_R)]$$

Поступила 19 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сычев В. В.* К теории сильного взрыва в теплопроводном газе. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
2. *Александров В. В.* Об одном классе автомодельных течений излучающего газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 4.