Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 518:519.3:62.50

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ, ПОДВЕРЖЕННОЙ СЛУЧАЙНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

А. С. Братусь

(Москва)

Предлагается метод приближенного решения уравнения Беллмана для задач оптимального управления конечным состоянием системы, содержащей гауссовский белый шум малой интенсивности. Рассматривается случай, когда детерминированное уравнение Беллмана, соответствующее системе без шума, имеет разрывы первого рода своих значений либо значений своих производных. Находятся необходимые и достаточные условия для совпадения синтеза оптимального управления системы, аддитивно содержащей гауссовский белый шум, и соответствующей детерминированной задачи. Доказываются оценки погрешности метода. Приводятся примеры.

Ранее автором [1] рассматривался аналогичный метод для узкого класса задач оптимального управления. В [2–4] изучались некоторые методы приближенного решения уравнения Беллмана в предположении, что детерминированное уранение Беллмана имеет достаточно гладкое решение. Некоторые точные решения и оценки получены в работе [5].

1. Постановка задачи. Уравнение Беллмана. Пусть уравнение, описывающее движение системы, имеет вид

$$dx / dt = a(t)u + \varepsilon b(t)\xi \tag{1.1}$$

Здесь $t \in [0, T]$ — вектор размерности n, u — вектор-функция управления размерности m $(m \leqslant n)$, принимающая значения в замкнутом выпуклом m-мерном множестве U, $u \in U$, ξ — вектор случайных возмущений размерности n, $a(t)$ — матрица размерности $n \times m$, $b(t)$ — невырожденная при всех $t \in [0, T]$ матрица размерностью $n \times n$, ε — малый параметр. Элементы матриц a и b предполагаются гладкими функциями своих аргументов.

В качестве вектора случайных возмущений рассматривается гауссовский белый шум единичной интенсивности.

Известно начальное положение $x(0) = x_0$, требуется построить способ управления, минимизирующего (или максимизирующего) математическое ожидание некоторой функции

$$J = \psi[x(t)] \tag{1.2}$$

в конечный момент времени $t = T$.

Предполагается, что функция $\psi(x)$ ограничена при всех значениях x.

Замечание. К задаче (1.1) приводятся заменой переменных задачи, в которых уравнение движения задается выражениями вида

$$dx/dt = A(t)\,x + a(t)\,u + \varepsilon b(t)\,\xi$$

Здесь $A(t)$ — матрица $n \times n$ с коэффициентами, гладко зависящими от $t \in [0, T]$; $a(t)$, $b(t)$, u, ξ, ε имеют тот же смысл, что и в уравнении (1.1).

Уравнение Беллмана задачи (1.1) имеет вид [2-5]

$$(1.3)\qquad S_\tau = \min_{u\in U}\Big\{\sum_{k=1}^{m} u_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik}S_{x_i}\Big\} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\,\mathrm{sp}\,(bb'S_{xx})$$

$$S(x, 0) = \psi(x) \qquad \Big(\mathrm{sp}\,(bb'S_{xx}) = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}^1 S_{x_i x_k}\Big)$$

Здесь $S(x, \tau)$ — функция Беллмана. $T - t = \tau$ — обратное время, индексы внизу у функции S означают взятие соответствующих частных производных, $a_{ik}\,(i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m)$ — элементы матрицы a.

В силу невырожденности матрицы b

$$\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}^1\lambda_i\lambda_k > 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0,\ t \in [0, T]$$

Таким образом, поставленная задача сводится к решению задачи Коши для уравнения параболического типа (1.3).

2. Регуляризация детерминированной задачи. Определение характеристических кривых детерминированного уравнения. Рассмотрим детерминированную задачу (1.1), т. е. задачу без случайных возмущений

$$(2.1)\qquad dx/dt = a(t)\,u, \quad t \in [0, T], \quad u \in U$$

Здесь a — та же матрица, что и в (1.1). Минимизируемый функционал в конечный момент времени имеет вид

$$(2.2)\qquad J^0 = \psi\,[x(T)]$$

Предположим, что известна функция S°, соответствующая детермированной задаче (2.1), (2.2). При этом

$$S^\circ(x,\tau) = \begin{cases} S^{\circ 1}(x,\tau), & A^\circ(x,\tau) \leqslant 0 \\ S^{\circ 2}(x,\tau), & A^\circ(x,\tau) > 0 \end{cases}$$

Здесь $A^\circ(x, \tau)$ — некоторая непрерывная функция своих аргументов. Функция $S^{\circ k}\,(k = 1, 2)$, непрерывные и трижды дифференцируемые вне множества $A^\circ = 0$, устроены таким образом, что функция S° терпит разрыв первого рода своих значений либо значений своих первых двух производных на поверхности $A^\circ = 0$. Ясно, что такой случай соответствует разрывной функции начальных значений $\psi(x)$. Далее полагаем, что функция S° ограничена при всех значениях x.

Выпишем формально уравнение Беллмана для детерминированной задачи

$$(2.3)\qquad S_\tau = \min_{u\in U}\Big\{\sum_{k=1}^{m} u_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik}S^\circ_{x_i}\Big\}, \quad S^\circ(x, 0) = \psi(x)$$

Краевую задачу (2.3) с разрывными начальными данными следует понимать в обобщенном смысле [6].

Для дальнейших построений существенную роль играет понятие характеристических кривых уравнения (2.3), которое в данном случае нуждается в дополнительных пояснениях. Из теории оптимального управления известно (см. [7], стр. 80), что при определенных ограничениях на гладкость функций S° характеристики детерминированного уравнения Беллмана являются оптимальными траекториями движения задачи (2.1), (2.2). Однако непосредственное применение принципа максимума к детерминированной задаче (2.1) невозможно ввиду разрывности функционала конечного значения (2.2), что приводит к неопределенности в выборе оптимального управления и оптимальных траекторий.

Пример 1. Поясним сказанное на примере

$$dx/dt = u + \xi, \qquad |u| \leqslant k$$

где x — скляр, ξ — гауссовский белый шум единичной интенсивности. Требуется построить такой способ управления, который максимизировал бы вероятность попадания на множество $[-1, 1]$.

Соответствующая детерминированная задача с $\xi = 0$ будет иметь функционал конечного состояния

$$J^\circ = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

который требуется максимизировать при $t = T$.

Можно убедиться, что область, из которой к моменту времени T можно достичь отрезка $[-1, 1]$, задается неравенством $|x| \leqslant k(T - t) + 1$.

Рассмотрим оптимальные траектории, которые проходят через точку $t = t_0$, $x = x_0$, находящуюся внутри области достижимости. Ясно, что попасть из точки (x_0, t_0) на отрезок $[-1,1]$ можно многими способами. Например, если точка (x_0, t_0) лежит внутри множества $|x| \leqslant k(T - t)$, можно, полагая $u = k$, достичь к моменту времени $t_1 = t_0 - x_0 / k$ множества $x = 0$ и затем положить $u = 0$. Можно, принимая $u = -k$, достичь к моменту времени $t_2 = {}^1/_2 t_0 - (x_0 - 1) / 2k$ множества $x = k(T - t) + 1$, а затем положить $u = k$ и т. д. Вне множества достижимости управление также не определено, так как любое возможное управление не изменяет значение функционала конечного значения (2.2).

Чтобы однозначно выделить синтез оптимального управления $u^\circ(x, t)$ и соответствующее поле оптимальных траекторий и тем самым определить характеристические кривые детерминированного уравнения Беллмана (2.3), проведем следующие дополнительные построения.

Следуя методу, изложенному в [1], рассмотрим функции

$$S^\mu(x, \tau) = (2\sqrt{\pi})^{-n} (\mu\tau)^{-n/2} \int S^\circ(\lambda, \tau) \exp\left[-\frac{|\lambda - x|^2}{4\mu\tau}\right] d\lambda \tag{2.4}$$

$$|\lambda - x| = \left[\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - x_j)^2\right]^{1/2}$$

Здесь μ — положительное число, $S^\circ(x, \tau)$ — функция Беллмана детерминированной задачи, интегрирование производится по всем значениям, $-\infty \leqslant \lambda_i \leqslant +\infty$, $i = 1, \ldots, n$.

Из свойств фундаментального решения уравнений параболического типа следует [8]: а) $S^\mu(x, \tau)$ — бесконечно дифференцируемая функция по x_i, $i = 1, \ldots, n$ при всех $\mu > 0$, б) $\lim\limits_{\mu \to 0} S^\mu(x, \tau) = S^\circ(x, \tau)$.

При каждом $\mu \to 0$ найдем $u^\mu \in U$, на котором достигается

$$\min_{u \in U} \left\{ \sum_{k=1}^{m} u_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} S_{x_i}^{\mu} \right\} = \sum_{k=1}^{m} u_k^{\mu} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} S_{x_i}^{\mu} \tag{2.5}$$

Построенному таким образом u^μ соответствует некоторое поле траекторий задачи (2.1), (2.2)

$$x = \zeta^\mu (t, y) \tag{2.6}$$

Здесь $\zeta^\mu (t, y)$ — вектор-функция, y — n-мерный вектор произвольных постоянных.

Чтобы применять предложенную выше процедуру в общем случае, необходимо ввести дополнительные предположения.

Положим $\mu = 1 / \nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, $u^\mu = u^{1/\nu}$.

Предположение 1. В каждой точке (x, t) выполняется условие (ρ — расстояние в m-мерном евклидовом пространстве)

$$\rho\, (u^{1/\nu},\ u^{1/\nu+1}) \to 0, \quad \nu \to \infty$$

Для каждой точки (x, t) в силу замкнутости и ограниченности множества U из теоремы Больцана — Вейерштрасса следует существование такой подпоследовательности ν_i, $i = 1, 2 \ldots$, что существует $\lim u^{1/\nu_i}$.

Из предположения 1 вытекает единственность этого предела

$$u^* = \lim_{i \to \infty} u^{1/\nu_i} \tag{2.7}$$

Далее необходимо отметить, что неоднозначность в выборе оптимального управления, как правило, имеет место не во всем множестве значений (x, t). Так, в рассмотренном ранее примере управление определяется однозначно на множестве $|x| = k\tau + 1$.

Пусть Ω_1 — множество значений (x, τ), при которых оптимальное управление u° определяется однозначно, Ω_2 — множество тех значений (x, τ), при которых выбор оптимального управления неоднозначен.

Предположение 2. Вектор u^*, определенный равенством (2.7) в Ω_2, совпадает на границе областей Ω_1 и Ω_2 с оптимальным управлением u°, однозначно определенным в Ω_1.

В результате сформулируем следующее определение.

Определение. Пусть выполняются условия предположений 1 и 2. Вектор u^*, определенный равенством (2.7), назовем синтезом оптимального управления задачи (2.1), (2.2) в области Ω_2, т. е.

$$u^* = u^\circ, \quad (x, t) \in \Omega_2$$

Уравнения

$$x = \zeta^\circ(t, y),\ y = (y_1,\ \ldots,\ y_n),\ y_i = \mathrm{const}$$

задающие соответствующие управлению u^* в Ω_2 и u° в Ω_1 поле траекторий, назовем оптимальным полем траекторий задачи (2.1), (2.2) и уравнениями характеристических кривых детерминированного уравнения Беллмана (2.3).

Проиллюстрируем сказанное задачей, описанной в примере 1. Функция S°, являющаяся решением детерминированной задачи, имеет вид

$$S^\circ(x, \tau) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant k\tau + 1 \\ 0, & |x| > k\tau + 1 \end{cases}$$

Построим функцию S^μ. Согласно (2.4), получим

$$S_x^{\ \mu} = (2\sqrt{\pi\tau\mu})^{-1} \exp\left[-\frac{(x + k\tau + 1)^2}{4\mu\tau}\right]\left\{1 - \exp\frac{x(k\tau + 1)}{\mu\tau}\right\}$$

Поэтому значение u^μ, $|u^\mu| \leqslant k$, дающее максимум форме $u^\mu \ S_x^{\ \mu}$, определяется равенством

$$u^\mu = u^\circ = \begin{cases} -k, & x \geqslant 0 \\ \ \ k, & x < 0 \end{cases}$$

Согласно определению, оптимальные траектории задачи, проходящие через точку (x_0, t_0), имеют вид

$$x - x_0 = k(\tau - \tau_0), \qquad x_0 \geqslant 0$$

$$x - x_0 = -k(\tau - \tau_0), \qquad x < 0, \ \tau_0 = T - t_0$$

Эти же кривые, по определению, являются характеристиками детерминированного уравнения Беллмана, проходящими через точку (x_0, τ_0).

3. Построение приближенного решения. Пусть найден синтез оптимального управления $u^\circ(x, t)$ и поле оптимальных траекторий

$$x = \zeta^\circ(t, y), \ y = (y_1, \ldots, y_n), \ y_i = \text{const} \tag{3.1}$$

детерминированной задачи (2.1), (2.2) и тем самым, согласно п. 2, определены характеристические кривые детерминированного уравнения Беллмана (2.3).

Предположим, что выполняется условие

$$\det \| \partial\zeta_j^\circ(t, y) / \partial y_i \| \neq 0$$

Тогда, разрешая систему (3.1) относительно y, получим

$$y = f(x, t), \ y = (y_1, \ldots, y_n), \ f = (f^1, \ldots, f^n)$$

Будем искать приближенное решение краевой задачи (1.3) как функцию от значения постоянных y_i, таких, что $y_i = f^i(x, t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, и значений t.

Решение детерминированного уравнения Беллмана (2.3) в новых переменных (y, τ) обозначим через $S^\circ(y)$. В силу определения характеристических кривых оптимальных траекторий детерминированной задачи (2.1), (2.2) эти кривые обладают тем свойством, что функция S° сохраняет вдоль них постоянное значение. Следовательно, поверхность разрыва $A^\circ(x, \tau) = 0$ обязательно является характеристической поверхностью детерминированного уравнения Беллмана и представляет собой одну из оптимальных траекторий задачи (2.1), (2.2). Действительно, в противном случае характеристические кривые пересекали бы поверхность $A^\circ = 0$ и функция S° имела бы скачок вдоль этих кривых, что противоречит определению характеристических кривых как оптимальных траекторий детерминированной задачи.

Не умаляя общности, можно считать, что поверхность разрыва $A^\circ = 0$ соответствует значениям постоянных $y_i = 0$ ($i = 1, \ldots, m$), $m \leqslant n$. Из сказанного ясно, что решение детерминированной задачи можно записать в виде

$$S^\circ(y) = \begin{cases} S^{\circ 1}(y), & y_i \leqslant 0 \quad (i=1,\ldots,m) \\ S^{\circ 2}(y), & y_i > 0 \quad (i=1,\ldots,m) \end{cases} \tag{3.2}$$

Положим в (1.3) управление u равным u°-оптимальному управлению детерминированной задачи (2.1), (2.2). Соответствующее решение задачи (1.3) с управлением $u = u^\circ$ обозначим через $W^\circ(y, \tau)$.

Искомая функция W° удовлетворяет уравнению (1.3) с $u = u^\circ$, если

$$W_\tau^\circ + \sum_{j=1}^n W_{y_j}^\circ \frac{\partial y_j}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^m u_k^\circ \sum_{i=1}^k a_{ik} \sum_{j=1}^n W_{y_j}^\circ \frac{\partial y_j}{\partial x_i} + \tag{3.3}$$
$$+ \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sum_{i,k=1}^n b_{ik}^1 \left[\sum_{j,s=1}^n \left(W_{y_j y_s}^\circ \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial y_s}{\partial x_k} + W_{y_j}^\circ \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_k} \right) \right]$$

Из определения характеристик детерминированного уравнения (1.3) следует, что

$$\frac{\partial y_j}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^m u_0{}^k \sum_{i=1}^n a_{ik} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{3.4}$$

Замечание. Поверхность $y = f(x, t)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $f = (f^1, \ldots, f^n)$, как показывают простые примеры, может иметь конические точки. Значения производной $\partial y_j / \partial x_i$ в конической точке доопределяются здесь и далее таким образом, чтобы выполнялось тождество (3.4).

Рассмотрим теперь группу переменных $y_1, \ldots, y_m (m \leqslant n)$, которые определяют в (3.2) поверхность разрыва функции S°, и введем новые переменные $z_j = y_j / \varepsilon$, $j = 1, \ldots, m$. Остальные переменные $y' = (y_{m+1}, \ldots, y_n)$ оставим без изменения.

Ищем приближенное решение уравнения (3.3) в виде

$$W^\circ = w^\circ + \varepsilon w^1 + O(\varepsilon^2) \tag{3.5}$$

Подставляя W°, представленную в виде (3.5), в уравнение (3.3) и учитывая соотношения (3.4), получим, что функция w° должна удовлетворять краевой задаче

$$w_\tau^\circ = \frac{1}{2} \sum_{j,s=1}^m c_{js} w_{z_j z_s}^\circ, \quad w^\circ(z, y', \tau)|_{\tau=0} = \psi(z, y')|_{\tau=0} \tag{3.6}$$
$$c_{js} = \sum_{i,k=1}^n b_{ik}^1(\tau) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial y_s}{\partial x_k}$$

Далее будем предполагать, что c_{js} ($j, s = 1, \ldots, m$) — функции переменных $y' = (y_{m+1}, \ldots y_n)$, τ. Функция w^1 должна быть выбрана так, чтобы выполнялось равенство

$$\omega_\tau^1 = \frac{1}{2} \sum_{j,s=1}^m c_{js} w_{z_j z_s}^1 + G(z, y', \tau; w^\circ), w^1(z, y', \tau)|_{\tau=0} = 0 \tag{3.7}$$

Здесь

$$G(z, y', \tau; w^\circ) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=m+1}^{n}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}^1 \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial y_s}{\partial x_k} \overset{\bullet}{w}_{z_j y_s} + \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_k} \overset{\circ}{w}_{z_j}\right)$$

Предположим, что выполняется условие

$$\sum_{j,s=1}^{m} c_{js}(y', \tau)\lambda_j\lambda_s > 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq 0$$

Тогда исходная задача сводится к решению двух краевых задач для уравнений параболического типа порядка m, причем число m определяется тем количеством переменных $y_i (i = 1, \ldots, m)$, которые необходимы, чтобы задать поверхность разрыва решения S° детерминированного уравнения Беллмана.

Решения краевых задач (3.6), (3.7) выписываются явно [8]. Рассмотрим матрицу с элементами

$$e_{js} = \int_0^\tau c_{js}(y', \lambda)\, d\lambda$$

Обозначим через $e^{is}(y', \tau)$ элементы матрицы, обратной по отношению к $\| e_{js} \|$, через $E(y', \tau)$ — определитель матрицы $\| e_{js} \|$.

В переменных z, y', τ решение детерминированного уравнения Беллмана имеет вид $S^\circ(y) = S^\circ(\varepsilon z, y')$.

Используя это, решение задачи (3.6) можно записать в виде

$$w^\circ = \int S^\circ(\varepsilon\lambda, y')\, p(\lambda - z, y', \tau)\, d\lambda \tag{3.8}$$

$$p(\lambda - z, y', \tau) = (2\pi)^{-m/2} | E |^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j,s=1}^{m} e^{js}(\lambda_j - z_j)(\lambda_s - z_s)\right]$$

Интегрирование в (3.8) производится по всем значениям $\lambda = (\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_m)$

Решение краевой задачи (3.7) задается формулой

$$w^1 = \int_0^\tau\int G(\lambda, y', \tau^1; w^\circ)\, p(\lambda - z, y', \tau - \tau^1)\, d\lambda d\tau^1$$

Замечание. Для решения краевых задач (3.6), (3.7) в случае, когда коэффициенты c_{js} — функции переменных $z = (z_1, \ldots, z_m)$, применяется метод построения фундаментального решения, предложенный Леви [8]. В результате краевая задача сводится к решению интегрального уравнения второго рода, которое может быть получено методом последовательных приближений.

Следующее утверждение дает представление о структуре приближенного решения $W^{\circ,\varepsilon} = w^\circ + \varepsilon w^1$.

Утверждение 1. Пусть функция $S^\circ(y)$ трижды непрерывно дифференцируема вне поверхности разрыва $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ и $\tau \in [0, T]$ существует такая окрестность $\Omega_{\varepsilon,\tau}$ поверхности разрыва функции S°, вне которой справедливы неравенства

$$| w^\circ - S^\circ | \leqslant K\varepsilon, \quad | w_{y_i}{}^\circ - S_{y_i}{}^\circ | \leqslant k'\varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$K, K' = \mathrm{const}$$

Доказательство утверждения 1 опирается на известные свойства фундаментальных решений уравнений параболического типа [8,9].

Следствие. Вне множества $\Omega_{\varepsilon,\tau}$ в качестве функции w° можно рассматривать функцию S°, являющуюся решением детерминированного уравнения Беллмана.

4. Оценка погрешности приближенного решения $W^{\circ,\varepsilon} = w^\circ + \varepsilon w^1$. Необходимые и достаточные условия совпадения синтеза оптимального управления для системы аддитивно содержащей белый шум, и соответствующей детерминированной системы. Обозначим через $u^{1,\varepsilon} \in U$ управление, дающее минимум форме

$$\min_{u\in U}\left\{\sum_{k=1}^{m} u_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} W^{0,\varepsilon}_{x_i}\right\} = \sum_{k=1}^{m} u_k^{1,\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} W^{0,\varepsilon}_{x_i} \tag{4.1}$$

Здесь $W^{\circ,\varepsilon} = w^\circ + \varepsilon w^1$ — приближенное решение уравнения Беллмана (1.3) с управлением $u = u^\circ$, соответствующим оптимальному детерминированной задачи.

Введем обозначения

$$H(u, \cdot) = \sum_{k=1}^{m} u_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot)$$

$$L(\cdot) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}^1 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial \tau}(\cdot)$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 2. Пусть дважды дифференцируемая ограниченная функция $W^{\circ,\varepsilon}$ удовлетворяет уравнению

$$H(u^\circ, W^{\circ,\varepsilon}) + L(W^{\circ,\varepsilon}) = \alpha^\varepsilon(x, \tau), \quad W^{\circ,\varepsilon}(x, 0) = \psi(x) \tag{4.2}$$

$$(k^\varepsilon \leqslant \alpha^\varepsilon(x, \tau) \leqslant K^\varepsilon, \ k^\varepsilon, \ K^\varepsilon = \mathrm{const})$$

и пусть

$$u^{1,\varepsilon} - u^\circ = \beta^\varepsilon(x, \tau), \quad \beta^\varepsilon = (\beta_1^\varepsilon, \ldots, \beta_m^\varepsilon) \tag{4.3}$$

($u^{1,\varepsilon}$ — управление, определенное равенством (4.1), u° — оптимальное управление детерминированной задачи (2.1), (2.2)). Тогда справедливы неравенства

$$H(\beta^\varepsilon, W^{\circ,\varepsilon}) \leqslant 0 \tag{4.4}$$

$$\tau(k^\varepsilon + C^\varepsilon) \leqslant S - W^{\circ,\varepsilon} \leqslant \tau K^\varepsilon \tag{4.5}$$

Здесь S — решение уравнения Беллмана (1.3), C^ε — постоянная, такая, что

$$H(\beta^\varepsilon, W^{\circ,\varepsilon}) \geqslant C^\varepsilon$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство (4.4). Так как $H(u^{1,\varepsilon}, W^{\circ,\varepsilon}) \leqslant H(u^\circ, W^{\circ,\varepsilon})$, то в силу линейности формы H по u получим

$$H(u^{1,\varepsilon} - u^\circ, W^{\circ,\varepsilon}) = H(\beta^\varepsilon, W^{\circ,\varepsilon}) \leqslant 0$$

Запишем уравнение (3.1) в виде

$$H(u^*, S) + L(S) = 0, \quad S(x, 0) = \psi(x)$$

Здесь u^* — оптимальное управление задачи (1.1).

Так как $H(u^*, S) \leqslant H(u^\circ, S)$, то выполняется неравенство $H(u^\circ, S) + L(S) \geqslant 0$. Вычитая это неравенство из (4.2), получим, что

$$H(u^\circ, W^{\circ,\varepsilon} - S) + L(W^{\circ,\varepsilon} - S) \leqslant \alpha^\varepsilon(x, \tau), (W^{\circ,\varepsilon} - S)\,|_{\tau=0} = 0$$

Рассмотрим функцию $Z = W^{0,\varepsilon} - S + K^\varepsilon\tau$. Для нее справедливо неравенство

$$H(u^\circ, Z) + L(Z) \leqslant \alpha^\varepsilon(x, \tau) - K^\varepsilon \leqslant 0, \quad |Z|_{\tau=0} = 0$$

Используя принцип максимума для параболических уравнений в неограниченной области [9], получим, что $Z \geqslant 0$.

Отсюда следует, что

$$S - W^{\circ,\varepsilon} \leqslant K^\varepsilon\tau \tag{4.6}$$

С другой стороны

$$H(u^*, W^{\circ,\varepsilon}) \geqslant H(u^{1,\varepsilon}, W^{\circ,\varepsilon})$$

Здесь $u^{1,\varepsilon}$ — управление, определенное равенством (4.1). Из равенства (4.3) вытекает неравенство

$$H(u^*, W^{\circ,\varepsilon}) - H(\beta^\varepsilon, W^{\circ,\varepsilon}) \geqslant H(u^\circ, W^{\circ,\varepsilon})$$

Поэтому из (4.2) следует неравенство

$$H(u^*, W^{\circ,\varepsilon}) + L(W^{\circ,\varepsilon}) \geqslant \alpha^\varepsilon(x, \tau) + H(\beta^\varepsilon, W^{\circ,\varepsilon})$$

Справедливо неравенство

$$H(u^*, Z^1) + L(Z^1) \leqslant k^\varepsilon + C^\varepsilon - H(\beta^\varepsilon, W^{\circ,\varepsilon}) - \alpha^\varepsilon(x, \tau) \leqslant 0$$

$$Z^1\,|_{\tau=0} = 0, \quad Z^1 = S - W^{\circ,\varepsilon} - (k^\varepsilon + C^\varepsilon)\,\tau$$

Еще раз применяя принцип максимума для параболических уравнений, получим

$$S - W^{\circ,\varepsilon} \geqslant (k^\varepsilon + C^\varepsilon)\,\tau$$

Отсюда и из (4.6) следует требуемая оценка (4.5).

Замечание. Результат теоремы 2 остается справедливым и для систем более общего вида

$$dx/dt = a(x, t)\,u + c(x, t) + b(x, t)\,\xi$$

При этом предполагается, что элементы матриц a, b и c — ограниченные функции. Функционал конечного значения J может расти при $|x| \to \infty$ не быстрее, чем функция $\exp[d(r^2 + 1)]$, где d — некоторая положительная постоянная, $r = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Последние условия диктуются требованиями теоремы 9 из работы [9], на которую опирается доказательство теоремы 2.

Следствие 1. Пусть вектор-функция $\beta^\varepsilon(x, \tau)$ такая, что $0 \geqslant H(\beta^\varepsilon, W^{\circ,\varepsilon}) \geqslant C\varepsilon^2, C = \text{const}$. Тогда справедлива оценка

$$|S - W^{\circ,\varepsilon}| \leqslant K'\varepsilon^2, \quad K' = \text{const}. \tag{4.7}$$

Действительно, функция $W^{\circ,\varepsilon}$ по построению удовлетворяет уравнению (3.3) с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$, поэтому $|\alpha^\varepsilon(x, \tau)| \leqslant K\varepsilon^2$, $K = \text{const}$. Тогда оценка (4.7) выполнится с постоянной $K' = (K + |C|)T$.

Следствие 2. (Необходимые и достаточные условия совпадения синтеза оптимального управления для систем, аддитивно содержащих гауссовский белый шум, и соответствующих детерминированных систем.) Оптимальное управление u° детерминированной задачи (2.1) с функционалом (1.2) тождественно совпадает с оптимальным управлением возмущенной задачи (1.1) с тем же функционалом (1.2), если

$$u^\circ = u^1 \tag{4.8}$$

Здесь $u^1 \in U$ — управление, дающее минимум форме

$$\min_{u\in U} H(u, W^\circ) = H(u^1, W^\circ) \tag{4.9}$$

W° — решение краевой задачи (3.3)

$$H(u^\circ, W^\circ) + L(W^\circ) = 0, \ W^\circ(x, 0) = \psi(x)$$

u° — оптимальное управление детермированной задачи (2.1).

Доказательство. Необходимость. Пусть u^* — оптимальное управление возмущенной задачи (1.1) с функционалом (1.2), такое, что $u^* = u^\circ$. Тогда функция Беллмана S, являющаяся решением краевой задачи (1.3), тождественно равна функции W°, являющейся решением задачи (3.3). Следовательно, управление u^1, определенное равенством (4.9), таково, что $u^1 = u^*$. Отсюда и следует, что $u^\circ = u^1$.

Достаточность. Пусть справедливо (4.8). Применяя результат теоремы 2 с $\alpha^\varepsilon = 0$, $\beta^\varepsilon = 0$, получим, что $S = W^\circ$. Здесь S — решение краевой задачи (1.3). Поэтому управление u^1, определенное равенством (4.9), тождественно совпадает с оптимальным управлением задачи (1.1), т. е. $u^1 = u^*$. Следовательно, в силу (4.8) $u^* = u^\circ$. Что и требовалось доказать.

Следствие 3. Пусть $u^\circ \neq u^1$. Рассмотрим решение уравнения Беллмана (1.3) с управлением u^1, т. е.

$$H(u^1, W^1) + L(W^1) = 0, \ W^1(x, 0) = \psi(x)$$

Далее, по функции W^1 найдем так же, как и в (4.9), управление u^2 и т. д., [10]. Если на некотором k-м шаге $u^k = u^{k+1}$, то последнее равенство является необходимым и достаточным условием для того, чтобы $u^* = u^k$. Здесь u^* — оптимальное управление исходной задачи (1.1).

Пример 2. Рассмотрим систему

$$d^2x/dt^2 = u + \varepsilon\zeta, \quad x = (x_1, x_2), \quad t \in [0, T]$$

$$u = (u_1, u_2), \quad |u_1| \leqslant k_1, \quad |u_2| \leqslant k_2$$

($\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ — вектор независимых гауссовских белых шумов единичной интенсивности). Требуется построить способ управления, максимизирующий вероятность попадания в момент $t = T$ на множество $|x_1| + |x_2| \leqslant 1$.

Введем новые переменные $y_k = (T - t)\dot{x}_k + x_k$, $k = 1, 2$. Заметим, что $x_k(T) = y_k(T)$, $k = 1, 2$. Исходные уравнения примут вид

$$dy/dt = (T - t)(u + \varepsilon\zeta), \quad y = (y_1, y_2), \quad u = (u_1, u_2), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$$

Функция Беллмана детерминированной задачи является простым индикатором множества достижимости, принимая значения

$$S^\circ = \begin{cases} 1, & \| y_1 | - k_1\tau^2/2 | + | | y_2 | - k_2\tau^2/2 | \leqslant 1 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Построим в соответствии с (2.4) функцию S^μ. Из результатов п. 2 следует, что оптимальное управление детерминированной задачи определяется формулой

$$u_i^\circ = \begin{cases} -k_i, & y_i \geqslant 0 \\ k_i, & y_i < 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

Оптимальные траектории, являющиеся характеристиками детерминированного уравнения Беллмана, имеют вид

$$\eta_i = | y_i | - k_i\tau^2 / 2 \quad (i = 1,\ 2)$$

Введем новые переменные $z_i = \eta_i / \varepsilon$, τ $(i = 1,\ 2)$.

Функция w° в соответствии с (3.6) удовлетворяет краевой задаче

$$w_\tau^\circ = \frac{1}{2}\tau^2\Delta w^\circ, \quad w^\circ\Big|_{\tau=0} = \begin{cases} 1, & | z_1 | + | z_2 | \leqslant \varepsilon^{-1} \\ 0, & | z_1 | + | z_2 | > \varepsilon^{-1} \end{cases}$$

Функция w^1, как следует из (3.7), такая, что

$$w_\tau^1 = \frac{1}{2}\tau^2\Delta w^1, \quad w^1\Big|_{\tau=0} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}.$$

Из единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности следует, что $w^1 = 0$.

Заметим, что производные от функций η_1, η_2 по переменным y_1, y_2 в точках $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ понимаются в том смысле, как это указано в п. 3.

Функция w° в соответствии с (3.8) имеет вид

$$w^\circ = (\pi\tau^3\varepsilon^2)^{-1} \iint\limits_{|\lambda_1|+|\lambda_2|\leqslant 1} \exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\left[\frac{(\lambda_2 - \eta_1)^2 + (\eta_2 - \lambda_2)^2}{\tau^6}\right]\right\} d\lambda_1 d\lambda_2$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что управление u^1, определенное формулой (4.1), такое, что выполняется предположение (4.8), а именно $u^\circ = u^1$. Из теоремы 2 следует, что последняя формула дает приближенное решение уравнения Беллмана исходной задачи с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

Автор благодарен Ф. Л. Черноусько за постоянное внимание и полезные беседы.

Поступила 15 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Братусь А. С.* Приближенное решение уравнения Беллмана для одного класса задач оптимального управления конечным состоянием. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
2. *Колмановский В. Б., Черноусько Ф. Л.* Оптимальное управление при неполной информации. Тр. 4-й зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам, вып. 1. М., 1971.
3. *Соляник А. И., Черноусько Ф. Л.* Приближенный метод синтеза оптимального управления системой, подверженной случайным возмущениям. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
4. *Fleming W. H.* Stochastic control for small noise intensities. SIAM J. Control., 1971, vol. 9, No. 3.
5. *Мошков Е. М.* О точности оптимального управления конечным состоянием. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
6. *Олейник О. А.* Разрывные решения нелинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 3.
7. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
8. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М., «Наука», 1964.
9. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи матем. наук, 1962, т. 27, вып. 3.
10. *Fleming W. H.* Some Markovian optimisation problems. J. Math. Mech., 1963, vol. 12, No. 1.