Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 62—50

ЗАДАЧИ КОНФЛИКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А. Ф. Клейменов

(Свердловск)

Развивается вспомогательная программная конструкция, доставляющая способ построения разрешающих стратегий в линейной дифференциальной игре сближения—уклонения. Выясняются соотношения между различными способами построения разрещающих стратегий.

1. Рассматривается конфликтно-управляемая система, описываемая уравнением

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + C(t)v \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор; u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков, стесненные ограничениями

$$u \in P, \quad v \in Q \tag{1.2}$$

где P и Q — выпуклые компакты; $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ — матрицы с непрерывными по t элементами.

Стратегии игроков и движения, ими порождаемые, определяются в соответствии с [1,2].

Пусть заданы замкнутое множество M_1 в пространстве $\{x\}$, начальная позиция $\{t_0, x_0\}$ и момент $t = \vartheta$ ($\vartheta > t_0$). Первый игрок ставит задачу нахождения стратегии $U^\circ \div u^\circ(t, x)$, обеспечивающей равенство

$$\max_{x[t]} \rho(x[\vartheta, t_0, x_0, U^\circ], M_1) = \min_{U} \max_{x[t]} \rho(x[\vartheta, t_0, x_0, U], M_1) \tag{1.3}$$

второй игрок ставит задачу нахождения стратегии $V^\circ \div v^\circ(t, x)$, такой, что

$$\min_{x[t]} \rho(x[\vartheta, t_0, x_0, V^\circ], M_1) = \max_{V} \min_{x[t]} \rho(x[\vartheta, t_0, x_0, V], M_1) \tag{1.4}$$

Через $\rho(x[\vartheta], M_1)$ обозначено евклидово расстояние от точки $x[\vartheta]$ до множества M_1.

Если задача сближения разрешима, то существует предельно широкий u-стабильный мост [1], связывающий начальную позицию с множеством M_1; обратно, если задача уклонения разрешима, то существует v-стабильный мост [1], проходящий через начальную позицию и минующий множество M_1. С другой стороны, если удается построить u-стабильный (v-стабильный) мост, связывающий начальную позицию с множеством M_1 (минующий множество M_1), то стратегия U_c (V_c), экстремальная к этому мосту, решает задачу сближения (уклонения).

Существуют различные способы построения стабильных мостов (и разрешающих стратегий) на базе программных конструкций [2-6]. В работе развивается одна такая конструкция и устанавливаются связи между различными конструкциями.

2. Рассмотрим следующие построения, которые модифицируют конструкции из [3]. Назовем верхней подпрограммой второго игрока произвольную функцию $\mathbf{V}(t, \mathbf{u})$, которая совокупности $\{t, \mathbf{u}\}$ ($\mathbf{u} \in P$) ставит в соответствие множество $\mathbf{V}(t, \mathbf{u}) \subset Q$.

Разобьем отрезок $[t_0, \vartheta]$ полуинтервалами $[\tau_i, \tau_{i+1})$ ($i = 0, 1, 2, \ldots; \tau_0 = t_0$) и определим ломаную Эйлера $\mathbf{x}_\Delta^\pi[t] = \mathbf{x}_\Delta^\pi[t, t_0, x_0, \mathbf{u}[\cdot], \mathbf{V}(\cdot, \mathbf{u})]$ как абсолютно непрерывное решение уравнения

$$(2.1) \qquad \frac{d\mathbf{x}_\Delta^\pi[t]}{dt} = A(t)\mathbf{x}_\Delta^\pi[t] + B(\tau_i)\mathbf{u}[\tau_i] + C(\tau_i)\mathbf{v}(\tau_i, \mathbf{u}[\tau_i])$$

$$(\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}), \quad \mathbf{v}(\tau_i, \mathbf{u}[\tau_i]) \in \mathbf{V}(\tau_i, \mathbf{u}[\tau_i]))$$

с начальным условием $\mathbf{x}_\Delta^\pi[t_0] = x_0$, причем в качестве реализаций $\mathbf{u}[t] \in P$ будем брать кусочно-постоянные функции, считая, что точки разрыва этих функций совпадают с τ_i.

Назовем движением $\mathbf{x}^\pi[t] = \mathbf{x}^\pi[t, t_0, x_0, \mathbf{V}(\cdot, \mathbf{u})]$ системы (1.1) всякий предел подходящей последовательности ломаных Эйлера $\{\mathbf{x}_\Delta^{\pi(k)}[t, t_0, x_0^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}[\cdot], \mathbf{V}(\cdot, \mathbf{u}^{(k)})]\}$ при $k \to \infty$, $\lim_{k\to\infty} \sup_i(\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}) = 0$, $\lim_{k\to\infty} x_0^{(k)} = x_0$.

Множество всех движений, порождаемых верхней подпрограммой $\mathbf{V}(t, \mathbf{u})$, будет компактом в $C_{[t_0, \vartheta]}$.

Будем называть верхней программой второго игрока $\Pi(t, \mathbf{u})$ всякую последовательность $\{\mathbf{V}^{(i)}(t, \mathbf{u})\}$ ($i = 1, 2, \ldots$).

Пусть задана некоторая верхняя программа второго игрока $\Pi(t, \mathbf{u}) = \{\mathbf{V}^{(i)}(t, \mathbf{u})\}$; для подпрограмм $\mathbf{V}^{(i)}(t, \mathbf{u})$ ($i = 1, 2, \ldots$) построим множества всех порождаемых ими движений. Из каждого множества возьмем произвольно по одному движению и составим последовательность

$$(2.2) \qquad \mathbf{x}^{\pi(1)}[t], \ \mathbf{x}^{\pi(2)}[t], \ \ldots, \ \mathbf{x}^{\pi(k)}[t], \ldots$$

где $\mathbf{x}^{\pi(j)}[t]$ — движение из множества, порожденного $\mathbf{V}^{(j)}(t, \mathbf{u})$. Из последовательности (2.2) равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пределы всевозможных таким образом построенных подпоследовательностей образуют пучок $\Gamma(\Pi)$. Движения, составляющие пучок $\Gamma(\Pi)$, будем обозначать через $\mathbf{x}(t, \Gamma(\Pi))$.

Можно показать, что пучок $\Gamma(\Pi)$ — компакт в $C_{[t_0, \vartheta]}$ и он является v-стабильным множеством, т. е. для любой позиции $\{t_*, \mathbf{x}_*\} \in \Gamma(\Pi)$, любого t^* ($t_* < t^* \leqslant \vartheta$) и произвольного постоянного $\mathbf{u}^* \in P$ можно указать по крайней мере одно решение дифференциального уравнения в контингенциях

$$(2.3) \qquad d\mathbf{x} / dt \in A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}^* + C(t)Q$$

удовлетворяющее условию $\{t^*, \mathbf{x}(t^*)\} \in \Gamma(\Pi)$.

Доказательство основано на следующих двух основных фактах. Во-первых, существует последовательность движений $\{\mathbf{x}^{\pi(i)}[t]\}$ системы (1.1), порожденных верхними подпрограммами $\mathbf{V}^{(i)}(t, \mathbf{u})$, равномерно сходящаяся к некоторому движению из пучка $\Gamma(\Pi)$, проходящему через точку $\{t_*, \mathbf{x}_*\}$, и такая, что векторная последовательность

$\{x^{\pi(i)}[t_*]\}$ сходится к x^*. Во-вторых, равномерный предел сходящейся подпоследовательности ломаных Эйлера системы (1.1), построенных при $u[t] = u^*$, $t \in [t_*, t^*]$ и произвольных верхних подпрограммах второго игрока, есть решение уравнения в контингенциях (2.3).

Будем полагать множество M_1 выпуклым и конечным. Обозначим через M_1^R R-окрестность M_1. Определим замкнутое множество $M_2 = \{x : x \in E_n \setminus M_1^R\}$, где число R будем считать настолько большим, что расстояние $\rho(x[\vartheta], M_2)$ от точки $x[\vartheta]$ до множества M_2 для любого движения $x[t]$ системы (1.1) будет больше нуля. Тогда для любой точки $p \in \{x : x \in M_1^R \setminus M_1\}$ существует единственная прямая, проходящая через точку p, и такая, что $\rho(p, M_1) + \rho(p, M_2) = R$.

Очевидно, среди верхних программ найдется такая программа $\Pi_0(t, u) = \{V_0^{(i)}(t, u)\}$, что

$$(2.4)\qquad \lim_{i\to\infty} \max_{x^{\pi(i)}[t]} \rho(x^{\pi(i)}[\vartheta], M_2) = \inf_{V(t,u)} \max_{x^{\pi}[t]} \rho(x^{\pi}[\vartheta], M_2)$$

где через $x^{\pi(i)}[t]$ обозначено движение, соответствующее подпрограмме $V_0^{(i)}(t, u)$.

Можно также проверить, что справедливо равенство

$$(2.5)\qquad \min_{\Pi(t,u)} \max_{x(t,\Gamma(\Pi))} \rho(x(\vartheta, \Gamma(\Pi)), M_2) = \inf_{V(t,u)} \max_{x^{\pi}[t]} \rho(x^{\pi}[\vartheta], M_2)$$

где $\Gamma(\Pi_0)$ — пучок, соответствующий верхней программе $\Pi_0(t, u)$.

Задача 2.1. Найти минимизирующую верхнюю программу $\Pi_0(t, u)$ и в пучке $\{x(t, \Gamma(\Pi_0))\}$, порождаемом ею, найти такую кривую $x^\circ(t, \Gamma(\Pi_0))$, что

$$(2.6)\qquad \rho(x^\circ(\vartheta, \Gamma(\Pi_0)), M_2) = \min_{\Pi(t,u)} \max_{x(t,\Gamma(\Pi))} \rho(x(\vartheta), \Gamma(\Pi)), M_2) = \varepsilon_1(\vartheta, t_0, x_0, M_2)$$

Задача 2.2. Найти максимизирующую верхнюю программу $\Pi^\circ(t, u)$ и в пучке $\{x(t, \Gamma(\Pi^\circ))\}$ найти кривую $x^\circ(t, \Gamma(\Pi^\circ))$, такую, что

$$(2.7)\qquad \rho(x^\circ(\vartheta, \Gamma(\Pi^\circ)), M_1) = \max_{\Pi(t,u)} \min_{x(t,\Gamma(\Pi))} \rho(x(\vartheta, \Gamma(\Pi)), M_1) = \varepsilon_2(\vartheta, t_0, x_0, M_1)$$

Из предыдущего следует, что существует по крайней мере одно решение задачи 2.1.

Справедливо утверждение. Если программа Π_0 и кривая $x^\circ(t, \Gamma(\Pi_0))$ доставляют решение задачи 2.1, то они доставляют также решение задачи 2.2. Обратно, если пара $\{\Pi^\circ, x^\circ(t, \Gamma(\Pi^\circ))\}$ доставляет решение задачи 2.2 и если при этом $\varepsilon_2^{(1)} > 0$, то эта пара доставляет также решение задачи 2. 1, причем

$$(2.8)\qquad \varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_2^{(1)} = R$$

Здесь и далее введено обозначение $\varepsilon_j^{(i)} = \varepsilon_j(\vartheta, t_0, x_0, M_i)$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2, \ldots$

В случае невыпуклого множества M_1 решения задач 2.1 и 2.2 могут не совпадать.

Пучок $\Gamma(\Pi_0)$, где Π_0 доставляет решение задачи 2.1, есть v-стабильное множество. Следовательно [1], стратегия $V_1 \div v_1(t, x)$, экстремальная к этому множеству, обеспечивает выполнение неравенства

$$(2.9) \qquad \rho(\mathbf{x}[\vartheta, t_0, x_0, V_1], M_2) \leqslant \varepsilon_1^{(2)}$$

как бы ни действовал первый игрок.

3. Перейдем к построению стабильных множеств с помощью программной экстремальной конструкции [2].

Будем понимать под программными управлениями любые измеримые функции $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, удовлетворяющие включениям (1.2). Программное движение $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot))$ определяется как абсолютно непрерывное решение уравнения

$$(3.1) \qquad d\mathbf{x} / dt = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}(t) + C(t)\mathbf{v}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Задача 3.1. Найти максиминные программные управления $\mathbf{u}^\circ(t)$, $\mathbf{v}^\circ(t)$, удовлетворяющие условию

$$(3.2) \qquad \rho(\mathbf{x}(\vartheta, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}^\circ(\cdot), \mathbf{v}^\circ(\cdot)), M_1) = \max_{\mathbf{v}(t)} \min_{\mathbf{u}(t)} \rho(\mathbf{x}(\vartheta, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot)), M_1) = \varepsilon_3^{(1)}$$

Задача 3.1 имеет по крайней мере одно решение при всяком выборе начальной позиции (см., например, [2]).

Обозначим через $S(t_0, x_0)$ множество всех векторов $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t_0)$, являющихся решениями задачи Коши

$$(3.3) \qquad d\mathbf{s}/dt = -A'(t)\mathbf{s}, \quad \mathbf{s}(\vartheta) = \left[\frac{\partial\rho(\mathbf{x}, M_1)}{\partial\mathbf{x}}\right]_{\{\vartheta, \mathbf{x}^\circ(\vartheta)\}}$$

и отвечающих всем возможным оптимальным решениям $\mathbf{x}^\circ(t)$ задачи 3.1.

Условие 3.1. Какова бы ни была начальная позиция $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$ при всяком выборе вектора $\mathbf{v}^* \in Q$ найдется такой вектор $\mathbf{u}^* \in P$, что для всех $\mathbf{s} \in S(t_0, x_0)$

$$(3.4) \qquad \mathbf{s}'(B(t)\mathbf{u}^* + C(t)\mathbf{v}^*) \leqslant \max_{\mathbf{v}\in Q} \min_{\mathbf{u}\in P} \mathbf{s}'(B(t)\mathbf{u} + C(t)\mathbf{v})$$

Задачу 3.1 будем называть регулярной, если выполнено условие 3.1. Если задача 3.1 регулярна, то множество

$$W_u = \{t, \mathbf{x} : t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \ \varepsilon_3^{(1)} \leqslant c\}$$

является u-стабильным мостом [6] и, следовательно, стратегия $U_1 \div \mathbf{u}_1(t, x)$, экстремальная к множеству W_u, обеспечивает выполнение неравенства

$$(3.5) \qquad \rho(\mathbf{x}[\vartheta, t_0, x_0, U_1], M_1) \leqslant \varepsilon_3^{(1)}$$

При сделанных выше предположениях справедливо равенство

$$(3.6) \qquad \varepsilon_2^{(1)} = \varepsilon_3^{(1)}$$

Действительно, из неравенств (2.9) и (3.5) с учетом соотношения (2.8) вытекает, что

(3.7) $$\varepsilon_3^{(1)} \geqslant \varepsilon_2^{(1)}$$

Покажем, что имеет место обратное неравенство

(3.8) $$\varepsilon_3^{(1)} \leqslant \varepsilon_2^{(1)}$$

Пусть измеримые функции $\mathbf{u}^\circ(t)$ и $\mathbf{v}^\circ(t)$ доставляют решение задачи 3.1. Соответствующее движение $\mathbf{x}^\circ(t) = \mathbf{x}(t,\ t_0,\ x_0,\ \mathbf{u}^\circ(\cdot),\ \mathbf{v}^\circ(\cdot))$ представляется формулой Коши

(3.9) $$\mathbf{x}^\circ(t) = X(t, t_0)\,\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)\,B(\tau)\,\mathbf{u}^\circ(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)\,C(\tau)\,\mathbf{v}^\circ(\tau)\,d\tau$$

где $X(t,\ t_0)$ — фундаментальная матрица решений уравнения $\mathbf{x}^\cdot = A(t)\,\mathbf{x}$.

По теореме Лузина [7] для любого $\delta > 0$ измеримую функцию $\mathbf{v}^\circ(t)$ можно аппроксимировать на $[t_0,\ \vartheta]$ непрерывной функцией $\mathbf{v}^*(t)$, так, что для произвольного $\mathbf{u}_*(t) \in \in P$

(3.10) $$\rho(\mathbf{x}(\vartheta,\ t_0,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{u}_*(\cdot),\ \mathbf{v}^*(\cdot)),\ M_1) \geqslant \rho(\mathbf{x}(\vartheta\ t_0,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{u}_*(\cdot),\ \mathbf{v}^\circ(\cdot)),\ M_1) - \delta \geqslant \varepsilon_3^{(1)} - \delta$$

Выберем функцию $\mathbf{v}^*(t)$ в качестве верхней подпрограммы $\mathbf{V}(t,\ u) = \mathbf{v}^*(t)$ и среди движений, порожденных ею, найдем ближайшее к множеству M_1 в момент $t = \vartheta$. Это движение является пределом последовательности ломаных Эйлера, соответствующей последовательности кусочно-постоянных реализаций $\{\mathbf{u}^{(k)}[t]\}$. Выбрав из последовательности $\{\mathbf{u}^{(k)}[t]\}$ слабо сходящуюся подпоследовательность $\{\mathbf{u}^{(k_j)}[t]\}$, обозначим ее слабый предел через $\mathbf{u}^*[t]$. Предельное движение $\mathbf{x}^\pi[t] = \mathbf{x}^\pi[t,\ t_0,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{v}^*(\cdot)]$ представляется формулой

(3.11) $$\mathbf{x}^\pi[t] = X(t, t_0)\,\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)\,B(\tau)\,\mathbf{u}^*[\tau]\,d\tau + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)\,C(\tau)\,\mathbf{v}^*(\tau)\,d\tau$$

причем второй интеграл есть интеграл Римана. Таким образом, программное движение $\mathbf{x}(t,\ t_0,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{u}^*(\cdot),\ \mathbf{v}^*(\cdot))$ можно трактовать как движение, порожденное верхней программой $\mathbf{V}(t,\ \mathbf{u}) = \mathbf{v}^*(t)$ и слабо сходящейся к $\mathbf{u}^*(t)$ последовательностью реализаций $\{\mathbf{u}^{(k_j)}[t]\}$. Поэтому

(3.12) $$\rho(\mathbf{x}(\vartheta,\ t_0,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{u}^*(\cdot),\ \mathbf{v}^*(\cdot)),\ M_1) = \min_{\mathbf{x}^\pi[t]} \rho(\mathbf{x}^\pi[\vartheta,\ t_0,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{v}^*(\cdot)],\ M_1) \leqslant \varepsilon_2^{(1)}$$

Сопоставляя (3.10) и (3.12) и учитывая, что δ может выбираться сколь угодно малым, приходим к неравенству (3.8). Из (3.7) и (3.8) следует (3.6).

4. Обсудим связь построений из п. 2 с построениями априори стабильных мостов в виде интегральных многообразий, порожденных уравнениями в контингенциях [2, 6], которые в формализации из [2] отвечают прямому методу [4, 5].

Определим множество

(4.1) $$G(t) = \bigcap_{\mathbf{u}\in P} (B(t)\,\mathbf{u} + C(t)\,Q)$$

и предположим, что оно непусто. Рассмотрим уравнение в контингенциях

(4.2) $$\mathbf{x}^\cdot \in A(t)\,\mathbf{x} + G(t)$$

Все решения $\mathbf{x} = \varphi(t)$ уравнения (4.2) обладают тем свойством, что дорожка $\{t,\ \mathbf{x} = \varphi(t)\}$ является v-стабильной. Совокупность всех решений уравнения (4.2) образует интегральное многообразие Φ, которое будет компактом.

Задача 4.1. Найти движение $x_\varphi^\circ(t) = x_\varphi^\circ(t, t_0, x_0)$ из многообразия Φ, удовлетворяющее условию

$$\rho(x_\varphi^\circ(\vartheta, t_0, x_0), M_2) = \min_{x_\varphi \in \Phi} \rho(x_\varphi(\vartheta, t_0, x_0), M_2) = \varepsilon_4^{(2)} \tag{4.3}$$

Покажем, что при некотором дополнительном условии выполняется равенство

$$\varepsilon_4^{(2)} = \varepsilon_1^{(2)} \tag{4.4}$$

Пусть минимум в (4.3) достигается на функции $x_\varphi^\circ(t) \in \Phi$, удовлетворяющей уравнению

$$x_\varphi^{\cdot\circ} = A(t)\, x_\varphi^\circ + g^\circ(t) \tag{4.5}$$

где $g^\circ(t) \in G(t)$. Из определения множества $G(t)$ следует, что $g^\circ(t) \in B(t)\, u^*[t] + C(t)\, Q$ при любом $u^*[t] \in P$.

Согласно теореме Лузина [7], измеримую функцию $g^\circ(t)$ аппроксимируем на $[t_0, \vartheta]$ непрерывной функцией $g^*(t)$, отличающейся от $g^\circ(t)$ на множестве достаточно малой меры.

Зададим функцию $v(\tau_i, u_i)$ при $t_0 \leqslant \tau_i \leqslant \vartheta$, $u_i \in P$ (u_i — const) соотношением

$$g^*(\tau_i) = B(\tau_i)\, u_i + C(\tau_i)\, v(\tau_i, u_i) \tag{4.6}$$

Априори известно, что по крайней мере одно решение системы (4.6) существует. Обозначим это решение через $v^*(\tau_i, u_i)$ и составим уравнение

$$\frac{dx_\Delta[t]}{dt} = A(t)\, x_\Delta[t] + B(\tau_i)\, u[\tau_i] + C(\tau_i)\, v^*(\tau_i, u[\tau_i]) \tag{4.7}$$

где $u[t]$ — кусочно-постоянная функция, точки разрыва которой совпадают с τ_i. Решение $x_\Delta[t]$ уравнения (4.7) можно интерпретировать как ломаную Эйлера, порожденную верхней подпограммой $V(t, u) = v^*(t, u)$. При подходящем выборе $v^*(t, u)$, движение, порожденное этой верхней подпрограммой, будет сколь угодно мало отличаться от движения $x_\varphi^\circ(t)$. Поэтому

$$\varepsilon_1^{(2)} \leqslant \varepsilon_4^{(2)} \tag{4.8}$$

Будем говорить, что задача 4.1 регулярна, если функция

$$\varkappa_1(l) = -\max_{u \in P} l' B(t)\, u - \min_{v \in Q} l' C(t)\, v \tag{4.9}$$

выпукла по l. В этом случае в распоряжении первого игрока есть стратегия $U_2 \div u_2(t, x)$, обеспечивающая ему результат [6]

$$\rho(x[\vartheta, t_0, x_0, U_2], M_2) \geqslant \varepsilon_4^{(2)} \tag{4.10}$$

как бы ни действовал второй игрок.

Сопоставляя (2.9) и (4.10), приходим к выводу, что

$$\varepsilon_4^{(2)} \leqslant \varepsilon_1^{(2)} \tag{4.11}$$

Из (4.11) и (4.8) следует (4.4).

Определим множества

$$(4.12)\qquad H(t)=\bigcap_{\mathbf{v}\in Q}(B(t)P+C(t)\mathbf{v})$$

и будем предполагать, что они непусты. Тогда решения $x=\psi(t)$ уравнения

$$(4.13)\qquad \mathbf{x}^{\cdot}\in A(t)\,\mathbf{x}+H(t)$$

обладают тем свойством, что всякая дорожка $\{t,\ \mathbf{x}=\varphi(t)\}$ $(t_0\leqslant t\leqslant\vartheta)$ является u-стабильной. Совокупность всех решений уравнения (4.13) образует интегральное многообразие Ψ, являющееся компактом.

Задача 4.2. Найти движение $\mathbf{x}_\psi{}^0(t)=\mathbf{x}_\psi{}^0(t,\ t_0,\ \mathbf{x}_0)$ из многообразия Ψ, удовлетворяющее условию

$$(4.14)\qquad \rho(\mathbf{x}_\psi{}^0(\vartheta,\ t_0,\ \mathbf{x}_0),\ M_1)=\min_{\mathbf{x}_\psi\in\Psi}\rho(\mathbf{x}(\vartheta,\ t_0,\ \mathbf{x}_0),\ M_1)=\varepsilon_5{}^{(1)}$$

Из u-стабильности дорожки $\{t,\ \mathbf{x}_\psi{}^0(t)\}$ следует, что существует стратегия $\mathbf{U}_3\div\mathbf{u}_3(t,\ \mathbf{x})$, обеспечивающая выполнение неравенства

$$(4.15)\qquad \rho(\mathbf{x}[\vartheta,\ t_0,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{U}_3],\ M_1)\leqslant\varepsilon_5{}^{(1)}$$

как бы ни действовал второй игрок.

Сопоставляя (4.15) с (2.9) и (3.8), получим

$$(4.16)\qquad \varepsilon_5{}^{(1)}\geqslant\varepsilon_2{}^{(1)}\geqslant\varepsilon_3{}^{(1)}$$

Будем говорить, что задача 4.2 регулярна, если функция

$$(4.17)\qquad \varkappa_2(\mathbf{l})=-\min_{\mathbf{u}\in P}\mathbf{l}'B(t)\,\mathbf{u}-\max_{\mathbf{v}\in Q}\mathbf{l}'C(t)\,\mathbf{v}$$

выпукла по $\mathbf{l}$. В этом случае найдется стратегия $\mathbf{V}_2\div\mathbf{v}_2(t,\ \mathbf{x})$, обеспечивающая результат

$$\rho(\mathbf{x}[\vartheta,\ t_0,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{V}_2],\ M_1)\geqslant\varepsilon_5{}^{(1)}$$

как бы ни действовал первый игрок.

Покажем, что если задача 4.2 регулярна, то выполняется равенство

$$(4.18)\qquad \varepsilon_3{}^{(1)}=\varepsilon_5{}^{(1)}$$

Действительно, выпишем явные выражения для величин $\varepsilon_3{}^{(1)}$ и $\varepsilon_5{}^{(1)}$ (см., например, [8])

$$(4.19)\qquad \varepsilon_3^{(1)}=\max_{\|\mathbf{l}\|=1}\Big(\int_{t_0}^{\vartheta}\max_{\mathbf{v}\in Q}\min_{\mathbf{u}\in P}\mathbf{l}'X(\vartheta,\tau)\,[B(\tau)\,\mathbf{u}+$$
$$+C(\tau)\,\mathbf{v}]\,d\tau+\mathbf{l}'X(\vartheta,t_0)-\rho_{M_1}(\mathbf{l})\Big)\quad\text{при}\quad \varepsilon_3^{(1)}>0$$

$$\varepsilon_5^{(1)}=\max_{\|\mathbf{l}\|=1}\Big(\int_{t_0}^{\vartheta}\min_{\mathbf{h}^*\in H^*}l'X(\vartheta,t)\,\mathbf{h}^*(t)\,dt+$$
$$+l'X(\vartheta,t_0)\,\mathbf{x}_0-\rho_{M_1}(\mathbf{l})\Big)\quad\text{при}\quad \varepsilon_5^{(1)}>0$$

$$H^*(t)=\{\mathbf{h}^*:\mathbf{s}'\mathbf{h}^*\geqslant\max_{\mathbf{v}\in Q}\min_{\mathbf{u}\in P}\mathbf{s}'[B(t)\,\mathbf{u}+C(t)\,\mathbf{v}]=-\varkappa_2(\mathbf{s})\}$$

Здесь $X(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений уравнения $\mathbf{x}^\cdot = A(t)\mathbf{x}$; $\rho_{M_1}(\mathbf{l})$ — опорная функция множества — M_1.

Функция $\varkappa_2(\mathbf{s})$ по предположению выпукла, поэтому при любом $\mathbf{s}$ найдется вектор $\mathbf{h}^*(\mathbf{s})$, такой, что выполняется равенство [9]

$$(4.20)\qquad \mathbf{s}'\mathbf{h}^*(\mathbf{s}) = \max_{\mathbf{v}\in Q} \min_{\mathbf{u}\in P} \mathbf{s}'[B(t)\mathbf{u} + C(t)\mathbf{v}]$$

Из (4.19) и (4.20) следует (4.18). Учитывая (4.16), имеем также в этом случае $\varepsilon_5^{(1)} = \varepsilon_2^{(1)}$.

5. Обсудим вопрос о связи между регулярностью задачи 4.1 и регулярностью задачи 3.1.

Пусть множество $G(t)$ (4.1) непусто и функция $\varkappa_1(\mathbf{l})$ выпукла по $\mathbf{l}$. Это означает, что при всяком выборе вектора $\mathbf{v} \in Q$ множество

$$(5.1)\qquad F_u(t, \mathbf{v}) = B(t)P + C(t)\mathbf{v}$$

пересекается с $G(t)$. Вектор $\mathbf{g}(t)$ содержится в $G(t)$ тогда и только тогда, когда при всяком выборе вектора $\mathbf{l}$ справедливо неравенство

$$(5.2)\qquad \mathbf{l}'\mathbf{g} \geqslant \max_{\mathbf{u}\in P} \min_{\mathbf{v}\in Q} \mathbf{l}'(B(t)\mathbf{u} + C(t)\mathbf{v})$$

Но это означает, что выполняется условие 3.1. В самом деле, для любого вектора $\mathbf{v}^* \in Q$ в множестве $F_u(t, v^*)$ найдется вектор $g^* = B(t)u^* + C(t)v^*$, удовлетворяющий неравенству

$$(5.3)\qquad \mathbf{l}'(B(t)\mathbf{u}^* + C(t)\mathbf{v}^*) \geqslant \max_{\mathbf{u}\in P} \min_{\mathbf{v}\in Q} \mathbf{l}'(B(t)\mathbf{u} + C(t)\mathbf{v})$$

при всех $\mathbf{l}$. В частности, если $\mathbf{l} = -\mathbf{s}(t_0)$, где $\mathbf{s}(t_0) \in S(t_0, \mathbf{x}_0)$ (см. (3.3)), то из (5.3) следует неравенство (3.4), т. е. условие 3.1 выполняется.

Таким образом, если задача 4.1 регулярна, то будет регулярной и задача 3.1.

Основные выводы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть задана дифференциальная игра сближения — уклонения (1.4), (1.5); множество M_1 выпукло и замкнуто, $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$ — начальная позиция. Тогда:

1°. Если задача 3.1 регулярна, то пара стратегий $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1\}$, определенная условиями (3.5), (2.9), образует седловую точку игры; при этом $\varepsilon_3^{(1)} = \varepsilon_2^{(1)}$.

2°. Если задача 4.1 регулярна, то пара стратегий $\{\mathbf{U}_2, \mathbf{V}_1\}$, определенная условиями (4.10) и (2.9), образует седловую точку игры; при этом $R - \varepsilon_4^{(2)} = \varepsilon_2^{(1)}$.

3°. Если задача 4.1 регулярна, то задача 3.1 также регулярна и $R - \varepsilon_4^{(2)} = \varepsilon_3^{(1)} = \varepsilon_2^{(1)} = R - \varepsilon_1^{(2)}$.

4°. Если задача 4.2 регулярна, то $\varepsilon_5^{(1)} = \varepsilon_2^{(1)} = \varepsilon_3^{(1)}$.

6. Приведем иллюстрирующий пример для системы

$$(6.1)\qquad y_1^\cdot = y_3,\quad y_2^\cdot = y_4,\quad y_3^\cdot = u_1,\quad y_4^\cdot = u_2,\quad z_1^\cdot = v_1,\quad z_2^\cdot = v_2$$

$$\|\mathbf{u}\| = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} \leqslant \mu,\qquad \|\mathbf{v}\| = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2} \leqslant \nu$$

рассмотренной с другой целью и другим путем в [10]. Заданы начальный момент t_0 и момент окончания игры ϑ, причем $t_0 < \vartheta - \nu/\mu$. Пусть первый игрок минимизирует расстояние от множества $M = [\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}: (y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 \leqslant R^2]$. Имеем

$$x_k^{\cdot} = u_k(\vartheta - t) - v_k, \qquad k = 1,\ 2 \tag{6.2}$$

в новых переменных $x_k = y_k - z_k + y_{k+2}(\vartheta - t)$, $k = 1, 2$. При этом $M = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leqslant R\}$. Тогда согласно (3.2) и (4.19)

$$\varepsilon_3 = \max_{\|\mathbf{l}\|=1} [\mathbf{l}'\mathbf{x}_* - r(t_*, \vartheta, \mathbf{l})], \quad \mathbf{l} = \{l_1, l_2\}' \tag{6.3}$$
$$r(t_*, \vartheta, \mathbf{l}) = (l_1^2 + l_2^2)^{1/2}(1/2\mu(\vartheta - t_*)^2 - \nu(\vartheta - t_*) + R)$$

Для регулярности задачи 3.1 достаточно, чтобы функция $r(t_*, \vartheta, \mathbf{l})$ была выпуклой по $\mathbf{l}$. Это дает условие

$$R \geqslant \max_{t_* \in [t_0, \vartheta]} [\nu(\vartheta - t_*) - 1/2\mu(\vartheta - t_*)^2] = 1/2\nu^2/\mu$$

Таким образом, при $R = 1/2\,\nu^2/\mu$ задача 3.1 будет регулярной. Следовательно, будет существовать стратегия первого игрока, обеспечивающая сближение с множеством M (при $R = 1/2\,\nu^2/\mu$), если только начальная позиция $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$ удовлетворяет условию $\varepsilon_3 \leqslant 0$, или

$$\|\mathbf{x}_0\| \leqslant 1/2\mu(\vartheta - t_0 - \nu/\mu)^2 \tag{6.4}$$

С другой стороны, множество $G(t)$ (4.1) будет здесь пустым при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta - \nu/\mu$ и, следовательно, постановка задачи 4.1 теряет тогда смысл.

Множества $H(t)$ (4.12) при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta - \nu/\mu$ будут кругами радиуса $\mu(\vartheta - t - \nu/\mu)$, а при $\vartheta - \nu/\mu < t \leqslant \vartheta$ $H(t)$ будут пусты. Рассмотрим вспомогательную систему

$$x_k^{\cdot *} = u_k(\vartheta - t) - v_k + f(t)\,u_k, \quad k = 1,\ 2 \tag{6.5}$$
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leqslant t < \vartheta - \nu/\mu \\ t - \vartheta + \nu/\mu, & \vartheta - \nu/\mu \leqslant t \leqslant \vartheta \end{cases}$$

Множества $H^*(t)$ (4.12) для (6.5) при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta - \nu/\mu$ будут кругами радиуса $\mu(\vartheta - t - \nu/\mu)$, а при $\vartheta - \nu/\mu < t \leqslant \vartheta$ каждое из них состоит из единственной точки $\{0, 0\}$.

Среди решений уравнения

$$\mathbf{x}^{\cdot *} = \mathbf{h}^*(t), \qquad \mathbf{h}^*(t) \in H^*(t) \tag{6.6}$$

с начальными условиями (6.4) найдется решение $\mathbf{x}^* = \mathbf{w}^*(t)$, такое, что $\mathbf{w}^*(\vartheta) = 0$. Если же начальные условия не удовлетворяют (6.4), то такого решения уравнения (6.6) не существует. Дорожка $\{t, \mathbf{w}^*(t)\}$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ по построению u-стабильна, поэтому существует стратегия первого игрока, приводящая движение системы (6.5) из начальной позиции (6.4) в начало координат.

Имеет место оценка $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| \leqslant 1/2\ \nu^2/\mu$, где $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}^*(t)$ — решения систем (6.2), (6.5) соответственно с одними и теми же начальными условиями. Отсюда следует, что существует стратегия первого игрока, приводящая в момент ϑ движение системы (6.2) с начальными условиями (6.4) на множество M $(R = 1/2\ \nu^2/\mu)$, т. е. имеем тот же вывод, что и полученный выше с использованием экстремальной конструкции.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за постановку задачи и ценные советы.

Поступила 27 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. I. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2.
2. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 3.
3. *Красовский Н. Н.* Программные конструкции для позиционных дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1973, т. 21, № 6.
4. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
5. *Мищенко Е. Ф.* Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 5.
6. *Тарлинский С. И.* Об одной позиционной задаче наведения. Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 1.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.
8. *Красовский Н. Н.* Программное поглощение в дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 2.
9. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.
10. *Пашков А. Г.* Об одной игре сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.