Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 62—50

ЗАДАЧА О ПРИВЕДЕНИИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПОЛНЫЕ ИМПУЛЬСЫ УПРАВЛЯЮЩИХ СИЛ

С. Т. Завалищин, В. В. Ушаков

(Свердловск)

Рассматривается задача о приведении траекторий конфликтно управляемой линейной стационарной системы в заданную окрестность положения равновесия. Действия противников стеснены ограничениями на величины полных импульсов управляющих сил. Такие ограничения допускают скачкообразные перемещения по направлениям, могущим прошивать целевое множество. Обсуждаемая задача с помощью обобщенного импульсного исчисления сводится к вспомогательной, разрешимой методами [1]. Полученная импульсная экстремальная конструкция зависит от начальной позиции и допускает скачкообразные движения в режиме скольжения. Заинтересованной в приведении стороне в общем случае необходимо знать к моменту принятия решения реализовавшуюся часть траектории.

В п. 1 рассматривается задача сближения двух материальных точек переменной массы, в п. 2 — задача о приведении для многомерной конфликтно управляемой стационарной системы с неособой матрицей.

1. Сближение двух материальных точек. Пусть x — расстояние между точками, перемещающимися по прямой под действием реактивных сил. Процесс сближения может быть описан уравнением Мещерского

$$x^{\cdot\cdot} = u - v; \quad u = -c_1 \frac{m_1^{\cdot}}{m_1}, \quad v = -c_2 \frac{m_2^{\cdot}}{m_2} \tag{1.1}$$

В (1.1) m_i — масса i-й точки ($i = 1,2$), c_i — относительная скорость истечения реактивной массы.

Пусть t_0 — начало временного отсчета. Предположим, что величина массы $\Delta m_i(t)$ стеснена ограничением

$$|\Delta m_i(t)| \leqslant \Delta m_i, \quad t_0 \leqslant t \tag{1.2}$$
$$\Delta m_i(t) = m_i(t) - m_i(t_0); \quad \Delta m_i(t) = 0, \quad t < t_0$$

Ниже считается, что управляющие воздействия u, v подчинены соответственно первому и второму игрокам. Пусть t_0 и θ ($t_0 < \theta$) — моменты начала и конца игры. Цель первого игрока — осуществить в момент θ неравенство

$$x^2 + x^{\cdot 2} \leqslant \varepsilon^2 \tag{1.3}$$

Задача второго игрока — препятствовать этому.

Формализуем эту задачу в терминах теории дифференциальных игр. Для этого необходимо выяснить структуру ограничений, накладываемых постановкой задачи на управления u, v. Обозначим текущее значение полного импульса управляющей силы u через $\mu(t)$. Тогда

$$\mu(t) = \int_{t_0}^{t} u\,d\tau = c_1 \ln \frac{m_1(t_0)}{m_1(t)} \approx -c_1 \frac{\Delta m_1(t)}{m_1(t_0)}, \quad \Delta m_1 \ll m_1(t_0)$$

Отсюда и из (1.2) вытекает оценка

$$(1.4) \qquad |\mu(t)| \leqslant \mu_0, \quad \mu_0 = c_1 \frac{\Delta m_1}{m_1(t_0)}$$

Аналогично выводится оценка

$$(1.5) \qquad |\nu(t)| \leqslant \nu_0, \quad \nu_0 = c_2 \frac{\Delta m_2}{m_2(t_0)}$$

в которой $\nu(t)$ — текущее значение полного импульса управляющей силы v.

Таким образом, ограничения (1.2) на реактивные массы эквивалентны ограничениям на импульсы соответствующих реактивных сил.

Далее определим допустимые стратегии игроков [1]. Сначала оговорим класс допустимых стратегий М формирования полного импульса $\mu(t)$ управляющего воздействия u. Будем считать, что стратегия М сопоставляет каждой позиции $(t, x), x = (x, x^\cdot)^T$ множество $\mathrm{M}(t, x)$ отрезка (1.4). При этом предполагается, что множества $\mathrm{M}(t, x)$ замкнуты и выпуклы по x и полунепрерывны сверху по включениям при изменении (t, x). Допустимые стратегии N формирования полного импульса $\nu(t)$ определяются аналогично.

Локально суммируемый во времени полный импульс $\mu(t)$ ($\nu(t)$), порождаемый стратегией М (соответственно, стратегией N), позволяет определить управляющее воздействие

$$(1.6) \qquad u = \mu^\cdot \quad (v = \nu^\cdot)$$

Итак, можно сформулировать задачу.

Задача A_1. Дана исходная позиция (t_0, x_0). Требуется найти стратегию $\mathrm{M}^{(H)}$, которая при всяком выборе допустимой стратегии N обеспечивает вывод точки $x(t, t_0, x_0, \mathrm{M}^{(H)}, \mathrm{N})$ на множество (1.3) в момент θ.

Перейдем к построению вспомогательной задачи о приведении. Для целей данной работы окажется достаточным обобщенное импульсное исчисление первого порядка [2]. В таком исчислении оригинал z разлагается в интеграл

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^\cdot(t-\lambda)\, z^*(\lambda)\, d\lambda$$

по сдвигам диполя $\delta^\cdot$ (здесь интегрирование понимается в смысле [2]). Изображение z^* можно получить свертыванием [3] оригинала с функцией Хевисайда $\chi(t - t_0)$, равной нулю при $t < t_0$ и единице при $t_0 < t$.

Запишем уравнение (1.1) в виде системы

$$(1.7) \qquad x_1^\cdot = x_2 + x_{10}\,\delta(t-t_0), \quad x_2^\cdot = u - v + x_{20}\delta(t-t_0)$$
$$x_1 = x, \ x_2 = x^\cdot, \quad x_{10} = x(t_0), \quad x_{20} = x^\cdot(t_0)$$

где δ — импульс Дирака, вызывающий движение системы (1.7) с выписанными начальными условиями.

При $t_0 \leqslant t$ определим сдвиг

(1.8) $$y_1 = x_1^*, \quad y_2 = x_2^* + x_{20}$$

В новых координатах система в изображениях имеет вид

(1.9) $$y_1^{\cdot} = y_2, \quad y_2^{\cdot} = \mu - \nu + x_{20}$$
$$y_1(t_0) = 0, \quad y_2(t_0) = x_{10}$$

С помощью формул обратного преобразования $x_i = x_i^{*\cdot}$ $(i = 1, 2)$, преобразования (1.8) и системы (1.9) можно получить соотношения связи параметров исходной и вспомогательной задач $(t_0 \leqslant t)$

(1.10) $$x_1 = y_2, \quad x_2 = \mu - \nu + x_{20}$$

Подставляя (1.10) в (1.3), будем иметь целевое множество для конструируемой вспомогательной задачи

(1.11) $$y_2^2 + [\mu(\theta) - \nu(\theta) + x_{20}]^2 \leqslant \varepsilon^2$$

Итак, задача A_1 эквивалентна следующей задаче.

Задача B_1. Дана исходная позиция (t_0, y_0), где $y_0 = (0, x_{10})^T$. Требуется найти стратегию $\mathrm{M}^{(H)}$, которая при всяком выборе допустимой стратегии N обеспечивает вывод точки $y[t, t_0, y(t_0), \mathrm{M}^{(H)}, \mathrm{N}]$ на множество (1.11).

Значения $\mu^{(H)}(\theta)$, составляющие множество $\mathrm{M}^{(H)}(\theta, y)$, будем искать как решения уравнения

$$\min_{\mu(\theta)} \max_{\nu(\theta)} \{y_2^2(\theta) + [\mu(\theta) - \nu(\theta) + x_{20}]^2\} = \\ = \max_{\nu(\theta)} \{y_2^2(\theta) + [\mu^{(H)}(\theta) - \nu(\theta) + x_{20}]^2\}$$

Получаем

(1.12) $$\mu^{(H)}(\theta) = \begin{cases} \mu_0, & x_{20} < -\mu_0 \\ -x_{20}, & |x_{20}| \leqslant \mu_0 \\ -\mu_0, & \mu_0 < x_{20} \end{cases}$$

Наилучшее действие второго игрока определяется формулой

(1.13) $$\nu^{(H)}(\theta) = \begin{cases} \nu_0, & x_{20} < -\mu_0 \\ \pm\nu_0, & |x_{20}| \leqslant \mu_0 \\ -\nu_0, & \mu_0 < x_{20} \end{cases}$$

Подставляя (1.12), (1.13) в (1.11), имеем предцелевое множество в задаче B_1

(1.14) $$|y_2(\theta)| \leqslant h(x_{20})$$
$$h(x_{20}) = \begin{cases} h_- = [\varepsilon^2 - (\mu_0 - \nu_0 + x_{20})^2]^{1/2}, & x_{20} < -\mu_0 \\ h_0 = (\varepsilon^2 - \nu_0^2)^{1/2}, & |x_{20}| \leqslant \mu_0 \\ h_+ = [\varepsilon^2 - (-\mu_0 + \nu_0 + x_{20})^2]^{1/2}, & \mu_0 < x_{20} \end{cases}$$

Анализ функции h дает необходимое условие приведения

(1.15) $$\nu_0 < \varepsilon$$

и область начальных условий в задаче A_1, из которой приведение, быть может, возможно

$$|x_{20}| \leqslant \varepsilon + \mu_0 - \nu_0 \tag{1.16}$$

Итак, для решения задачи B_1 достаточно решить следующую задачу.

Задача C_1. Дана исходная позиция $(t_0, y(t_0))$. Требуется найти стратегию $M^{(H)}$, которая при всяком выборе допустимой стратегии N обеспечивала бы вывод точки $y[t, t_0, y(t_0), M^{(H)}, N]$ на множество (1.14) в момент θ.

Эту задачу будем решать согласно [1]. Множество $W(\theta, t)$ программного поглощения цели (1.14) находится как совокупность векторов $w = (y_1, y_2)^T$, удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned}-\int_t^\theta s^T X(\theta,\tau)(0, x_{20})^T d\tau + \rho_2(s,t,\theta) - \\ - \rho_1(s,t,\theta) - \rho_{-M}(s) - s^T X(\theta, t) w \leqslant 0\end{aligned} \tag{1.17}$$

при всех единичных векторах s. В (1.17) X — фундаментальная матрица однородной системы (1.9), ρ_{-M} — опорная функция множества — M (M — множество (1.14)), ρ_i — опорная функция множества достижимости i-го игрока ($i = 1, 2$). Имеем

$$\begin{aligned}\rho_1 = \max_{|\mu| \leqslant \mu_0} \int_t^\theta [s_1(\theta - \tau) + s_2]\mu(\tau)\, d\tau = \\ = \mu_0 \int_t^\theta |s_1(\theta-\tau) + s_2|\, d\tau, \quad \rho_2 = \nu_0 \int_t^\theta |s_1(\theta - \tau) + s_2|\, d\tau \\ \rho_{-M}(s) = \begin{cases} \infty, & s_1 \neq 0 \\ h, & s_1 = 0 \end{cases}\end{aligned} \tag{1.18}$$

Подставляя (1.18) в (1.17) и вычисляя максимум левой части по s, получаем

$$\begin{aligned} s^\circ(t, y) &= (0, -\operatorname{sign}[x_{20}(\theta - t) + y_2])^T \\ W(\theta, t) &= \{y \mid H_-(t) \leqslant y_2 \leqslant H_+(t)\} \\ H_\pm(t) &= \pm h + (\pm \mu_0 \mp \nu_0 - x_{20})(\theta - t)\end{aligned} \tag{1.19}$$

Множество $W(\theta, t)$ непусто, если

$$0 < h + (\mu_0 - \nu_0)(\theta - t_0) \tag{1.20}$$

Подсчитаем опорную функцию

$$\rho_W(s) = \begin{cases} \infty, & & s_1 \neq 0 \\ \pm H_\pm, & s_2 = \pm 1, & s_1 = 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

С учетом (1.21)

$$\varkappa(t, y) = \max_{\|s\| \leqslant 1} [s^T y - \rho_W(s)] = \begin{cases} y_2 - H_+, & -x_{20}(\theta - t) < y_2 \\ -y_2 + H_-, & y_2 < -x_{20}(\theta - t) \end{cases} \tag{1.22}$$

Стратегия, экстремальная относительно $W(\theta - t)$, имеет вид

$$M^{(e)}(t, y) = \begin{cases} \{\mu \mid |\mu| \leqslant \mu_0\}, & \varkappa(t, y) \leqslant 0 \\ M^{(e)}[t, s^\circ(t, y)], & 0 < \varkappa(t, y) \end{cases} \tag{1.23}$$

где

$$\mathrm{M}^{(e)}[t, s^\circ(t, y)] = \begin{cases} -\mu_0, & -x_{20}(\theta - t) < y_2 \\ \mu_0, & y_2 < -x_{20}(\theta - t) \end{cases}$$

находится из условия максимума $s^{\circ T} \cdot (0, \mu)^T$. Суммируя результаты (1.22), (1.23), получаем стратегию

$$\mathrm{M}^{(e)}(t, y) = \begin{cases} -\mu_0, & H_+ < y_2 \\ \{\mu \mid |\mu| \leqslant \mu_0\}, & H_- < y_2 < H_+ \\ \mu_0, & y_2 < H_- \end{cases} \tag{1.24}$$

решающую задачу C_1. Доопределяя ее в момент θ по формуле (1.12), получаем экстремальную стратегию задачи B_1.

Теперь построим стратегию, решающую исходную задачу A_1. Для этого преобразуем переменные стратегии (1.24) по формулам (1.10). Имеем

$$\mathrm{M}^{(e)}(t, x) = \begin{cases} -\mu_0, & H_+ < x_1 \\ \{\mu \mid |\mu| \leqslant \mu_0\}, & H_- < x_1 < H_+ \\ \mu_0 & x_1 < H_- \end{cases} \tag{1.25}$$

Отсюда $\mathrm{M}^{(H)}(t, x) = \mathrm{M}^{(e)}(t, x)$ при $t < \theta$ и $\mathrm{M}^{(H)}(t, x) = \mu^{(H)}(\theta)$ при $t = \theta$. Стратегия (1.25) отвечает мосту

$$H_- < x_1 < H_+ \tag{1.26}$$

Мост (1.26) зависит от начальной позиции. Переход от стратегии $\mathrm{M}^{(H)}(t, x)$ к управлению u, осуществляемый дифференцированием (1.6), автоматически формализует импульсно-скользящие режимы, возникающие на границе моста (1.26).

Область начальных условий, из которых игра имеет успешное с точки зрения первого игрока завершение, есть пересечение множества $W(\theta, t_0)$ и (1.20). Если $\nu_0 \leqslant \mu_0$, то (1.20) имеет место и рассматриваемая область состоит из областей

$$\begin{cases} \mu_0 \leqslant x_{20} \leqslant \mu_0 + \varepsilon - \nu_0 \\ -h_+(x_{20}) + (\nu_0 - \mu_0 - x_{20})(\theta - t_0) \leqslant x_{10} \leqslant h_+(x_{20}) + \\ + (\mu_0 - \nu_0 - x_{20})(\theta - t_0) \end{cases} \tag{1.27}$$

$$\begin{cases} |x_{20}| \leqslant \mu_0 \\ -\sqrt{\varepsilon^2 - \nu_0^2} + (\nu_0 - \mu_0 - x_{20})(\theta - t_0) \leqslant x_{10} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2 - \nu_0^2} + \\ + (\mu_0 - \nu_0 - x_{20})(\theta - t_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu_0 - \mu_0 - \varepsilon \leqslant x_{20} < -\mu_0 \\ -h_-(x_{20}) + (\nu_0 - \mu_0 - x_{20})(\theta - t_0) \leqslant x_{10} \leqslant h_-(x_{20}) + \\ + (\mu_0 - \nu_0 - x_{20})(\theta - t_0) \end{cases}$$

Область (1.27) и мост (1.26) изображены на фиг. 1.

В случае, когда $\mu_0 < \nu_0$, требование (1.20) дает условие $\nu_0 - \sqrt{\varepsilon^2 - \nu_0^2} \cdot (\theta - t_0)^{-1} < \mu_0$ и сужает область (1.27) до формы, получающейся из (1.27) заменой ε, входящего в верхние соотношения первой и последней областей, на $[\varepsilon^2 - (\nu_0 - \mu_0)^2 (\theta - t_0)^2]^{1/2}$.

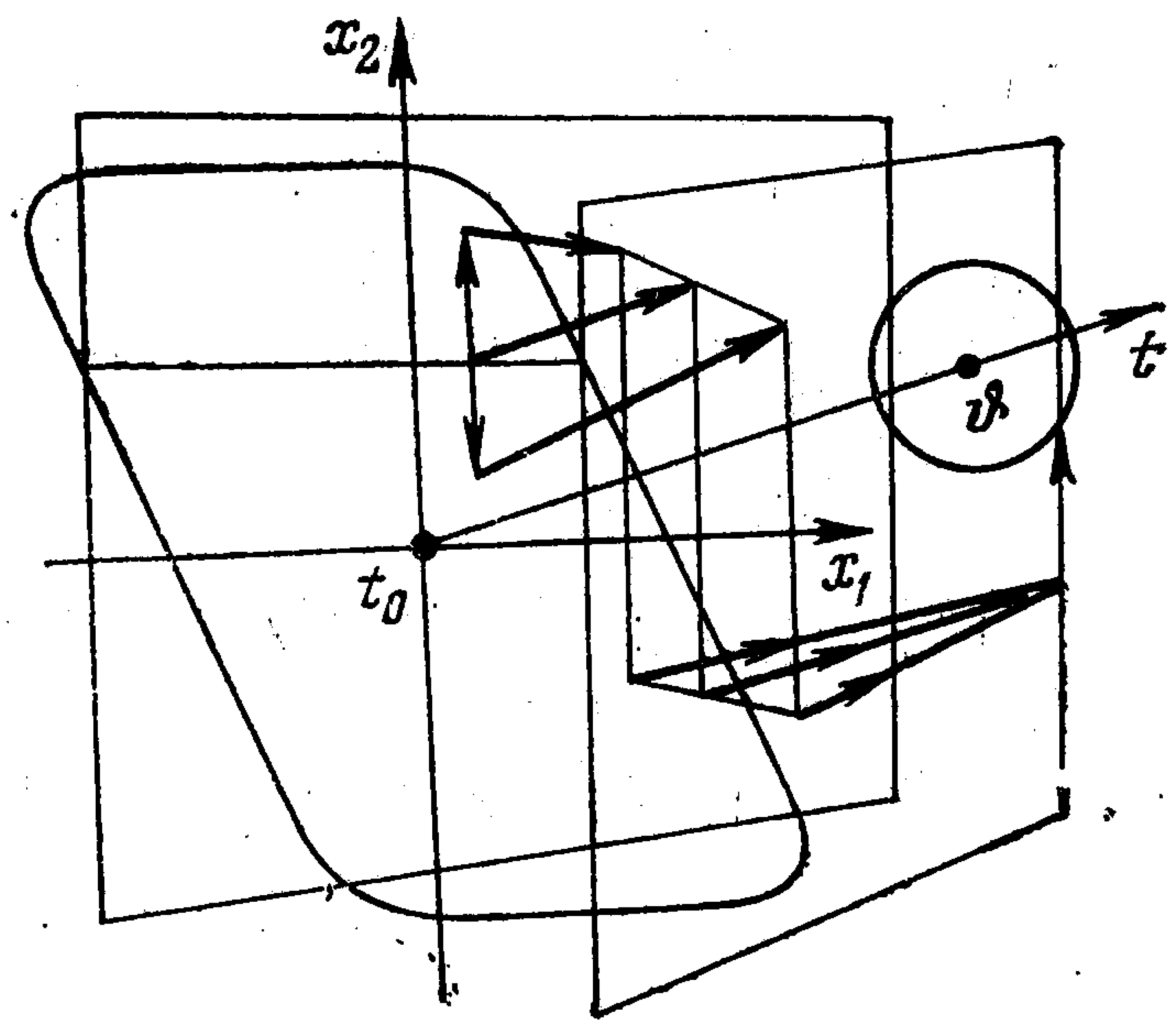
2. Общий случай конфликтно управляемой линейной системы. Рассмотрим объект (2.1) и целевое множество (2.2)

(2.1) $$x^{\cdot} = Ax + bu - cv = L(x, u, v)$$

(2.2) $$d^2(x) = x^T Dx \leqslant \varepsilon^2$$

Здесь A — $n \times n$-матрица; b, c — n-векторы; D — неотрицательная симметричная матрица. Предполагается, что управление u стеснено ограничением (1.4), а управление v подчинено требованию (1.5). Допустимые стратегии игроков понимаются в смысле п. 1 с дополнением, что первый игрок в момент t информирован о своей предыстории: $\{x(\tau)\}_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t}$.

Задача A_2. Дана исходная позиция (t_0, x_0). Требуется найти стратегию $M^{(H)}$, которая при всяком выборе допустимой стратегии N обеспечивает вывод фазовой точки системы (2.1) на множество (2.2) в момент θ.



Фиг. 1

Построим вспомогательную задачу о приведении. Система (2.1) в изображениях имеет вид

(2.3) $$\frac{d}{dt} x^* = L(x^*, \mu, \nu) + x_0 \chi(t - t_0)$$

Если $\det A \neq 0$, то реакция объекта (2.3) допускает разложение на составляющие

(2.4) $$x^* = y - A^{-1}x_0, \quad t_0 < t$$

В (2.4) y — решение задачи Коши

(2.5) $$y^{\cdot} = L(y, \mu, \nu), \quad y(t_0) = A^{-1}x_0 = y_0$$

Из (2.4), (2.1), (2.5) вытекает формула связи переменных

(2.6) $$x = L(y, \mu, \nu), \quad t_0 < t$$

Итак, задача A_2 эквивалентна следующей задаче.

Задача B_2. Дана исходная позиция (t_0, y_0). Требуется найти стратегию $M^{(H)}$, которая при всяком выборе допустимой стратегии N обеспечивает вывод в момент θ фазовой точки системы (2.5) на множество (2.2), где $x = L[y, \mu(\theta), \nu(\theta)]$.

Значение $\mu^{(H)}(\theta)$, составляющее множество $M^{(H)}(\theta, y)$, должно решить задачи

(2.7) $$\min_{\mu(\theta)} \max_{\nu(\theta)} d(x) = d(x^\circ), \quad x^\circ = L[y, \mu^{(H)}(\theta), \nu^{(H)}(\theta)]$$
$$d(x^\circ) \leqslant \varepsilon$$

где x определено формулой (2.6) ($t = \theta$). Максимизация в (2.7) дает результат

$$\nu^\circ(\theta) = -\nu_0 \operatorname{sign}\,[g_c{}^T y + \gamma\mu(\theta)]; \quad g_c = A^T Dc, \quad \gamma = b^T Dc \tag{2.8}$$

Рассмотрим два случая.

Пусть сначала $\gamma = 0$. Тогда согласно (2.8)

$$\nu^{(H)}(\theta) = -\nu_0 \operatorname{sign}\, g_c{}^T y \tag{2.9}$$

так как $\nu^\circ(\theta)$ не зависит от $\mu(\theta)$. С учетом (2.9) можно получить

$$\mu^{(H)}(\theta) = \begin{cases} \mu_0, & g_b{}^T y < -\mu_0\alpha \\ \mu_1(\theta), & |g_b{}^T y| \leqslant \mu_0\alpha \\ -\mu_0, & \mu_0\alpha < g_b{}^T y \end{cases} \tag{2.10}$$

$$g_b = A^T Db, \qquad \alpha = d^2(b), \qquad \mu_1(\theta) = \alpha^{-1} g_b^T y$$

Пусть теперь $\gamma > 0$. Минимизация в (2.7) при условии (2.8) дает результат

$$\mu^{(H)}(\theta) = \begin{cases} \mu_0, & \begin{cases} \gamma\nu_0 < r^T y \text{ и } g_b{}^T y < \gamma\nu_0 - \alpha\mu_0 \\ |r^T y| < \gamma\nu_0 \text{ и } g_c{}^T y < -\gamma\mu_0 \\ r^T y < -\gamma\nu_0 \text{ и } g_b{}^T y < -\gamma\nu_0 - \alpha\mu_0 \end{cases} \\ \alpha^{-1}\gamma\nu_0 - \alpha^{-1} g_b{}^T y, & \gamma\nu_0 < r^T y \text{ и } \gamma\nu_0 - \alpha\mu_0 < \\ & < g_b{}^T y < \gamma\nu_0 + \alpha\mu_0 \\ -\gamma^{-1} g_c{}^T y, & |r^T y| \leqslant \gamma\nu_0 \text{ и } |g_c{}^T y| < \gamma\mu_0 \\ -\alpha^{-1}\gamma\nu_0 - \alpha^{-1} g_b{}^T y, & r^T y < -\gamma\nu_0 \text{ и } -\gamma\nu_0 - \\ & -\alpha\mu_0 < g_b{}^T y < -\gamma\nu_0 + \alpha\mu_0 \\ -\mu_0, & \begin{cases} \gamma\nu_0 < r^T y \text{ и } \gamma\nu_0 + \alpha\mu_0 < g_b{}^T y \\ |r^T y| \leqslant \gamma\nu_0 \text{ и } \gamma\mu_0 < g_c{}^T y \\ r^T y < -\gamma\nu_0 \text{ и } -\gamma\nu_0 + \alpha\mu_0 < g_b{}^T y \end{cases} \end{cases} \tag{2.11}$$

В (2.11) принято обозначение $r = g_b - \alpha\gamma^{-1} g_c$. Управлению (2.11) согласно (2.9) отвечает

$$\nu^{(H)}(\theta) = -\operatorname{sign}\,[g_c{}^T y + \gamma\mu^{(H)}(\theta)] \tag{2.12}$$

Итак, для решения задачи B_2 достаточно решить следующую задачу.

Задача C_2. Дана исходная позиция (t_0, y_0). Требуется найти стратегию $M^{(H)}$, которая при всяком выборе допустимой стратегии N обеспечивала бы вывод фазовой точки системы (2.5) на множество, определяемое вторым из соотношений (2.7), в момент θ.

Эту задачу решим по схеме [1]. Множество $W(\theta, t)$ программного поглощения цели находится как совокупность векторов w, удовлетворяющих условию

$$\rho_2(s, t, \theta) - \rho_1(s, t, \theta) - \rho_{-M}(s) - s^T e^{A(\theta - t)} w \leqslant 0 \tag{2.13}$$

при всех единичных векторах s. В (2.13) ρ_i — опорная функция множества достижимости i-го игрока ($i = 1, 2$), ρ_{-M} — опорная функция множества — M (M — множество x° из (2.7)). Имеем

$$\rho_1 = \mu_0 \int_t^\theta | s^T e^{A(\theta-\tau)} b | \, d\tau, \qquad \rho_2 = \nu_0 \int_t^\theta | s^T e^{A(\theta-\tau)} c | \, d\tau$$

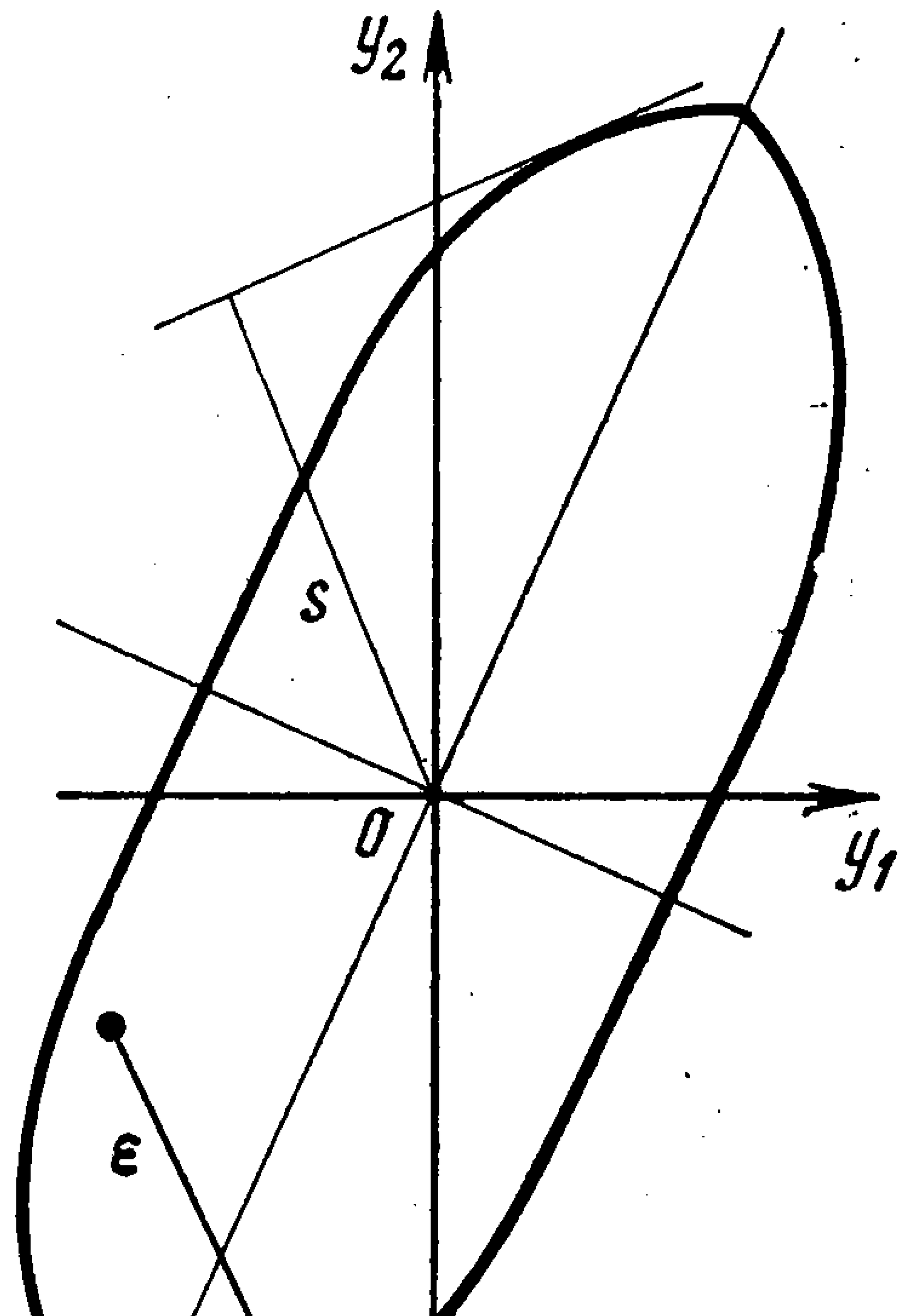
Далее, определив функцию $\varkappa(t, y) = \max\limits_{\|s\| \leqslant 1} [s^T y - \rho_{W(\theta,t)}]$ и из условия максимума $s^{\circ T} b\mu$ множество

$$\text{(2.14)} \qquad \mathrm{M}^{(e)}(t, s^\circ) = \begin{cases} -\mu_0 \operatorname{sign} s^{\circ T} b, & s^{\circ T} b \neq 0 \\ \{\mu \,|\, |\mu| \leqslant \mu_0\}, & s^{\circ T} b = 0 \end{cases}$$

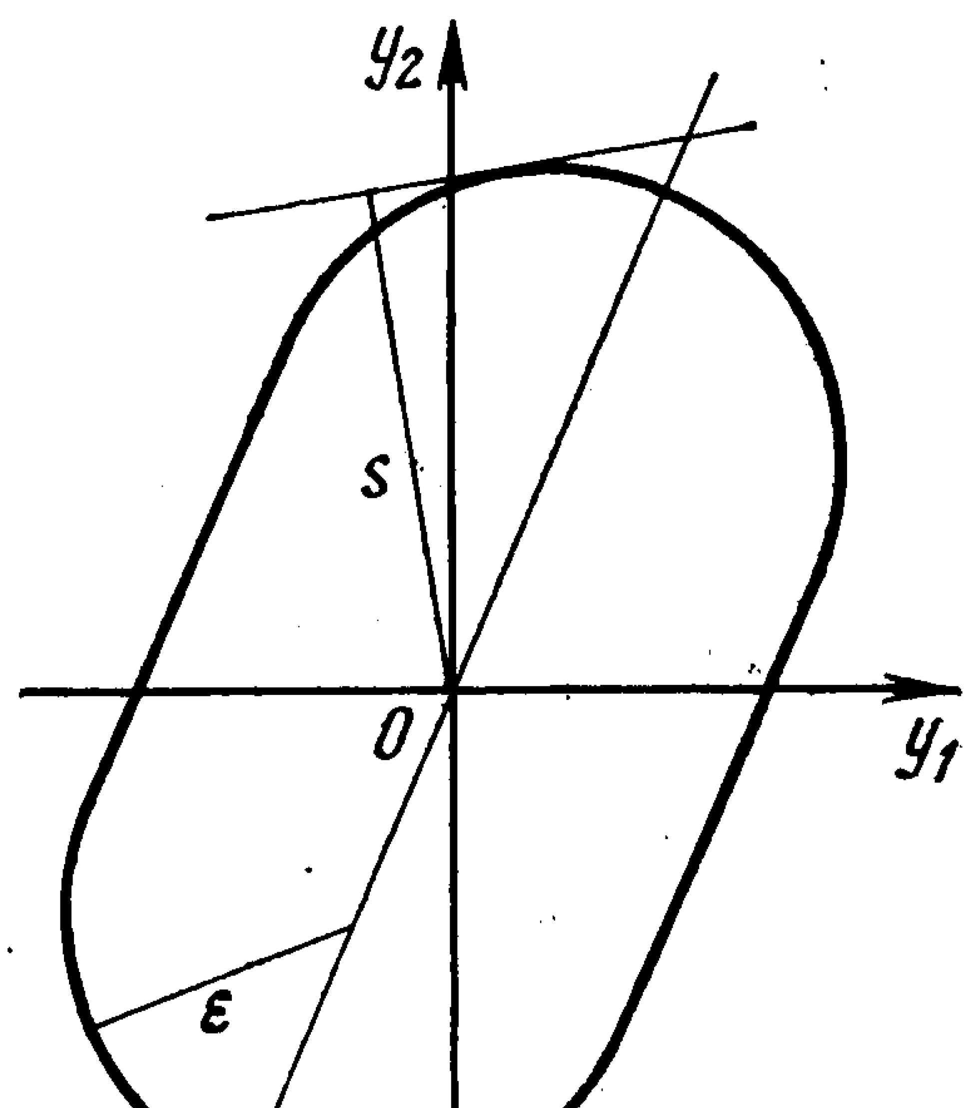
выпишем стратегию

$$\mathrm{M}^{(e)}(t, y) = \begin{cases} \{\mu \,|\, |\mu| \leqslant \mu_0\}, & \varkappa(t, y) \leqslant 0 \\ \mathrm{M}^{(e)}(t, s^\circ), & \varkappa(t, y) > 0 \end{cases}$$

разрешающую задачу C_3. В (2.14) $s^\circ(t, y)$ максимизирует левую часть (2.13). Определяя стратегию $\mathrm{M}^{(H)}(t, y)$ в момент $t = \theta$ по формуле (2.10)



Фиг. 2



Фиг. 3

приходим к экстремальной стратегии задачи B_2. Если в последней сделать замену

$$y = A^{-1} x_0 + \int_{t_0}^t x \, d\tau$$

вытекающую из (2.4), то получим стратегию, разрешающую исходную задачу A_2. Теперь в отличие от п. 1 первому игроку при принятии решения, вообще говоря, надо знать свою предысторию.

Приложение. Пусть D — единичная $n \times n$-матрица, $\| b \| = \| c \| = 1$. Приведем опорную функцию множества —М в двух случаях: $b^T c = 0$, $b = c$. Отметим, что —М = М, и совершим преобразование $z = Ay$. Тогда

$$\rho_M (s) = \| l \| \rho_{AM} (l \| l \|^{-1}), \quad l = A^{-1T} s$$

Задача сводится к подсчету опорной функции множества AМ. Если $b^T c = 0$, $\| l \| = 1$, $l^T b \geqslant 0$, $l^T c \geqslant 0$, то $\rho_{AM} (l) = \varepsilon + l^T (b\mu_0 - c\nu_0)$. Значение $\rho_{AM} (l)$ для других областей находится, исходя из симметрий множества AМ (фиг. 2).

В случае $b = c$ множество AМ изображено на фиг. 3. Необходимое условие приведения дается неравенством (1.15), $\rho_{AM} (l) = \varepsilon + (\mu_0 - \nu_0) | l^T b |$.

Поступила 9 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. *Завалищин С. Т.* Импульсное исчисление для операторов, действующих в пространстве распределений. Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, № 6.
3. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. М., «Наука», 1965.