

**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ИНТЕРВАЛОВ ПОМЕХ
В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ СБЛИЖЕНИЯ**

А. А. Меликян

(Москва)

Рассматриваются дифференциальные игры сближения, в которых минимизирующий игрок наблюдает позицию игры на подмножестве Q интервала движения $[t^\circ, T]$. Подмножество Q формируется в процессе движения вторым игроком, т. е. он включает помехи, исключающие наблюдение. Приведена постановка задачи об оптимальном распределении помех, решены четыре примера. Общая постановка подобных задач дана в [1]. Родственные задачи рассматривались, например, в [2, 3].

1. Постановка задачи. Пусть дифференциальная игра игроков X и Y задается на фиксированном интервале времени $[t^\circ, T]$ дифференциальными уравнениями, ограничениями и начальными условиями

$$(1.1) \quad \begin{aligned} X : \dot{x} &= f(x, t, u), \quad u(t) \in U, \quad x(t^\circ) = x^\circ \\ Y : \dot{y} &= g(y, t, v), \quad v(t) \in V, \quad y(t^\circ) = y^\circ \end{aligned}$$

Размерности фазовых векторов x, y и векторов управлений u, v произвольны; U, V — множества в пространстве векторов u, v ; f, g — заданные функции.

Условия информированности игрока X таковы. Ему известны соотношения (1.1) и на всем интервале движения он наблюдает точное значение собственного фазового вектора. Фазовый вектор противника игрок X наблюдает на множестве $Q \subset [t^\circ, T]$, состоящем из фиксированного числа N замкнутых интервалов (интервалов наблюдения) $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, N$. Моменты a_i, b_i подчинены ограничениям

$$(1.2) \quad \begin{aligned} t^\circ &= a_1 \leq b_1 \leq \dots \leq a_N \leq b_N = T \\ \vartheta_i &= a_{i+1} - b_i, \quad i = 1, \dots, N-1; \quad \sum_{i=1}^{N-1} \vartheta_i \leq \vartheta \leq T - t^\circ \end{aligned}$$

Множество $P = [t^\circ, T] \setminus Q$, следовательно, состоит из $N - 1$ открытого интервала (интервала помех) (b_i, a_{i+1}) , $i = 1, \dots, N - 1$.

Будем считать, что множество P игрок Y формирует в процессе движения и сообщает игроку X в каждый момент времени скалярный сигнал $q(t)$, $t \in [t^\circ, T]$ (последний момент точного наблюдения, см. [1])

$$(1.3) \quad \begin{aligned} q(t) &= t, \quad t \in [a_i, b_i], \quad i = 1, \dots, N \\ q(t) &= b_i, \quad t \in (b_i, a_{i+1}), \quad i = 1, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

Множества P , подчиненные ограничениям (1.2), будем называть допустимыми. Очевидно, что допустимые множества P и функции времени (сигналы) $q(t)$, $t \in [t^0, T]$, вида (1.3) находятся во взаимно однозначном соответствии. Поэтому в дальнейших рассуждениях множество P иногда будем заменять сигналом $q(t)$, заданным на всем отрезке $[t^0, T]$. Отметим, что значение сигнала (1.3) в некоторый фиксированный момент времени дает лишь локальную информацию о структуре множества P .

Игрок X формирует свое управление в момент t , располагая совокупностью величин $z = \{x(t), y(q(t)), t, q(t)\}$, $t \in [t^0, T]$, т. е. применяет стратегии в виде функций $u = u(z)$. Целью игрока X является минимизация функционала

$$(1.4) \quad J = F(x(T), y(T))$$

где $F(x, y)$ — заданная функция. Игрок Y реализует свое управление $v(t)$ и сигнал $q(t)$ в виде функций времени, подчиненных ограничениям (1.1) — (1.3), и противодействует намерениям игрока X . На величины $u(z)$, $v(t)$, $q(t)$ и соотношения (1.1) наложим ограничения, обеспечивающие существование и единственность абсолютно непрерывных решений системы (1.1), включив при необходимости в совокупность z и вектор $v(q(t))$. Рассматривая игру с позиций игрока X , поставим следующую задачу.

Задача 1. Найти наихудшее для игрока X распределение помех P^* и его оптимальную минимаксную стратегию u^* , т. е. стратегию и множество P^* , удовлетворяющие соотношению

$$(1.5) \quad J^* = \min_u \max_P \sup_v J[u, v, P] = \sup_v J[u^*, v, P^*]$$

Найти минимальное гарантированное значение J^* функционала (1.4).

Здесь $J[u, v, P]$ — значение функционала (1.4), соответствующее стратегии u , управлению v и множеству помех P . Экстремумы в (1.5) берутся по множествам, описанным выше.

Реализуя то или иное множество P моментов помех, игрок Y не может увеличить гарантированный для себя максимум функционала (1.4), но может, вообще говоря, увеличить гарантированный для игрока X минимум этого функционала по сравнению с игрой без помех ($P = \phi$).

Укажем случай, когда задача 1 сводится к задаче с фиксированным множеством помех. Приведем ее формулировку. Пусть множество P (сигнал $q(t)$, $t \in [t^0, T]$) задано до начала игры и известно игроку X , который применяет стратегии в виде функций от $z' = \{x(t), y(q(t)), t\}$.

Задача 2. Найти оптимальную минимаксную стратегию u^0 игрока X

$$(1.6) \quad J^0 = \min_u \sup_v J[u, v] = \sup_v J[u^0, v]$$

Найти величину $J^0 = J^0[P]$.

Пусть решение задачи 2 существует для всех допустимых множеств P и имеет вид $u^0[t] = u^0(z', P) = u^0(z', q(t))$, т. е. игроку X для построения оптимального управления в момент t достаточно иметь о множестве P лишь локальную информацию, заключающуюся в знании сигнала $q(t)$.

Тогда наилучшее для игрока X распределение помех P^* в задаче 1 находится из условия

$$(1.7) \quad J^* = \max_P J^\circ [P] = J^\circ [P^*]$$

а стратегия $u^*(z) = u^\circ(z', q(t))$ является решением задачи 1. Максимум в (1.7) берется по допустимым множествам P .

Докажем приведенные утверждения. Пусть в условиях задачи 1 игрок X применяет стратегию $u = u^\circ(z', q(t))$. Какое бы множество P ни реализовал игрок Y , справедливо равенство

$$\sup_P J[u^\circ, v, P] = J^\circ [P]$$

откуда следует:

$$(1.8) \quad J^* \leq \max_P \sup_P J[u^\circ, v, P] = \max_P J^\circ [P]$$

С другой стороны, для каждого фиксированного P имеем

$$(1.9) \quad J^* \geq J^\circ [P]$$

поскольку игрок Y имеет возможность реализовать в задаче 1 именно это множество P , а величина $J^\circ [P]$ — минимальное гарантированное значение функционала (1.4) при заданном множестве помех P . Проведя в (1.9) максимизацию по P и учтя (1.8), получим равенство (1.7).

2. Примеры. Рассмотрим параллельно четыре игры сближения с помехами, решения которых поддаются общему описанию. Пусть игроки X и Y движутся на интервале $[0, T]$ согласно одной из пар уравнений движения и ограничений

$X:$	$Y:$
(2.1) $x^\circ = u, u \leq \mu;$	$y^\circ = v, v \leq \nu$
(2.2) $x^{\circ\circ} = u, u \leq \mu;$	$y^{\circ\circ} = v, v \leq \nu$
(2.3) $x^{\circ\circ} = u, u \leq 1;$	$y^\circ = v, v \leq 1$
(2.4) $x^\circ = \alpha x + u, u \leq 1;$	$y^\circ = \lambda y + v, v \leq \nu$
$\mu > \nu > 0, \alpha = \pm 1, -\infty < \lambda < +\infty$	

Здесь x, y, u, v — векторы произвольной одинаковой размерности; $\mu, \nu, \alpha, \lambda$ — вещественные параметры. Начальные значения фазовых векторов и скоростей (для уравнений со второй производной по времени) заданы равенствами

$$(2.5) \quad x(0) = x^\circ, \quad x^\circ(0) = x_1^\circ, \quad y(0) = y^\circ, \quad y^\circ(0) = y_1^\circ$$

Условия информированности игрока X и допустимые множества помех P описаны в п. 1. Для игр (2.1) — (2.4) ставится задача 1 с функционалом

$$(2.6) \quad J = |x(T) - y(T)|$$

Покажем, что рассматриваемые примеры (2.1) — (2.4) относятся к случаю, оговоренному в конце п. 1, т. е. могут быть решены сведением к задаче 2 и использованием соотношения (1.7).

Решение задачи 2. Величину (1.6) для (2.1) — (2.6) можно построить, решив соответствующие дифференциально-многошаговые урав-

нения Беллмана для дифференциально-многошаговых игр, к которым сводится задача 2 (см. [1,4]). Технически более простой путь, которому ниже и будет отдано предпочтение, состоит (при некотором проигрыше в строгости) в сведении рассматриваемых примеров к многошаговым играм с конечным или счетным числом шагов.

Далее понадобятся достаточные множества моментов наблюдения $A_T \subset [0, T]$ (см. [4]). Наблюдения игрока X в точках этого дискретного множества обеспечивают ему тот же гарантированный минимум функционала (2.6), что и в игре с полной информацией. Для игр (2.1), (2.2) множества $A_T = \{t_i\}$ построены в [1] и состоят соответственно из счетного множества точек

$$(2.7) \quad t_i = T [1 - (\nu / \mu)^{i-1}], \quad t_i = T [1 - (\nu / \mu)^{(i-1)/2}], \quad i = 1, 2, \dots$$

сгущающихся к моменту $t^* = T$. В игре (2.3) точки множества A_T задаются рекуррентными соотношениями ([4])

$$(2.8) \quad \begin{aligned} T - t_i - (T - t_{i+1})^2 / 2 &= h, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ t_1 &= 0, \quad t_0 = T \\ h &= 1/2, \quad T > 1; \quad h = T(1 - T/2), \quad 0 < T \leq 1 \end{aligned}$$

Точками сгущения (2.8) являются момент $t^* = T - 1$ при $T > 1$ и момент $t^* = 0$ при $0 < T \leq 1$. Множество A_T для игры (2.4) построено в [5]; в зависимости от значения параметров единственная точка сгущения t^* этого множества может быть расположена в начале, конце или внутри интервала движения.

Рассмотрим дискретное множество моментов наблюдения $A_0 = (A_T \cap \bar{P} \cap Q) \cup \bar{P} \setminus P$ (\bar{P} — замыкание множества P), $A_0 \subset Q$. Множество A_0 получается добавлением к точкам множества A_T , попавшим в область Q , граничных точек области P и является конечным (счетным или конечным), если $t^* \notin Q$ ($t^* \in Q$). Точки множества A_0 будем обозначать τ_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, пронумеровав их положительными индексами в порядке следования слева направо, $\tau_1 = 0$, и отрицательными индексами — справа налево, $\tau_0 = T$. В зависимости от расположения точки t^* множества положительных и отрицательных индексов могут быть конечными, а точки с отрицательными индексами могут вообще отсутствовать. Обозначим через K множество индексов, соответствующих точкам A_0 , за исключением нулевого индекса, соответствующего моменту $\tau_0 = T$, т. е. $A_0 = \{\tau_k: k \in K + 0\}$.

С помощью подстановок

$$\begin{aligned} x(t) + (T - t)x^*(t) &\rightarrow x(t), \quad x^\circ + Tx_1^\circ \rightarrow x^\circ \\ y(t) + (T - t)y^*(t) &\rightarrow y(t), \quad y^\circ + Ty_1^\circ \rightarrow y^\circ \end{aligned}$$

запишем уравнения движения игроков X в (2.2), (2.3) и Y в (2.2) с начальными значениями фазовых векторов в виде

$$(2.9) \quad x^* = (T - t)u, \quad x(0) = x^\circ, \quad y^* = (T - t)v, \quad y(0) = y^\circ$$

Вид функционала (2.6) при этом не изменится, так как значения новых фазовых векторов при $t = T$ совпадают со значениями исходных. Далее для указанных трех уравнений под $x(t)$, $y(t)$ будем подразумевать введенную выше линейную комбинацию фазового вектора и скорости.

Пусть в играх (2.1) — (2.4), (2.9) игрок X наблюдает позицию $\{x_k, y_k\}$, $x_k = x(\tau_k)$, $y_k = y(\tau_k)$, $k \in K + 0$, только в точках множества $\{A_0$ и на интервалах $[\tau_k, \tau_{k+1})$, $k \in K$, задает свое управление в виде функций $u = u(x_k, y_k; t)$, интегрируемых по времени и удовлетворяющих ограничениям (2.1) — (2.4), т. е. применяет кусочно-программные стратегии. Интегрированием уравнений (2.1) — (2.4), (2.9) можно получить

$$(2.10) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= r_k x_k + p_k u_k, & |u_k| &\leq 1 \\ y_{k+1} &= s_k y_k + q_k v_k, & |v_k| &\leq 1, \quad k \in K \end{aligned}$$

где векторы u_k , v_k строятся по заданным стратегии и управлению (см. [4]). Коэффициенты уравнений (2.10) для игр (2.1) — (2.4) соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} r_k &= s_k = 1, & p_k &= \mu \Delta_k, & q_k &= \nu \Delta_k \\ r_k &= s_k = 1, & p_k &= \mu \alpha_k, & q_k &= \nu \alpha_k \\ r_k &= s_k = 1, & p_k &= \alpha_k, & q_k &= \Delta_k \\ r_k &= e^{\alpha \Delta_k}, & s_k &= e^{\lambda \Delta_k}, & p_k &= (e^{\alpha \Delta_k} - 1) / \alpha \\ q_k &= \nu (e^{\lambda \Delta_k} - 1) / \lambda \\ \alpha_k &= \Delta_k (T - \tau_k - \Delta_k / 2), & \Delta_k &= \tau_{k+1} - \tau_k, & k &\in K \end{aligned}$$

В принятых обозначениях начальные значения и функционал (2.6) для (2.10) запишутся в виде

$$(2.11) \quad x_1 = x^0, \quad y_1 = y^0; \quad J = |x_0 - y_0|$$

Соотношениями (2.10), (2.11) задана многошаговая игра. Допустимой стратегией U_Δ игрока X в этой игре будем называть совокупность функций $u_k = u_k(x_k, y_k)$, $|u_k| \leq 1$, $k \in K$. Игрок Y в (2.10), (2.11) реализует управление V_Δ в виде последовательности v_k , $|v_k| \leq 1$, $k \in K$. Отметим, что на решения (траектории) (2.10) наложены некоторые ограничения, вытекающие из непрерывности фазовых траекторий в исходных играх.

Поясним сказанное для случая, когда в K содержится счетное число положительных и отрицательных индексов. В этом случае решением (2.10) назовем совокупности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $k \in K$, удовлетворяющие (2.10) и условиям $x_k, x_{-k} \rightarrow x^*$; $y_k, y_{-k} \rightarrow y^*$ при $k \rightarrow \infty$, где x^* , y^* соответствуют $x(t^*)$, $y(t^*)$ в исходных уравнениях.

По построению (2.10) видно, что если в исходных дифференциальных играх с наблюдениями на A_0 взять кусочно-постоянную стратегию $u(x_k, y_k; t) \equiv u_k(x_k, y_k)$ и управление $v(t) \equiv v_k$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, $k \in K$, соответствующие некоторым U_Δ , V_Δ из (2.10), то реализующаяся последовательность $x(\tau_k)$, $y(\tau_k)$ будет такой же, как в (2.10) с парой U_Δ , V_Δ .

Задача 2*. Найти минимаксную оптимальную стратегию U_Δ^* игрока X в игре (2.10), (2.11), т. е. стратегию, удовлетворяющую соотношению

$$(2.12) \quad J_0 = \min_{U_\Delta} \max_{V_\Delta} J[U_\Delta, V_\Delta] = \max_{V_\Delta} J[U_\Delta^*, V_\Delta]$$

Найти величину J_0 .

Определим функцию Беллмана

$$(2.13) \quad S_k(x_k, y_k) = \min_{U_\Delta} \max_{V_\Delta} J, \quad k \in K, \quad S_0(x_0, y_0) = |x_0 - y_0|$$

Здесь в операциях минимума (максимума) участвуют те компоненты u_i (v_i) стратегии U_Δ (управления V_Δ), для которых точки τ_i лежат правее τ_k , т. е. $1/i \leq 1/k$, $i \in K$; кроме того, считается, что в момент τ_k реализована позиция $\{x_k, y_k\}$.

Из (2.12), (2.13) имеем $J_0 = S_1(x^0, y^0)$. Из (2.13) следует также рекуррентное соотношение для функции Беллмана

$$(2.14) \quad S_k(x_k, y_k) = \min_{u_k} \max_{v_k} S_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}) \\ k \in K, \quad S_0(x_0, y_0) = |x_0 - y_0|$$

где x_{k+1}, y_{k+1} взяты в виде (2.10). Проверкой можно убедиться, что единственное решение соотношений (2.14) имеет вид

$$(2.15) \quad S_k(x_k, y_k) = \max[\Phi_k, R_k(x_k, y_k)] \\ \Phi_k = \max R(\tau_i, \tau_{i+1}), \quad k \in K \quad 1/i \leq 1/k, \quad i \in K$$

Здесь функция $R(\xi, \eta)$ соответственно для игр (2.1) — (2.4) равна

$$(2.16) \quad v(T - \xi) - \mu(T - \eta), \quad [v(T - \xi)^2 - \mu(T - \eta)^2] / 2 \\ T - \xi - (T - \eta)^2 / 2, \quad v(e^{\lambda(T-\xi)} - 1) / \lambda - (e^{\alpha(T-\eta)} - 1) / \alpha$$

Далее $R_k(x_k, y_k) = |w_k(x_k, y_k)| + R(\tau_k, \tau_k)$, где для первых трех игр $w_k = x_k - y_k$, а для игры (2.4)

$$w_k = e^{\alpha(T-\tau_k)} x_k - e^{\lambda(T-\tau_k)} y_k$$

Компоненты стратегии U_Δ^* из задачи 2*, доставляющие минимум в (2.14), имеют вид

$$(2.17) \quad u_k = -w_k / |w_k|, \quad |w_k| > p_k l_{k+1} \\ u_k = -w_k / (p_k l_{k+1}), \quad |w_k| \leq p_k l_{k+1}, \quad k \in K$$

Величины $l_k = 1$ в первых трех играх и $l_k = e^{\alpha(T-\tau_k)}$ в игре (2.4); p_k взяты из (2.10).

Таким образом, если в (2.1) — (2.4), (2.9) подставить кусочно-постоянную стратегию (2.17), то гарантировано значение функционала (2.6), равное

$$(2.18) \quad J_0 = S_1(x^0, y^0) = \max[\Phi_1, R_1(x^0, y^0)]$$

Неудобство стратегии (2.17) заключается в том, что в ней в момент τ_k предполагается знание момента τ_{k+1} . Опишем поэтому другую стратегию, эквивалентную (2.17) и опирающуюся только на последний момент наблюдения $q(t)$ (ср. с (1.3))

$$(2.19) \quad q(t) = \tau_k, \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \quad k \in K$$

Пусть $w(t) = x(t) - y(q(t))$ для (2.1) — (2.3), (2.9) и

$$w(t) = e^{\alpha(T-t)} x(t) - e^{\lambda(T-q(t))} y(q(t))$$

для (2.4). Тогда нетрудно проверить, что кусочно-программная стратегия

$$(2.20) \quad u = -w(t) / |w(t)|, \quad w(t) \neq 0; \quad u = 0, \quad w(t) = 0$$

реализует в (2.1) — (2.4), (2.9) ту же последовательность x_k, y_k , что и (2.17), и, следовательно, гарантирует для (2.6) величину (2.18).

Вообще говоря, стратегия (2.20) отличается от стратегий, введенных в п. 1, но для построения (2.20) требуется меньшая информация (непрерывные наблюдения на интервалах $[a_i, b_i]$ заменены дискретными). Поэтому будем считать стратегии вида (2.20) допустимыми в задаче 2. Более того, стратегия (2.20) удовлетворяет последнему допущению п. 1.

Можно показать теперь (для применения (1.7)), что $J_0 = J^\circ$, т. е. наблюдения на $A_0 \subset Q$ в рассматриваемых примерах гарантируют то же значение функционала (2.6), что и наблюдения на Q .

Заметим для этого, что любая пара $\tau_k, \tau_{k+1} \in A_0$ является одной из четырех пар

$$(2.21) \quad b_i, a_{i+1}; \quad t_i, t_{i+1}; \quad t_i, b_j (t_{i+1} > b_j); \quad a_i, t_{j+1} (a_i > t_j)$$

при некоторых значениях i, j . Здесь a_i, b_i взяты из (1.2), $t_i \in A_T$. Можно проверить ((2.7), (2.8), [5]), что точки A_T удовлетворяют условию

$$(2.22) \quad R(t_i, t) < R_*, \quad R(t, t_{i+1}) < R_*, \quad t_i < t < t_{i+1} \\ R(t_i, t_{i+1}) = R_* = \max R(t, t), \quad t \in [0, T]$$

где R имеет вид (2.14). Из (2.21), (2.22), (2.15) имеем

$$(2.23) \quad S_1(x^\circ, y^\circ) = \max [R_*, \max_{1 \leq i \leq N-1} R(b_i, b_i + \vartheta_i), R_1(x^\circ, y^\circ)]$$

Из (2.22), (2.15) видно, что добавление к A_0 произвольного конечного числа дискретных моментов наблюдений из Q не улучшает гарантированного результата (2.23). Это соображение и позволяет записать $J_0 = J^\circ$.

Построение оптимального множества помех. Для отыскания оптимального множества P^* примем, что в (1.7) величина J° имеет вид (2.23). При вычислении максимума по допустимым множествам P (по параметрам b_i, ϑ_i вида (1.2)) в (2.23) будет затронута только вторая альтернатива, т. е. P^* следует искать из условия

$$(2.24) \quad \max_{\{b_i, \vartheta_i\}} \max_{1 \leq i \leq N-1} R(b_i, b_i + \vartheta_i)$$

Заметим далее, что при любом допустимом множестве P , как это следует из (1.2), пара чисел $\xi = b_i, \eta = b_i + \vartheta_i, i = 1, \dots, N-1$, принадлежит множеству

$$(2.25) \quad G = \{(\xi, \eta): \xi \geq 0; \eta \leq T; 0 \leq \eta - \xi \leq \vartheta\}$$

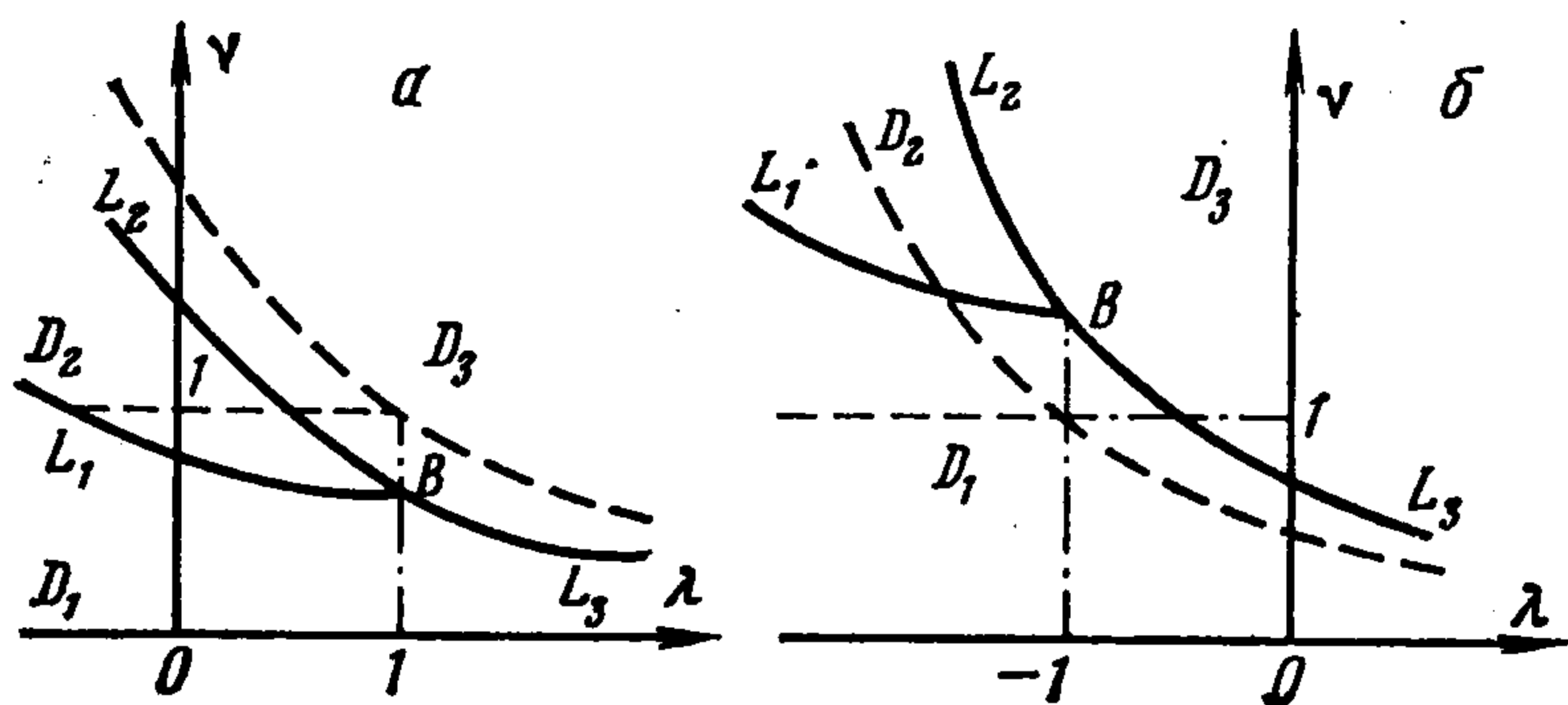
Первые два ограничения в (2.25) означают, что моменты начала и конца интервала помехи лежат на отрезке $[0, T]$; третье ограничение означает, что длительность каждого сеанса помех неотрицательна и не превышает суммарную длительность ϑ . Следовательно, максимум (2.24) не превышает величины

$$(2.26) \quad R^* = \max R(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in G$$

Постоянная R_* находится максимизацией функции R при $\xi - \eta = 0$, $0 \leq \xi \leq T$, т. е. на подмножестве множества G , поэтому $R_* \leq R^*$. Видно, что если принять все ϑ_i , равными нулю, за исключением какого-либо одного значения (например, ϑ_1), то каждая точка области G в (2.25) будет соответствовать некоторой допустимой реализации множества помех P . Это предположение означает, что игрок Y реализует только один интервал помех (b_1, a_2) . Пусть в точке (ξ^*, η^*) достигается максимум (2.26). Тогда из изложенного следует, что оптимальное множество помех состоит из одного открытого интервала $P^* = (b_1^*, a_2^*)$, $b_1^* = \xi^*$, $a_2^* = \eta^*$, а величина

(1.5) равна

$$(2.27) \quad J^* = \max [R^*, R_1]$$



Таким образом, задача о нахождении оптимального множества помех P и минимального гарантированного значения функционала J^* сводится в рассматриваемых

примерах к нахождению точки максимума функций (2.16) по области (2.25) и вычислению максимального значения этих функций. Отметим, что во всех четырех примерах искомый максимум достигается на отрезке $\eta - \xi = \vartheta$, $0 \leq \xi \leq T - \vartheta$, граничном для области G , т. е. $\eta^* - \xi^* = a_2^* - b_1^* = \vartheta$. Это обстоятельство достаточно очевидно и означает, что игроку Y выгодно истратить все ресурсы помех.

Опуская вычисления, опишем оптимальные множества помех. Для игры (2.1) оно имеет вид

$$(2.28) \quad P^* = (T - \vartheta, T), \quad b_1^* = T - \vartheta, \quad a_2^* = T$$

т. е. игроку Y выгодно включать помехи на последнем участке движения. В играх (2.2), (2.3) интервал оптимальной помехи располагается (в зависимости от величины ϑ) на среднем или начальном участке интервала движения. Границы интервала определяются соотношениями

$$(2.29) \quad b_1^* = T - \vartheta / (1 - \nu / \mu), \quad a_2^* = b_1^* + \vartheta, \quad 0 \leq \vartheta \leq (1 - \nu / \mu) T$$

$$b_1^* = 0, \quad a_2^* = \vartheta, \quad (1 - \nu / \mu) T < \vartheta \leq T$$

для игры (2.2) и соотношениями

$$(2.30) \quad b_1^* = T - \vartheta - 1, \quad a_2^* = T - 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq T - 1$$

$$b_1^* = 0, \quad a_2^* = \vartheta, \quad T - 1 \leq \vartheta \leq T$$

для игры (2.3).

В зависимости от параметров задачи в игре (2.4) могут реализоваться все три случая расположения интервала помехи. На фигуре изображена плоскость параметров λ, ν при $\alpha = 1$ (а) и $\alpha = -1$ (б). Кривыми L_i , $i = 1, 2, 3$

$$L_1: \quad \nu = e^{-\vartheta\lambda}, \quad \lambda < \alpha, \quad L_2: \quad \nu = e^{\alpha(T-\vartheta)-\lambda T}, \quad \lambda < \alpha$$

$$L_3: \quad \nu = \lambda (e^{\alpha(T-\vartheta)} - 1) / \alpha (e^{\lambda T} - e^{\lambda\vartheta}), \quad \lambda > \alpha$$

эта плоскость разбивается на три открытые области D_i , $i = 1, 2, 3$. Пунктирной линией изображены кривые L_i при $\vartheta = 0$ (см. фигуру в [5]). В области D_1 оптимальный интервал помехи расположен у правого конца интервала $[0, T]$: $b_1^* = T - \vartheta$, $a_2^* = T$; в области D_3 — у левого конца: $b_1^* = 0$, $a_2^* = \vartheta$. В области D_2 множество P^* расположено строго внутри интервала $[0, T]$ и имеет своими граничными точками

$$(2.31) \quad b_1^* = T - \frac{\ln v + \alpha \vartheta}{\alpha - \lambda}, \quad a_2^* = T - \frac{\ln v + \lambda \vartheta}{\alpha - \lambda}$$

Если пара $(\lambda, v) \in L_3$, то множество P^* определяется неоднозначно и расположено у правого или левого конца интервала движения. Наконец, в точке B , $\lambda = \alpha$, $v = e^{-\alpha \vartheta}$, множество P^* может быть расположено произвольно, т. е. $0 \leq b_1^* \leq T - \vartheta$, $a_2^* = b_1^* + \vartheta$.

Величина R^* в (2.27) находится подстановкой точек (2.28) — (2.31) в функции (2.16).

Приведем для примера значение R^* в играх (2.1), (2.3)

$$R^* = v\vartheta$$

$$R^* = \begin{cases} \vartheta + 1/2, & 0 \leq \vartheta \leq T - 1 \\ T - 1/2(T - \vartheta)^2, & T - 1 \leq \vartheta \leq T \end{cases}$$

Замечание 1. Обозначим через $P^*[\vartheta]$ оптимальное множество помех, соответствующее ресурсу ϑ . Можно проверить, что множества (2.28), (2.30) таковы, что $P^*[\vartheta] \subset P^*[\vartheta']$ при $\vartheta \leq \vartheta'$. С другой стороны, в (2.29) найдутся такие $\vartheta \leq \vartheta'$ (ϑ достаточно мало), что $P^*[\vartheta] \cap P^*[\vartheta'] = \emptyset$. Таким образом, при увеличении ресурса ϑ оптимальный интервал помех P^* не просто расширяется, а и сдвигается вдоль интервала $[0, T]$.

Замечание 2. Сравнение (2.28) — (2.31) с результатами [1, 4, 5] показывает, что игроку Y не всегда выгодно включать помехи в окрестности точки сгущения достаточного множества моментов наблюдений A_T . Это означает, что наблюдения в окрестности точки сгущения важны для точного достижения минимальной величины функционала; на саму же величину функционала влияют, вообще говоря, наблюдения в других точках, которые и исключаются оптимальным множеством помех.

Замечание 3. В работах [4, 5] показано, что игроку Y для обеспечения гарантированного максимума функционала (1.4) необходимо наблюдение во внутренней точке интервала $[0, T]$. Следовательно, некоторый интервал помех, содержащий эту точку, может уменьшить гарантированный максимум функционала, т. е. возможна содержательная максиминная переформулировка постановки п 1.

Поступила 3 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Меликян А. А., Черноусько Ф. Л. О дифференциальных играх с переменными условиями информированности. Докл. АН СССР, 1972, т. 203, № 1.
2. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
3. Пацко В. С. Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. Дифференциальные уравнения, 1971, № 3.
4. Меликян А. А. О минимальных наблюдениях в одной игре сближения. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
5. Меликян А. А. О минимальном числе моментов наблюдений в модельной игре сближения. Изв. АН АрмССР. Математика, 1974, т. 9, № 3.