Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 62—50

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА ИМПУЛЬСНОЙ «ЖЕСТКОЙ» ВСТРЕЧИ В ПОЗИЦИОННОМ ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ С ПРОТИВНИКОМ, РЕАЛИЗУЮЩИМ ОГРАНИЧЕННУЮ ТЯГУ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Рассматривается игровая [1, 2] задача о «жесткой» встрече двух точек (игроков) в позиционном линейном поле притяжения к неподвижному центру. Предполагается, что первый (минимизирующий) игрок реализует управление (тягу, силу), ограниченное по полному импульсу, а второй (максимизирующий) игрок располагает управляемой тягой с ограниченным модулем. Ценой игры является время до «жесткой» встречи — геометрического совпадения точек при произвольной относительной скорости.

Статья примыкает по тематике к [3] и весьма тесно связана с [4]. В разделах, близко повторяющих материал статьи [4], доказательства даны конспективно.

1. Пусть две точки (первый и второй игроки) с массами m_1, m_2 притягиваются к неподвижному центру O силами $F_{1,2} = -\omega^2 m_{1,2} r_{1,2}$, где $\omega^2 = \mathrm{const} > 0$, а $r_{1,2}$ — позиционные радиус-векторы точек относительно центра O.

Пусть игроки располагают произвольными по направлению управляющими силами (тягами) $f_{1,2}$ с ограничением $|f_2| \leqslant \nu = \mathrm{const} > 0$ для второго игрока. Подбором масштабов можно получить $\omega^2 = 1$, $\nu = m_2$. Пусть после этого ограничение на $f_1 = m_1 u$ — тягу первого игрока — примет вид импульсного ограничения

$$\mu^{(1)} = \mu_0 - \int_0^\tau |u|\, dt \geqslant 0 \tag{1.1}$$

Если сила f_1 конечна, то в переменных

$$x_1 = r_1 - r_2, \quad y_1 = r_1^{\boldsymbol\cdot} - r_2^{\boldsymbol\cdot}, \quad f_2 = -m_2 v$$

движение будет разворачиваться по уравнениям

$$\begin{gathered} x_1^{\boldsymbol\cdot} = y_1, \qquad y_1^{\boldsymbol\cdot} = -x_1 + u + v \\ \mu^{\boldsymbol\cdot} = \mu_1^{(1)\boldsymbol\cdot} = -|u|, \quad \mu \geqslant 0, \quad |v| \leqslant 1 \end{gathered} \tag{1.2}$$

В области $x = |x_1| > 0$ в обозначениях

$$\begin{gathered} j_\alpha = x_1 / x, \quad y_\alpha = (y_1^{\boldsymbol\cdot} j_\alpha), \quad y_{\beta,1} = y_1 - y_\alpha j_\alpha \\ y_\beta = |y_{\beta,1}|, \quad j_\beta = y_{\beta,1} / y_\beta, \quad j_\gamma \perp j_\alpha, \quad j_\alpha \perp j_\beta, \quad y_\beta > 0 \end{gathered}$$

в подвижной системе единичных ортов j_α, j_β, j_γ получим как следствия уравнений (1.2)

$$x^{\cdot} = y_\alpha, \quad y_\alpha^{\cdot} = -x + u_\alpha + v_\alpha + y_\beta^2 / x$$
$$y_\beta^{\cdot} = u_\beta + v_\beta - y_\alpha y_\beta^{\cdot} / x, \quad \mu^{\cdot} = -|u|$$
$$\mu \geqslant 0, \qquad |v| \leqslant 1$$

При $y_\beta^{\cdot} = 0$ орты j_β, j_γ произвольны в плоскости, нормальной к j_α. В этом случае

$$y_\beta^{\cdot} = \sqrt{(u_\beta + v_\beta)^2 + (u_\gamma + v_\gamma)^2}$$

Ограничение (1.1) допускает скачки позиции w $(x, y_\alpha, y_\beta, \mu)$ в значения

$$w^{(1)} [x, y_\alpha^{(1)} = y_\alpha + \mu_{1,\alpha}, \quad y_\beta^{(1)} = \sqrt{(y_\beta + \mu_{1,\beta})^2 + \mu_{1,\gamma}^2}, \quad \mu^{(1)} = \mu - |\mu_1| \geqslant 0]$$

при использовании «импульсного» управления $u = \mu_1\delta$. Вектор $w^{(1)}$ — результат импульса.

Определение допустимых пар u (w, v), v (w) и отвечающих им допустимых траекторий

$$w^{(1)} (w (t = 0), \quad \{u (w, \ v), \ v (w)\}, \ t) = w^{(1)} (\cdot, t)$$

повторяет соответствующие определения [4].

Рассмотрим два замкнутых множества

$$M_1 [x = 0], \quad M_2 [\mu - \pi / 2 - |y_1| \equiv \mu - \pi / 2 - y = 0]$$

пространства позиций W. Множество M_1 является множеством «жесткой» встречи, а множество M_2 играет служебную роль. Обозначая через $t_j (w (\cdot)) = T_j [u, v]$ первые моменты попадания позиции на множество M_j, будем называть пару u_j°, v_j° и время $T_j^\circ = T_j [u_j^\circ, v_j^\circ]$ оптимальными при выполнении оценок

$$T_j [u_j^\circ, \ v] \leqslant T_j^\circ \leqslant T_j [u, \ v_j^\circ]$$

Управление $v_{0,j}$ и область $W_{0,j} \notin M_j$ будем называть управлением и областью уклонения, если на любой паре u, $v_{0,j}$ сохраняется включение $w^{(1)} (\cdot) \in W_{0,j}$ при всех $t \geqslant 0$.

2. По аналогии с [4] рассмотрим функции

$$q (w, p) = \mu - \sqrt{y_\beta^2 + (p - y_\alpha)^2} - \operatorname{arc\,tg} p / x - \pi / 2$$
$$r_1 (w) = \max\nolimits_p q \ (w, \ p \leqslant 0)$$

где $p_1 (w) \leqslant 0$ — точка реализации максимума $r_1 (w)$, $p_2 (w)$ — наименьший нуль функции q (w, p), существующий и неположительный в области $C_1 [r_1 (w) \geqslant 0]$.

В обозначениях

$$l_1 (w, \ p) = \sqrt{x^2 + p^2}, \quad l_2 (w, \ p) = \sqrt{y_\beta^2 + (p - y_\alpha)^2}$$

получим в области $w \notin M_1 \cup [y_\beta = 0]$ равенства

$$q_p' = -(p - y_\alpha) / l_2 (w, \ p) - x / l_1^2 (w, \ p)$$
$$q_p'' = -y_\beta^2 / l_2^3 (w, \ p) + 2px / l_1^4 (w, \ p)$$

Вид второй производной и равенство $\lim q_p' = +1$ при $p \to -\infty$ показывают, что в области $p \leqslant 0$ функция $q(w, p)$ может иметь только единственный стационарный максимум, который заведомо существует в области $w \in [x > 0,\ y_\beta > 0, q_p'(w, 0) \leqslant 0]$. При $y_\beta = 0$ производная q_p' может иметь разрывы. Опуская элементарные детали, приведем результат

$$p_1(w) = -\sqrt{x - x^2}, \quad w \in [y_\beta = 0,\ \ 0 < x \leqslant 1, \sqrt{x - x^2} + y_\alpha \geqslant 0]$$

$$p_1(w) = y_\alpha, \quad w \in [y_\beta = 0] \cap \{[x > 1,\ \ y_\alpha \leqslant 0] \cap [0 < x \leqslant 1$$
$$\sqrt{x - x^2} + y_\alpha < 0]\}$$

Все упомянутые области отвечают условию $q_p'(w,\ p \to +0) \leqslant 0$. Обозначим их объединение через D_1. В остальной части пространства $D_2 = W \setminus (M_1 \cup D_1)$ функция $q(w, p)$ монотонно возрастает при $p < 0$ и $p_1(w) = 0$.

Действуя по схеме [4], можно доказать справедливость следующих утверждений.

2.1. Функции $r_1(w \notin M_1)$, $p_1(w \notin M_1)$, $p_2(w \in C_1[r_1 \geqslant 0])$ непрерывны.

2.2. Если τ — первый момент реализации равенства $\lim x\,(t \to \tau + 0) = 0$, то $\lim r_1(w(\cdot,\ t \to \tau)) \geqslant 0$.

2.3. Любое импульсное управление семейства

$$u(w,\ p,\ m) = m\delta\,[(p - y_\alpha)\,j_\alpha - y_\beta j_\beta]\,/\,l_2(w,\ p)$$
$$0 \leqslant m \leqslant \min(1,\ \mu\,/\,l_2(w,\ p))$$

сохраняет значение $q(w, p)$, т. е.

$$\Delta q = q(w^{(1)},\ p) - q(w,\ p) = 0$$

а любое импульсное управление, не входящее в это семейство, реализует оценку $\Delta q < 0$.

2.4. В области $w \in C_1$ семейство импульсных управлений

$$mu_1^\circ(w) = m\delta\,[(p_2 - y_\alpha)\,j_\alpha - y_\beta j_\beta]\,/\,l_2(w,\ p_2), \quad 0 \leqslant m \leqslant 1$$

реализует равенство $\Delta p_2 = p_2(w^{(1)}) - p_2(w) = 0$, а любое управление $u = \mu_1\delta$, не входящее в это семейство, либо строго увеличивает корень $p_2\ (\Delta p_2 > 0)$, либо переводит позицию в область $w^{(1)} \in C_2 \equiv W \setminus \setminus (C_1 \cup M_1)$.

Производная $T_1^\bullet$ функции (при конечных u)

$$T_1(w) = \operatorname{arc\,tg} p_2\,/\,x + \pi/2$$

имеет вид

$$T_1^\bullet = (q_p'(w,\ p_2)\,l_1^2)^{-1}\,[R_1 + R_2 + R_3], \quad w \in C_1 \cap [l_2 > 0]$$
$$R_1 = a_1 l_1^2\,/\,l_2 - p_2 l_2$$
$$R_2 = x l_2^{-1}\,(|\,u\,|\,l_2 - a_1 u_\alpha + y_\beta u_\beta), \quad R_3 = x l_2^{-1}\,[-a_1 v_\alpha + y_\beta v_\beta]$$

$$T_1^{\cdot} = -|u| + s(u_\alpha + v_\alpha) + \{(1 - s^2)[(u_\beta + v_\beta)^2 + (u_\gamma + v_\gamma)^2]\}^{1/2}$$

$$w \in C_1 \cap [l_2 = 0], \quad s = x / (x^2 + y_\alpha^2)$$

$$l_1 = \sqrt{x^2 + p_2^2}, \quad l_2 = l_2(w, p_2), \quad a_1 = p_2 - y_\alpha$$

Эти формулы показывают [4], что пара

$$u_1^\circ, \quad v_1^\circ = -u_1^\circ / |u_1^\circ|, \quad w \in C_1 \cap [l_2 > 0]$$

$$u_1^\circ = -v, \quad v_1^\circ = sj_\alpha + \sqrt{1 - s^2} j_\beta, \quad w \in C_1 \cap [l_2 = 0]$$

реализует оценки

$$T_1^{\cdot}(w, u_1^\circ, v) \leqslant T_1^{\cdot}(w, u_1^\circ, v_1^0) \leqslant T_1^{\cdot}(w, u, v_1^0) \tag{2.1}$$

Первая оценка проверяется элементарно. Покажем справедливость второй.

Действительно, согласно утверждению 2.4, любое импульсное управление $u = \mu_1 \delta$, сохраняющее включение $w^{(1)} \in C_1$ и не равное mu_1°, строго увеличивает p_2 и, следовательно, T_1. Нетрудно проверить, что управление mu_1° сохраняет первое слагаемое $a_1 l_1^2 / l_2$ суммы R_1 и обращает второе слагаемое в величину $-p_2(w)(1 - m) l_2(w, p_2)$. Если $p_2(w) < 0$, то управление u_1° реализует минимум суммы R_1. Если $p_2(w) = 0$, то можно показать, что при любом $u \neq u_1^\circ$ в следующий момент реализуется оценка $-p_2 l_2 > 0$.

Для обсуждения возможностей первого игрока на границе $r_1 = 0$ области C_1 рассмотрим производную $r_1^{\cdot}$ функции $r_1(w)$

$$r_1^{\cdot} = 1 + p_1 l_2(w, p_1) + P_2 + P_3, \quad w \in D_1 \cap [l_2(w, p_1) > 0]$$

$$P_2 = -|u| + [(p_1 - y_\alpha) u_\alpha - y_\alpha u_\beta] / l_2(w, p_1)$$

$$P_3 = +[(p_1 - y_\alpha) v_\alpha - y_\beta v_\beta] / l_2(w, p_1)$$

$$r_1^{\cdot} = 1 - |u| - s(u_\alpha + v_\alpha) - \{(1 - s^2)[(u_\beta + v_\beta)^2 + (u_\gamma + v_\gamma)^2]\}^{1/2}$$

$$w \in D_1 \cap [l_2(w, p_1) = 0]$$

Если в области $D_1 \cap C_2$ задать управление второго игрока по формулам

$$v_1 = -[(p_1 - y_\alpha) j_\alpha - y_\beta v_\beta] / l_2(w, p_1)$$

$$w \in D_1 \cap [l_2(w, p_1) > 0]$$

$$v_1 = sj_\alpha + \sqrt{1 - s^2} j_\beta, \quad w \in D_1 \cap [l_2(w, p_1) = 0]$$

а в область $D_2 \cap C_2$ продолжить его непрерывным образом так, чтобы оно непрерывно переходило в управление v_1, v_1° на общей границе областей $(D_1 \cap C_2)$ и $(D_2 \cap C_2)$, а также на границе областей $(D_2 \cap C_2)$ и $(D_2 \cap C_1)$, то управление $v^1 = v_1^{(0)}$, $w \in C_1$, $v^1 = v_1$, $w \in C_2$ будет непрерывным при $w \in M_1$.

Кроме того, из вида производной $r_1^{\cdot}$ и утверждения 2.3 следует, что любые ошибки первого игрока на части границы $D_1 \cap [r_1 = 0]$ переведут позицию в область C_2. К такому же результату приведут его ошибки на части границы $D_2 \cap [r_1 = 0]$. Действительно, согласно 2.3, любое импульсное управление, не параллельное оптимальному, уменьшит $q(w, 0) = r_1(w)$. Любое конечное управление u, обращающее в положительную величину производную $T_1^{\cdot}$, также переведет позицию в область C_2.

2.5. В области $w \in C_2$ управление v^1 в паре с любым управлением u реализует встречу не ранее, чем к моменту $t = \pi / 2$.

Доказательство. Пусть $x(\cdot, \tau) = 0$, тогда найдется такое $t_1 < \tau$, что $x(\cdot, t \in [t_1, \tau)) < 1$. Из равенства $q_p'(w, 0) = y_\alpha / y - 1 / x$ следует оценка $q_p'(w(\cdot, t \in [t_1, \tau)), 0) < 0$ и включение $w(\cdot, t \in [t_1, \tau)) \in D_1$. По построению управления v^1 при $w \in D_1 \cap C_2$ функция $r_1(w)$ не возрастает. Это значит, что $w(\cdot, t \in [t_1, \tau)) \in D_1 \cap C_1$. Действительно, из противного предположения $w(\cdot, t_2 \in [t_1, \tau)) \in D_1 \cap C_2$ и невозрастания r_1 следует оценка $r_1(w(\cdot, t \in [t_2, \tau))) \leqslant r_1(w(\cdot, t_2)) < 0$. Противоречие с утверждением 2.2.

Из включения $w(\cdot, t_1) \in D_1 \cap C_1$ следует существование t_3 — первого корня уравнения $r_1(w(\cdot, t_3)) = 0$, причем при $t = t_3$ функция r_1 не убывает вдоль траектории. Очевидно, что это возможно только при

$$p_2(w(\cdot, t_3)) = 0, \quad p_1(w(\cdot, t_3)) \geqslant 0$$

т. е. $w(\cdot, t_3) \in [T_1(w) = \pi / 2] = M_2$, что и требовалось доказать.

Изложенные выше соображения позволяют сформулировать результат.

Теорема 1. При $w(0) \in C_1$ $[r_1 \geqslant 0]$ управления u_1°, v_1° реализуют оптимальное время $T_1^\circ(w) = \operatorname{arc\,tg} p_2 / x + \pi / 2$.

Доказательство. Утверждение 2.1 устанавливает непрерывность функции $T_1^\circ(w)$. Утверждение 2.4 показывает, что первый игрок не может уменьшить импульсом функцию $T_1^\circ(w)$. Оценка (2.1) устанавливает седло для производной при $w \in C_1$, а утверждение 2.5 совместно с оценкой $T_1^\circ(w) \leqslant \pi / 2$ показывает, что, покидая область C_1, первый игрок не может уменьшить время встречи.

Замечание. В области $C_2 \cap [\mu - \pi / 2 < 0]$ управление $v_{2,0} = v^1$ реализует убегание от множества M_1.

Действительно, разность $\mu - \pi / 2$ не возрастает, поэтому уравнение $q(w(\cdot, t), p) = 0$ не может иметь нулем значение $p = 0$ вдоль любой допустимой траектории, отвечающей паре u, v^1.

3. В области C_2 задача построения минимаксного времени переходит в задачу построения минимаксного времени попадания позиции на множество M_2 $[q(w, 0) = \mu - \pi / 2 - y = 0]$ при наличии фазового ограничения $w(\cdot, t) \in C_2$ (ограничение на действия второго игрока). Отбросим пока фазовое ограничение. Интуитивно также чувствуется, что минимакс достигается при $u = 0$. Поэтому будем в множестве C_3 $[\mu - \pi / 2 - y < 0]$ искать «медленнодействие» T_2 на множество M_2 и отвечающее ему управление v_2.

В рамках последней «вспомогательной» задачи сформируем в неподвижной системе (x_1, y_1) два трехмерных вектора $g_x = \partial T_2 / \partial x_1$, $g_y = \partial T_2 / \partial y_1$ и после операции $\max_v$ получим «основное уравнение» [1]

$$(g_x y_1) - (g_y x_1) + |g_y| + 1 = 0$$

с «условиями окончания» [1]

$$g_x^{(3)} = 0, \quad g_y^{(3)} = \lambda y_1 / y, \quad \lambda > 0, \quad w \in M_3 = M_2 \cap [y > 0, -y + x y_\alpha > 0]$$

Условия окончания показывают, что вдоль «характеристик» $g_x^{\cdot} = g_y$, $g_y^{\cdot} = -g_x$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} &v_2 = y_1 / y, \quad T_2 \leqslant \pi / 2, \\ &v_2 = -y_1 / y, \quad \pi > T_2 > \pi / 2, \end{aligned} \quad y_1 / y \in M_3$$

т. е. управление v_2 сохраняет вдоль характеристик постоянное значение y_1 / y, равное его значению на множестве M_3 при $T_2 \leqslant \pi / 2$, и меняет это значение на противоположное при $T_2 \geqslant \pi / 2$. Ясно, что оптимальные траектории вспомогательной задачи остаются в плоскости, содержащей векторы x_1, y_1.

Выберем неподвижную систему осей совпадающих с подвижным трехгранником j_α, j_β, j_γ, характерным для некоторой позиции $w \in C_3$, и будем нижними индексами $x_{1,i}$, $y_{1,i}$, $v_{2,i}$ $(i = 1, 2, 3)$ обозначать компоненты по этим неподвижным осям. Предыдущие рассуждения показывают, что $v_{2,3} = 0$. Для определения $T_2 \leqslant \pi / 2$, v_2 послужат функции

$$y_{1,1} = -(x - v_{2,1})\, a + y_\alpha b, \qquad y_{1,2} = v_{2,2} a + y_\beta b \tag{3.1}$$

$$a = \sin t, \quad b = \cos t$$

Условие $v_2 = y_1 (T_2) / | y (T_2) |$ позволяет искать $T_2 < \pi / 2$ как наименьший положительный нуль уравнения

$$\xi (w, t) = \mu - \pi / 2 - a - A (w, t) = 0$$

$$A (w, t) = [(-xa + y_\beta b)^2 + y_\beta^2 b^2]^{1/2}$$

Аналогичные рассуждения позволяют для определения $T_2 > \pi / 2$ получить уравнение

$$\eta (w, t) = \mu - \pi / 2 - 2 + a - A (w, t) = 0$$

4. Установим ряд важных свойств функции

$$\zeta (w, t) = \begin{cases} \xi (w, t \in [0, \pi / 2]) \\ \eta (w, t \in (\pi / 2, \pi)) = \xi (w, t - \pi) - 2 \end{cases}$$

4.1. Функция $\xi (w, t \in [-\pi, \pi])$ имеет не более двух изолированных максимумов по переменной t.

Доказательство. При $w \in [[x = 0] \cup [y_\alpha = 0] \cup [y_\beta = 0]]$ утверждение 4.1 проверяется счетом. В остальных позициях функция $A (w, t \in [-\pi, \pi])$ не имеет нулей и точки $t_{1,2} = \mp \pi / 2$ не являются стационарными для функции $\xi (w, t)$.

Введем обозначения

$$\partial \xi / \partial t = \xi' (w, t \neq \pm \pi / 2) = -b - b^2 m_1 A^{-1}$$

$$m_1 = m_1 (w, t) = m_2 (w, z = \operatorname{tg} t) = (-xz + y_\alpha)(-x - y_\alpha z) + y_\beta^2 z$$

$$n_1 (w, t) = n_2 (w, z) = (-xz + y_\alpha)^2 + y_\beta^2 - m_2^2 (w, z)$$

Стационарная точка функции ξ является нулем функции n_1. С другой стороны, нуль $t_j \in [-\pi / 2, \pi / 2]$ функции n_1 является нулем функции ξ' при $m_1 < 0$, либо $(m_1 > 0)$ нулем функции ξ' является точка $t_j + \pi < \pi$, либо $t_j - \pi > -\pi$. Из условий периодичности и равенств $\xi (w, -\pi) = \xi (w, 0) = \xi (w, \pi)$ следует, что функция ξ' имеет четное число нулей — $k \geqslant 2$, а функция n_2 — многочлен по z степени не выше четвертой — имеет не более четырех нулей на интервале $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Это значит, что $k = 2, 4$.

4.2. Функция $\xi(w, t)$ допускает не более одного максимума на интервале $[0, \pi)$.

Случай, когда $\xi(w, t)$ имеет максимум при $t = 0$, исследуется просто. Нетрудно также показать, что в остальных позициях максимумы и минимумы изолированы. Накопление всех изолированных точек на интервале $[0, \pi]$ невозможно по равенству $\xi(w, -\pi) = \xi(w, 0)$. Осталось рассмотреть возможность, когда два максимума $t_2°$, $t_4°$, разделенные минимумом $t_{3,0}$, лежат на интервале $[0, \pi]$, а минимум $t_{1,0} \in (-\pi, 0)$. Поскольку других изолированных точек нет, то функция $\xi(w, t)$ возрастает при $t \in [0, t_2°]$. Из оценки

$$\xi(w, t_2°) > \xi(w, 0) > \xi(w, t_2° - \pi) = \xi(w, t_2°) + 2a(t_2°)$$

следует противоречие.

Функция $\zeta(w, t)$ определена при $t \in [0, \pi]$. Будем говорить, что $\zeta(w, t)$ имеет «максимум при $t = 0$», если такой максимум при $t = 0$ имеет функция $\xi(w, t \in [-\pi, \pi])$.

Заметим, что в единственной позиции $w[x = 1, y = 0]$ функция ξ имеет неизолированные максимумы. В остальных позициях они изолированы.

Согласно изложенному, функция $\zeta(w, t \in [0, \pi])$ допускает не более двух точек максимума $\tau_1 < \tau_2 \in [0, \pi)$ со значениями ζ_1, ζ_2 функции ζ.

Обозначим через C_M область, где существует хотя бы один из максимумов, и положим $\zeta_3 = \zeta_1$ там, где он единственный, и $\zeta_3 = \max[\zeta_1, \zeta_2]$ там, где максимумов два.

4.3. В области $C_M \cap [\zeta_3 \geqslant \zeta(w, 0) \equiv \zeta_0]$ справедливо равенство $\zeta_1 = \zeta_3$ и оценка $\zeta_1 > \zeta_2$, если второй максимум существует.

Доказательство. Пусть $\zeta_3 = \zeta(w, \tau_3 \in [0, \pi/2])$, тогда τ_3 — точка максимума функции ξ. При $w \in [x = 1, y = 0]$ утверждение 4.3 просто проверяется. В остальных позициях τ_3 — изолированная точка. Кроме того, согласно 4.2, справедлива оценка

$$\zeta_3 > \xi(w, t \in [0, \pi), t \neq \tau_3) > \zeta(w, t \in (\pi/2, \pi)) = \xi(w, t \in \in (\pi/2, \pi)) - 2 + 2a$$

Пусть $\tau_3 \in (\pi/2, \pi)$. Из оценки

$$\xi(w, t \in (\pi/2, \pi)) > \zeta(w, t) = \xi(w, t) - 2 + 2a$$

следует, что функция ξ имеет при $t \in (\pi/2, \pi)$ максимум, и поэтому функция ζ имеет только один максимум $\zeta_1 = \zeta_3$.

5. Рассмотрим область $C_4[\zeta_0 = \mu - \pi/2 - y \leqslant 0]$ — замыкание области C_3. При $w \in A_1$ $[C_4 \cap [\zeta_1 \geqslant 0]]$ существует неотрицательный первый нуль t_ζ функции ζ. В области A_1' $[A_1 \cap [A_\zeta \equiv A(w, t_\zeta) > 0]]$ необходимые условия п. 5 приводят к управлению

$$v_2 = A_\zeta h_\zeta [(-x a_\zeta + y_\alpha b_\zeta) j_\alpha + y_\beta b_\zeta j_\beta] \tag{5.1}$$

$$a_\zeta = \sin t_\zeta, \quad b_\zeta = \cos t_\zeta, \quad h_\zeta = \begin{cases} 1, & t_\zeta \in [0, \pi/2] \\ -1, & t_\zeta \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

Простое исследование показывает, что t_ζ может быть первым нулем функции ζ и обращать в нуль функцию $A\ (w,\ t)$ только в том случае, когда $\zeta\ (w,\ t_\zeta) = \zeta_1$. Более того, в этих позициях справедлива оценка $s\,(w) = x\,/\,(x^2 + y_\alpha^2) \leqslant 1$. Однако в области $A_1''\ [A_1 \cap [\zeta_1 = A_\zeta = 0]]$ необходимые условия не дают однозначного управления v_2, а дают только неравенства. Любое управление $|\,v\,| = 1$, удовлетворяющее этим неравенствам, можно принять по необходимым условиям. Можно, например, положить

$$v_2 = h_\zeta s j_\alpha + \sqrt{1 - s^2}\, j_\beta \tag{5.2}$$

В области $A_2\,[C_4 \cap [\zeta_0 < 0,\ \ \zeta_1 \geqslant \zeta_0]]$ продолжим управление по формулам (5.1), (5.2), полагая $t_\zeta = \tau_1$. Как будет видно из дальнейшего, такой выбор имеет достаточные основания.

В области $A_3\,[C_4 \setminus (A_1 \cap A_2)]$ будем стараться увеличить y и поэтому положим

$$\begin{aligned} &v_2 = (y_\alpha j_\alpha + y_\beta j_\beta)\,/\,y, \quad w \in A_3 \cap [y > 0] \\ &v_2 = x_1/\,x, \quad w \in A_3 \cap [y = 0,\ \ x > 0] \\ &v_2 = \overline{\text{const}}, \quad |\,v_2\,| = 1, \quad w \in A_3 \cap [y = x = 0] \end{aligned} \tag{5.3}$$

Введем в рассмотрение траектории w_2, порождаемые парой $u_2 = 0$, v_2, и будем через $\dot{\zeta}_{0(2)}$ обозначать производную функции $\zeta_0 = \zeta\ (w,\ 0)$ вдоль траекторий w_2. Введем также множество

$$M_4\,[\zeta_0 = 0 \cap [[\zeta'\,(w,\ 0) = -1 + xy_\alpha\,/\,y \leqslant 0,\quad y > 0] \cup [y = 0]]]$$

которое является «обратной стороной» множества M_2, т. е. той его частью, от которой всегда может уклониться второй игрок при $u = u_2 = 0$.

Заметим, что траектория w_2 только тогда может реализовать «медленнодействие» на M_2 из области C_3, когда она не пересекает множество M_4 до попадания на множество $M_2 \setminus M_4 \equiv M_3$. К сожалению, не все траектории w_2 обладают этим свойством, и среди них существуют такие, которые из области C_3 попадают внутрь области $C_5\ [\zeta_0 < 0]$ через границу M_4, затем снова выходят в область C_3 и приходят на M_3 к моменту $t = t_\zeta\,(w\,(0))$.

Из дальнейшего анализа станет ясно, в каком смысле идет разговор о траектории w_2 в области C_5, где v_2 не определено.

Лемма. Траектории w_2 могут пересекать множество M_4 со стороны области C_3 только на множестве

$$M_5\,[M_4 \cap [1 < y < 2,\quad y_\alpha < 0,\quad \zeta_1 > 0,\quad t_\zeta > \pi\,/\,2]]$$

Доказательство. Пусть $w \in M_6\,[M_4 \cap [\zeta_1 \geqslant 0,\ 0 < t_\zeta \leqslant \pi\,/\,2]]$. Из уравнения $\zeta\,(w,\ 0) = \zeta\,(w,\ t_\zeta)$ получаем, что t_ζ — первый нуль функции $\lambda_1\,(w,\ t) = y - a - A$. Из уравнения $(y - a)^2 - A^2 = 0$ следует, что t_ζ — нуль функции

$$\lambda_2\,(w,\ t) = (y^2 - x^2 + 1)\,a + 2xy_\alpha b - 2y$$

Нетрудно показать, что t_ζ является ее первым нулем.

Из оценки $0 < t_\zeta \leqslant \pi / 2$ следует оценка $-1 + xy_\alpha / y = \lambda_1'(w, 0) < 0$. Это значит, что t_ζ удовлетворяет оценке

$$\lambda_2'(w, t_\zeta) = (y^2 - x^2 + 1)a_\zeta - 2xy_\alpha b_\zeta \geqslant 0$$

Заметим теперь, что по построению управления v_2 ни одна из траекторий w_2 не может обращать в нуль функцию A_ζ более одного раза, причем при $A_\zeta = 0 \to w_2 \in C_3$. В этом легко убедиться перебором возможностей.

Из оценки $A_\zeta > 0$ и уравнения $A_\zeta = y - a_\zeta$ следует равенство:

$$\dot{\zeta}_{0(2)} = (xy_\zeta - b_\zeta) / y (y - a_\zeta)$$

Нетрудно проверить, что оценка $\dot{\zeta}_{0(2)} \geqslant 0$ совместна с оценкой $\lambda_2'(w, t_\zeta) \geqslant 0$ и уравнением $\lambda_1 = 0$ только на множестве

$$M_7 [M_6 \cap [a_\zeta = (y^2 - x^2 + 1) / y, \ b_\zeta = xy_\alpha / y]]$$

причем при $w \in M_7$ траектория w_2 целиком лежит в M_7, а x «приходит» на M_7 из области C_5 [$\zeta_0 < 0$]. О траекториях w_2 в области C_5 будем говорить в смысле продолжения в «прошлое» на время $\tau = -\pi$ траекторий с множества M_3 с переключением управления v_2 на противоположное при $\tau = -\pi / 2$.

На множестве $M_8 [M_4 \cap [\zeta_1 \geqslant 0, \ t_\zeta > \pi / 2]]$ имеем равенства и оценки

$$\lambda_1 \equiv y - 2 + a_\zeta - A_\zeta = 0$$

$$\lambda_1' = (a_\zeta A_\zeta)^{-1} (4 (y - 1) b_\zeta - xy_\alpha a_\zeta - a_\zeta b_\zeta (y - 2))$$

$$\dot{\zeta}_{0(2)} = (b_\zeta y^2 + xy_\alpha (y - 2)) (y^2 (y - 2 + a_\zeta))^{-1}$$

$$T_\zeta > \pi / 2 \Rightarrow \zeta (w, \ \pi / 2) < 0 \Leftrightarrow x > y - 1$$

Предполагая от противного, что $\dot{\zeta}_{0(2)} \geqslant 0$, получаем оценку

$$\lambda_1 < \lambda_3 \equiv y - 2 + a_\zeta - [(y - 1)^2 a_\zeta^2 + y^2 b_\zeta^2 + 2a_\zeta b_\zeta^2 y / y \ - 2]^{1/2}$$

В области $M_8 \cap [y \geqslant 2]$ легко проверяется оценка $\lambda_3 < 0$. Противоречие с уравнением $\lambda_1 = 0$ приводит к оценке

$$\dot{\zeta}_{0(2)} (w \in M_8 \cap [y \geqslant 2]) < 0$$

В области $M_8 \cap [\zeta_1 = 0]$ равенство $\lambda_1' = 0$ влечет следствием соотношение

$$\dot{\zeta}_{0(2)} (w \in M_8 \cap [\zeta_1 = 0]) = 4 (y - 1) b_\zeta A_\zeta / a_\zeta < 0$$

В области $M_8 \cap [y \leqslant 1]$ функция λ_1 не имеет нулей.

В остальных позициях множества $M_4 \setminus M_5$ по построению v_2 ясно, что $\dot{\zeta}_{0(2)} < 0$. Исключение составляет множество $M_4 \cap [x = 1, \ y = 0]$ — «неподвижные точки», в которые не могут попасть траектории w_2 со стороны области C_3.

Заметим, что при доказательстве использовалось уравнение $\zeta_0 = \zeta(w, t_\zeta)$ и не использовалось уравнение $\zeta_0 = 0$. Это значит, что от границы [$\zeta_0 = \zeta_1 < 0, \ t_\zeta > 0$] областей A_2 и A_3 траектория $w_2 \in A_2$ и может снова перейти в A_3 только при $t_\zeta = 0$. Скользящие режимы на этой границе, где v_2 разрывно, невозможны.

Зафиксируем y на множестве M_4 и будем увеличивать x от значения $x_1 = y - 1$. Функция $\dot{\zeta}_{0(2)}$ будет изменяться от значения $(\dot{\zeta}_{0(2)})_1 = x_1 y_\alpha \times \times (2 - y) > 0$. С изменением x функция ζ_1 (максимум) обязательно переменит знак при $x = x_2$. По лемме при $x = x_2$ справедлива оценка $\dot{\zeta}_{0(2)} < 0$. Это значит, что при некотором $x_3 = x_3 (y_\alpha, y)$ будет справедливо уравнение $\dot{\zeta}_{0(2)} (x_3, \ y_\alpha, \ y) = 0$.

При $x = x_3$ нетрудно определить равенство и оценку

$$\partial \dot{\zeta}_{0(2)} / \partial x = \zeta' (w, \ t_\zeta)^{-1} c (w)$$

$$c (w) = 4 (y - 1) A_\zeta - y^2 a_\zeta^3 (y^2 a_\zeta / (2 - y) + y_\alpha) < 0$$

которые устанавливают единственность и непрерывность кривой $x = x_3 (y_\alpha, y)$, отделяющей области $N_1 [M_4 \cap [\dot{\zeta}_{0(2)} < 0]]$, $N_2 [M_4 \cap [\dot{\zeta}_{0(2)} > 0]]$ при любом значении $1 - y < 2$.

В области N_2 сформируем новое управление v_2 и вместо реализации по формуле (5.1) положим

$$v_2 (w \in N_1) = v_{2,\alpha} j_\alpha + \sqrt{1 - v_{2,\alpha}^2} j_\beta \tag{5.4}$$

$$v_{2,\alpha} = x y_\alpha / y^2 + (x^2 y_\alpha^2 / y^4 - y_\alpha^2 (1 + x^2) / y^2 + 1)^{1/2}$$

Это управление максимизирует производную $t_\zeta^\cdot (w, u_2, v)$ на множестве управлений v, сохраняющих $(\zeta_0^\cdot (w, u_2, v) = 0)$ значение ζ_0.

Сформируем также в области C_2 управление $v_3 (w)$ по формулам

$$v_3 (w) = v_2 (w), \quad w \in C_2 \cap [r_1 (w) \leqslant \zeta_1] \equiv F_1 \tag{5.5}$$

В тех позициях, где $r_1 (w) > \zeta_1$, либо там, где ζ_1 не существует, положим

$$v_3 (w) = v_1 (w), \quad w \in C_2 \setminus F_1 \equiv F_2 \tag{5.6}$$

6. Управление v_2 реализует время $T_2 (w) = t_\zeta (w)$ для всех траекторий w_2, приходящих на M_3 из области C_3 и минующих множество N_1. Траектории w_2, попадающие на N_1, приходят на M_3 к моменту $T_2 (w) = t_1 (w) + t_2 (w) + \pi / 2$. Здесь $t_1 (w)$ — время движения до множества N_1, $t_2 (w)$ — время скольжения по множеству N_1, с которого траектория сходит при $y - 1 - x = 0$, $y_\alpha \leqslant 0$, т. е. в момент реализации равенства $t_\zeta (w) = \pi / 2$.

Можно показать, что траектория не пересекает кривую $x = x_3$.

Область, занятую траекториями первого типа, обозначим через W_2° (max), траектории второго типа занимают область W_2° (sup). Остальные траектории w_2 с началом в C_3 занимают область $W_{0,2}$.

Теорема 6.1. В области W_2° (max) реализуется равенство $T_2^\circ [u_2^\circ = 0, v_2^\circ = v_2] = T_2^\circ = T_2 (w)$. В области W_2° (sup) существует последовательность управлений $v_{2,j}$, такая, что

$$T_2 [u, \ v_{2,j}] \leqslant T_2 [u_2^\circ = 0, \ v_{2,j}] \to T_2 (w) \quad \text{при } v_{2,j} \to v_2$$

В области $W_{0,2}$ управление $v_2 = v_{0,2}$ уклоняет траекторию от множества M_2.

Изложим кратко план доказательства теоремы 6.1.

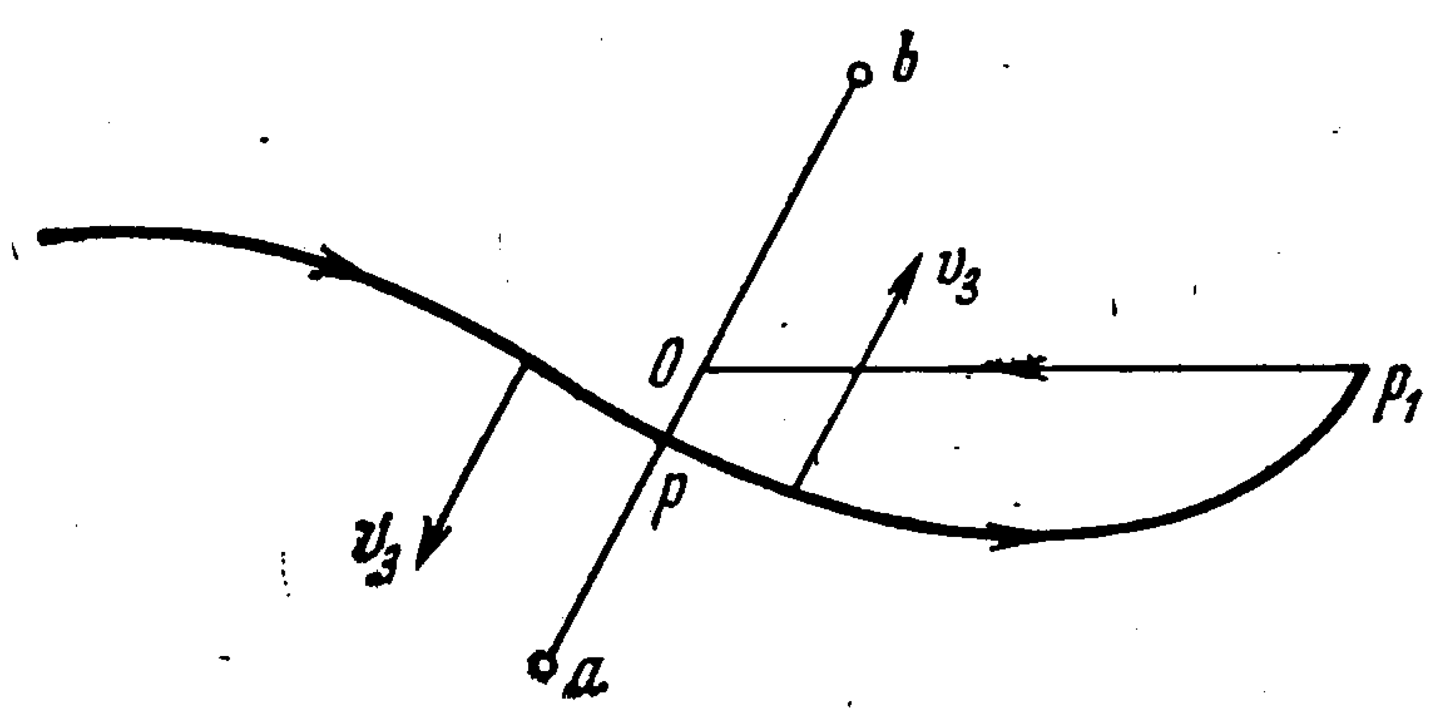
В областях W_2° (max), W_2° (sup) справедлива оценка

$$T_2^\cdot [w, \ u_2, \ v] \leqslant T_{2(2)}^* \leqslant T_2^\cdot \ [w, \ u \neq 0, \ v_2]$$

Доказательство этой оценки (при конечных управлениях u) можно в области W_2° (max) $\cap [\zeta_1 > 0]$ провести по теореме о неявных функциях. В области W_2° (max) $\cap [\zeta_1 = 0]$ ошибки второго игрока уменьшают $T_2 (w)$ с «бесконечно большой» скоростью, а ошибки первого переводят позицию в область $W_{2,0}$.

В области W_2° (sup) доказательство усложняется, однако его тоже можно провести. Ясно, что в области W_2° (sup) второй игрок может перейти на управление (5.4) при $y = \mu - \pi / 2 - \varepsilon$, где ε — малая величина, и получить время, сколь угодно близкое к $T_2(w)$, а первый игрок не сможет уменьшить даже это неоптимальное время. Импульсные действия первого игрока также могут только увеличить время T_2 либо перевести позицию в область $W_{0,2}$.

В области $W_{0,2}$ управление v_2 построено так, что функция $r_2(w) = \max \zeta\ (w,\ t \in [0,\ \pi))$ не увеличивается вдоль траектории w_2 и имеет отрицательное начальное значение. Действительно, в лемме показано, что ζ_0 не увеличивается при $\zeta_0 = \zeta_1$ либо в позициях, где ζ_0 — единственная точка максимума. С другой стороны, при $\zeta_0 = \zeta_1$ (либо при $\zeta_0 < \zeta_1$) максимум ζ_1 сохраняется, так как легко проверяется равенство $\dot{\zeta}_{1(2)} = 0$. Первый игрок не может конечным управлением или импульсом увеличить функцию $r_2(w)$, и позиция все время остается в области $W_{0,2}$. Эти соображения совместно с непрерывностью функции t_ζ (которая следует из 4.3) и функции $T_2(w)$ дают достаточные основания для доказательства теоремы 6.1.



Возвратимся теперь к исходной задаче и кривым w_3, порождаемым парой $u_3 = 0$, $v = v_3 = v_2$. При их изучении встает важный вопрос о знаке производной $\dot{r}_{1(3)}$ функции $r_1(w)$ вдоль кривых w_3 на множестве C_6 $[r_1 = \zeta(w, t_\zeta)]$. Этот вопрос труден, так как функции r_1 и t_ζ задаются неявно.

Удалось доказать оценку $\dot{r}_{1(3)} < 0$ в области

$$C_7[C_6 \cap [[y_\beta = 0] \cup [y_\alpha = 0] \cup [t_\zeta = \pi / 2 \pm \varepsilon]]]$$

Обозначение $t_\zeta = \pi / 2 \pm \varepsilon$ использовано потому, что управление v_3 разрывно при $t_\zeta = \pi / 2$, а оценка $\dot{r}_{1(3)} < 0$ установлена для обоих пределов $v_3(w)$.

Если оценка $\dot{r}_{1(3)} \leqslant 0$ справедлива при $w \in C_6$, то можно показать, что справедливы равенства

$$T_1(w \in A_1 \cap C_3) = t_\zeta + \pi / 2, \quad W_{0,1} = (A_2 \cup A_3) \cap C_3$$
$$v_3 = v_{0,1}$$

Если же оценка $\dot{r}_{1(3)} \leqslant 0$ нарушается, то требуется дополнительное исследование. В этом случае пара $u_{1,0} = 0$, $v_{1,0} = v_3$ будет оптимальной только в некоторой области, которую можно построить, продолжая в прошлое траектории w_3 (совпадающие в этом случае с траекториями w_2) до пересечения с поверхностью $r_1(w) = 0$.

Типичная траектория w_3 изображена на фигуре. Вначале позиция движется по эллипсу с центром в точке a и управление v_2 до точки переключения p имеет постоянное направление. После переключения в точке p происходит движение по эллипсу с центром в точке b. Длины отрезков $(a, 0)$, $(0, b)$ равны единице. В точке p_1 $(\mu - \pi / 2 - y = 0)$, лежащей на множестве M_3, первый игрок гасит импульсом скорость, и в течение времени $\pi / 2$ позиция движется к «жесткой встрече».

Зафиксируем некоторое малое число $\varepsilon_1 > 0$ и среди траекторий w_2 выделим семейство $w_{2,\varepsilon,1}$ по следующему признаку. Вдоль любой траектории $w_{2,\varepsilon,1}$ указанного семейства из оценки $p_1(w_{2,\varepsilon,1}) < 0$ следует оценка $r_1(w_{2,\varepsilon,1}) \leqslant -\varepsilon_1$, а из оценки $r_1(w_{2,\varepsilon,1}) > -\varepsilon_1$ следует равенство $p_1(w_{2,\varepsilon,1}) = 0$. Пусть траектории $w_{2,\varepsilon,1}$ занимают область $W_{\varepsilon,1}$.

Сформулируем окончательный результат.

Теорема 6.2. Управления $u_1^\circ = u_3 = 0$, $v_1^\circ = v_2$ в области $W_{\varepsilon,1} \cap W_2^\circ (\max)$ реализуют время $T_1 = t_\zeta + \pi / 2$, и это время не может увеличить второй игрок. Это время не может уменьшить и первый игрок на любой паре u, v_2, сохраняющей включение $w \in W_{\varepsilon,1} \cap W_2^\circ (\max)$. Если указанное включение не нарушено до попадания на M_2, то движение переходит в область C_1 через границу $T_1 = \pi / 2$ $(t_\zeta = 0)$.

Поступила 3 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
3. *Пожарицкий Г. К.* Игровая задача о жесткой встрече двух точек с импульсной тягой в линейном центральном поле. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
4. *Пожарицкий Г. К.* Импульсное преследование точки с ограниченной тягой. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.