Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 532.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ РАСПАДЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА

Г. Я. Галин, А. Г. Куликовский

(Москва)

Исследуется поведение малых возмущений в области, ограниченной распространяющимися в среде с постоянными скоростями в противоположных направлениях плоскими поверхностями разрыва, между которыми в общем случае имеется поверхность контактного разрыва. Предполагается, что характеристики невозмущенного движения между поверхностями разрыва постоянны и что возмущенное течение тоже одномерное. К такой задаче во многих случаях сводится исследование устойчивости течений, возникающих при распадении начального разрыва в двухпараметрической среде с произвольным уравнением состояния. Полученные результаты не зависят от конкретной природы поверхностей разрыва (это могут быть, например, волны детонации). Предлагаемый метод исследования может быть применен и в тех случаях, когда по одну или обе стороны от плоскости начального разрыва образуется более одной отражающей возмущения поверхности.

Задача о распадении произвольного разрыва в совершенном газе впервые была решена Н. Е. Кочиным [1]. Пусть ξ — лагранжева координата частиц, расположенных в одной плоскости, параллельной плоскости начального разрыва, и плоскость $\xi = 0$ совпадает в момент времени $t = 0$ с плоскостью начального разрыва. При распадении произвольного разрыва в совершенном газе и вообще во всех средах, для которых производная $(\partial^2 p / \partial V^2)_s$ (p — давление, V — удельный объем, s — энтропия) положительна, а производная $(\partial p / \partial V)_s$ непрерывна, в каждую сторону от плоскости $\xi = 0$ будет перемещаться либо одна ударная волна, либо одна центрированная волна разрежения. Скорость распространения ударной волны по частицам перед фронтом больше, а за фронтом меньше соответствующей скорости звука. Передняя и задняя границы центрированной волны, являющиеся слабыми разрывами, распространяются по частицам со звуковой скоростью [1,2].

В средах, для которых производная $(\partial^2 p / \partial V^2)_s$ в различных областях плоскости (V, p) имеет разные знаки, наряду с ударными волнами (скачками сжатия) и центрированными волнами разрежения могут образоваться скачки разрежения и центрированные волны сжатия, а также комбинированные центрированные волны сжатия или разрежения [3]. Если производная $(\partial p / \partial V)_s$ непрерывна, то в каждую сторону от поверхности $\xi = 0$ будет распространяться только одна волна одного из перечисленных выше видов. К поверхности $\xi = 0$, как и в случае, когда $(\partial^2 p / \partial V^2)_s > 0$ будут примыкать расширяющиеся области: $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1(t)$ и $\xi_2(t) \leqslant \xi \leqslant 0$, где параметры течения постоянны. Границы $\xi = \xi_1(t)$ и $\xi = \xi_2(t)$ этих областей являются либо сильным, либо слабым разрывом. Поверхность $\xi = 0$ может быть контактным разрывом.

Качественная картина движения, возникающего при распадении произвольного разрыва, может усложниться, если движение сопровождается химическими реакциями [4] или фазовыми превращениями, или если среда взаимодействует с электромагнитным полем [5]. В некоторых случаях, например, по одну или обе стороны от поверхности $\xi = 0$ может образоваться два разрыва, отражающих возмущения и распространяющихся в одном направлении. Однако в ряде случаев исследование устойчивости течения сводится к рассматриваемой ниже задаче.

1. Полагая, что уравнения состояния среды удовлетворяют известным ограничениям термодинамического характера, не будем вводить дополнительных ограничений на ее свойства (в частности, на производные $(\partial^2 p / \partial V^2)_s$ и $(\partial p / \partial V)_s$) и рассмотрим только те случаи, когда в каждую сторону от поверхности $\xi = 0$ распространяется либо один скачок сжатия или разрежения, либо одна обычная или комбинированная волна разрежения или сжатия.

В соответствии с полученными в [3] результатами устойчивость течения в этих случаях будет определяться поведением возмущений в области $\xi_2(t) \leqslant \xi \leqslant \xi_1(t)$. Возмущения вне этой области можно считать равными нулю.

Уравнения состояния некоторых сред рассматриваемого класса допускают ударные переходы, при которых выполняются законы сохранения и требование неубывания энтропии и которые тем не менее принято считать нереализующимися. К такого рода скачкам относятся, в частности, неэволюционные скачки и скачки, на которых не выполнены условия устойчивости для изолированной ударной волны [6]. На скачках, которые не исключаются этими ограничениями, должны выполняться следующие неравенства:

$$0 \leqslant \mu < 2\,(1 + M), \quad M \leqslant 1, \quad M_0 \geqslant 1 \tag{1.1}$$

$$\mu = 1 + j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H, \quad M = |j|\frac{V}{a}, \quad j^2 = \frac{p - p_0}{V_0 - V}$$

где $(\partial V / \partial p)_H$ — производная вдоль ударной адиабаты, a — скорость звука, нулевым индексом отмечены параметры перед фронтом скачка.

2. Пусть параметры возникающего при распадении начального разрыва течения испытывают в момент времени t_0 малые возмущения в области $\xi_2(t_0) \leqslant \xi \leqslant \xi_1(t_0)$, а вне этой области начальные возмущения отсутствуют. Последнее допущение не является принципиальным ограничением и, как отмечено в [3], может быть принято и в тех случаях, когда поверхность $\xi = \xi_r(t)$ является задней границей обычной или комбинированной центрированной волны.

Предполагая возмущенное течение адиабатическим, ограничимся исследованием поведения возмущения скорости u' и давления p'. Возмущение энтропии, как функция ξ, в области $\xi_2(t_0) \leqslant \xi \leqslant \xi_1(t_0)$, $t > t_0$ определяется начальными данными, а в областях $\xi_2(t) \leqslant \xi \leqslant \xi_2(t_0)$ и $\xi_1(t_0) \leqslant \xi \leqslant \xi_1(t)$ — по значениям возмущений энтропии при $\xi = \xi_2(t) + 0$ и $\xi = \xi_1(t) - 0$. Последние, как и возмущения j_1' и j_2', находятся из линеаризованных условий на прямом скачке по известным u' и p'.

Возмущение скорости и давления будем искать в виде $u' = V\,(I^+ - I^-)\,/\,2a$, $p' = (I^+ + I^-)\,/\,2$; здесь и далее V и a — удельный объем и скорость звука в невозмущенном потоке. Параметры невозмущенного потока и величины $I^\pm$ в области $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1(t)$ будем отмечать индексом *1*, а в области $\xi_2(t) \leqslant \xi \leqslant 0$ — индексом *2*. В линеаризованной постановке для I^+ и I^- получим следующую систему уравнений, начальных и граничных условий:

$$\frac{\partial I_r^{\pm}}{\partial t} \pm \frac{a_r}{V_r}\frac{\partial I_r^{\pm}}{\partial \xi} = 0, \quad r = 1, 2 \tag{2.1}$$

$$t = t_0, \ I_1^{\pm} = I_{01}^{\pm}(\xi), \ I_2^{\pm} = I_{02}^{\pm}(\xi)$$

$$\xi = 0, \ I_1^{+} = (1 - A) I_2^{+} + A I_1^{-}, \ I_2^{-} = -A I_2^{+} + (1 + A) I_1^{-}$$

$$\xi = \xi_1(t) \equiv j_1 t, \ I_1^{-} = K_1 I_1^{+}; \ \xi = \xi_2(t) \equiv j_2 t, \ I_2^{+} = K_2 I_2^{-}$$

Здесь ξ — лагранжева координата, связанная с эйлеровой координатой x соотношением $(\partial x / \partial \xi) = V$, A — коэффициент отражения возмущения от контактного разрыва, а K_r — от поверхности $\xi = \xi_r(t)$, граничные условия на ней получаются линеаризацией соотношений на прямом скачке. Для A в (2.1) и для K_r, в случае ударной волны, имеют место формулы

$$A = \frac{(a / V)_2 - (a / V)_1}{(a / V)_2 + (a / V)_1}, \qquad K_r = -\frac{2(1 - M_r) - \mu_r}{2(1 + M_r) - \mu_r} \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что $0 \leqslant |A| < 1$, если $a_r \neq 0$ и ограничены. При $A = 0$ поверхность $\xi = 0$ не отражает возмущений, а амплитуда проходящих волн не изменяется. Рассматривая критерии устойчивости при $A = \pm 1$, будем иметь в виду, что речь идет об устойчивости движения среды, занимающей полупространство $\xi \geqslant 0$ (или $\xi \leqslant 0$), когда граничное условие на поверхности $\xi = 0$ имеет вид: $I^+ = I^-$ $(A = 1)$ или $I^+ = -I^-$ $(A = -1)$. Первое из них соответствует распаду начального разрыва на ограничивающей среду жесткой стенке, второе — на свободной границе. Отметим также, что если поверхность $\xi = \xi_r(t)$ является слабым разрывом или скачком, на котором $M_r = 1$, то $\mu_r = 0$ и $K_r = 0$.

Система уравнений для возмущений имеет инварианты, поэтому изменение амплитуды возмущений может происходить только при взаимодействии с поверхностями разрыва.

Нетрудно установить условия устойчивости течения в частных случаях, когда изменение амплитуды происходит только при взаимодействии с двумя поверхностями. Для этого достаточно проследить за изменением амплитуды возмущений при однократном последовательном отражении от этих поверхностей. В этих частных случаях критерии асимптотической устойчивости, нейтральной устойчивости и неустойчивости течения имеют соответственно вид

$$A = 0\colon \ |K_1 K_2| < 1, \quad |K_1 K_2| = 1, \quad |K_1 K_2| > 1 \tag{2.3}$$

$$K_r = 0\colon \ |A K_q| < 1, \quad |A K_q| = 1, \quad |A K_q| > 1, \ q \neq r$$

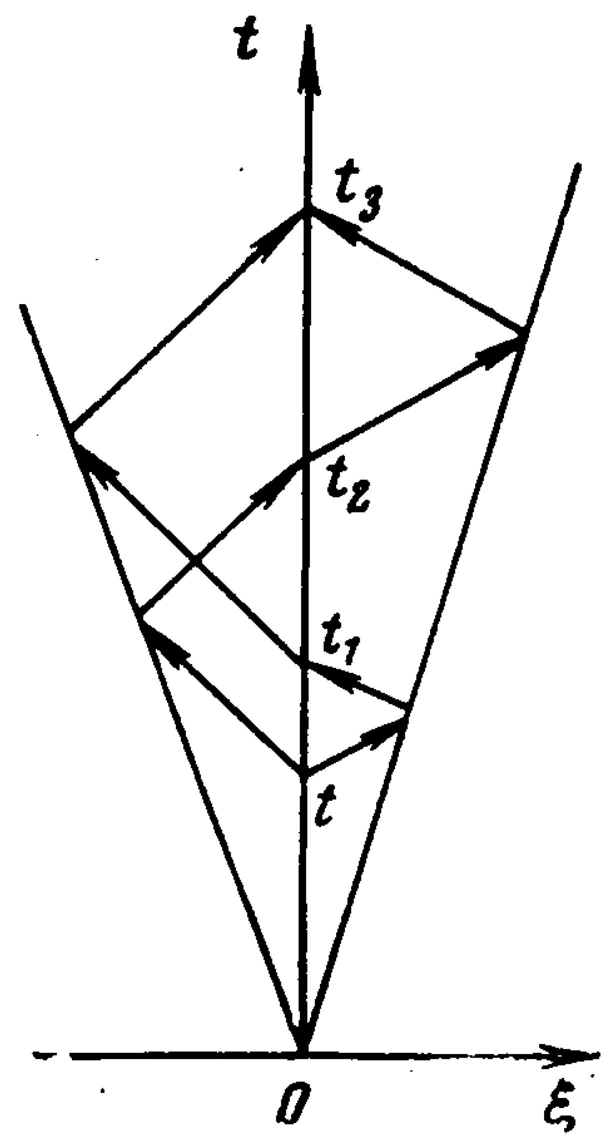
$$A = \pm 1\colon \ |K_r| < 1, \ |K_r| = 1, \ |K_r| > 1$$

В последнем случае $r = 1$ $(r = 2)$, когда среда занимает полупространство $\xi \geqslant 0$ (полупространство $\xi \leqslant 0$).

В общем случае, когда коэффициенты отражения K_1 и K_2 отличны от нуля и $0 < |A| < 1$, поведение возмущений будет более сложным и чтобы сформулировать условия устойчивости течения, необходим более детальный анализ, опирающийся на аналитическое представление решения.

3. Аналитическое представление решения задачи (2.1) можно получить методами операционного исчисления, введя предварительно новые независимые переменные $\tau = \ln(t / t_0)$, $\eta = \xi / j_r t$. Можно избрать и другой путь, обратив внимание на то, что при исследовании устойчивости рассматриваемого течения в силу свойств инвариантов I_r^+, I_r^- достаточо изучить их асимптотику на контактном разрыве.

Заметим, что звуковые волны, одновременно ушедшие от контактного разрыва в разные стороны, после однократного отражения от обоих скачков придут на контактный разрыв в один и тот же момент времени (фиг. 1). Указанные на фиг. 1 моменты времени связаны соотношениями



Фиг. 1

$$t_1 = t / B_1,\ t_2 = t / B_2,\ t_3 = t / B_1 B_2$$
$$(B_r = (1 - M_r) / (1 + M_r),\quad r = 1,\ 2)$$

Опираясь на этот факт и используя граничные условия (2.1), можно показать, что каждый из инвариантов $I_r^\pm$ должен при $\xi = 0$ и $t > t_0$ удовлетворять одному и тому же функциональному уравнению

$$I(\tau + \alpha + \beta) + AK_1 I(\tau + \beta) - AK_2 I(\tau + \alpha) - K_1 K_2 I(\tau) = 0 \tag{3.1}$$
$$\tau = \ln(t / t_0),\quad \alpha = -\ln B_1,\quad \beta = -\ln B_2$$

На интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \alpha + \beta$ инвариант $I(\tau)$ можно считать известной функцией начальных данных.

Методами операционного исчисления можно показать, что решение уравнения (3.1) представляется в виде

$$I(\tau) = \Psi(\tau)\Phi(0) + \int_0^\tau \Phi'(\tau - t)\Psi(t)\,dt$$

Здесь $\Phi(\tau)$ — периодическая функция, с основным периодом равным $\alpha + \beta$. На интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \alpha + \beta$ функция $\Phi(\tau)$ выражается через начальные данные, распоряжаясь которыми можно сделать $\Phi(\tau)$ дифференцируемой. Функция $\Psi(\tau)$ представляется в виде комплексного интеграла

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{e^{(\alpha+\beta)z} - 1}{z\varphi(z)} e^{\tau z} dz \tag{3.2}$$
$$\varphi(z) = e^{(\alpha+\beta)z} + AK_1 e^{\beta z} - AK_2 e^{\alpha z} - K_1 K_2$$

Здесь интегрирование ведется в плоскости комплексной переменной z вдоль прямой $\operatorname{Re} z = \sigma_0$, расположенной правее всех нулей функции $\varphi(z)$.

В тех специальных случаях, когда α и β соизмеримы, интеграл (3.2) вычисляется по таблицам для преобразований Лапласа (см., например, [7]), и для функций $\Psi(\tau)$ и $I(\tau)$ получаются простые формулы. Пусть $m\alpha = l\beta$, где m, l — целые взаимно простые числа, и пусть функция $y = g(t)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения (3.3), удовлетворяющее начальным условиям (3.4)

(3.3) $$y^{(m+l)}(t) + AK_1y^{(m)}(t) - AK_2\,y^{(l)}(t) - K_1K_2\,y(t) = 0$$

(3.4) $$y(0) = y'(0) = \ldots\, y^{(m+l-2)}(0) = 0,\; y^{(m+l-1)}(0) = 1$$

Тогда функции $\Psi(\tau)$ и $I(\tau)$ следующим образом выражаются через вычисленные при $t = 0$ производные функции $g(t)$:

$$\Psi(\tau) = \sum_{r=0}^{m+l-1} g^{(n+r)}(0),\quad I(\tau) = \sum_{r=0}^{m+l-1} \Phi\left(\tau - \frac{n+r+1}{l}\alpha\right) g^{(n+r)}(0)\quad (n \geqslant m+l)$$

где $n = n(\tau)$ — целое число, удовлетворяющее неравенству

$$n(\tau) \leqslant \tau\, l\, /\, \alpha < n(\tau) + 1$$

Асимптотическое поведение функции $I(\tau)$ зависит от расположения на комплексной плоскости $w = e^{\alpha z/l}$ корней λ_q многочлена

$$N(w) = w^{m+l} + AK_1w^m - AK_2w^l - K_1K_2$$

Если, в частности, все λ_q различны, то

$$g(t) = \sum_{q=1}^{m+l} \frac{e^{\lambda_q t}}{N'(\lambda_q)},\qquad g^{(n+r)}(0) = \sum_{q=1}^{m+l} \frac{\lambda_q^{r+n(\tau)}}{N'(\lambda_q)}$$

и течение будет устойчивым, если $|\lambda_q| \leqslant 1$.

Отметим, что при $K_1K_2 \neq 0$ многочлен $N(w)$ не может иметь корней, кратность которых больше двух, и двухкратных комплексных корней, по модулю равных единице. Многочлен $N(w)$ может иметь двухкратный корень $w = 1$ и $w = -1$. В этих случаях течение будет неустойчивым. Очевидно, что соответствующие кратным корням $w = \pm 1$ значения A, K_1, K_2 в пространстве (A, K_1, K_2) будут лежать либо на границе устойчивой области, либо в неустойчивой области (в примерах на фиг. 4 им соответствуют светлые точки).

Таким образом, при соизмеримых α и β течение будет асимптотически устойчивым, если все корни $N(w)$ лежат внутри единичного круга $|w| < 1$. В качестве примера приведем критерии асимптотической устойчивости для некоторых значений m и l

(3.5)
$$\begin{aligned} &1 + A(K_1 - K_2) - K_1K_2 > 0\\ &1 - A(K_1 - K_2) - K_1K_2 > 0 \qquad (m = l = 1)\\ &1 + K_1K_2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1 + A(K_1 - K_2) - K_1K_2 > 0\\ &1 - A(K_1 - K_2) + K_1K_2 > 0 \qquad (m = 2,\ l = 1)\\ &1 + AK_2(1 - K_1^2) - K_1^2K_2^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1 + A(K_1 - K_2) - K_1K_2 > 0\\ &(1 + K_1K_2)^2(1 - K_1K_2) - A^2K_2(K_1 + K_2)(1 - K_1^2) > 0\\ &1 - A(K_1 - K_2) - K_1K_2 > 0 \qquad (m = 3,\ l = 1) \end{aligned}$$

4. Наибольший интерес, естественно, представляют случаи, когда α и β несоизмеримы. В этих случаях асимптотическое поведение функции $I(\tau)$ также зависит от расположения нулей квазиполинома $\varphi(z)$.

При иррациональном α / β квазиполином $\varphi(z)$ — аналитическая почти периодическая функция в полосе $-\infty < \operatorname{Re} z < \infty$. Для фиксированных A, K_1, K_2 существуют такие постоянные d_1 и d_2, что все нули квазиполинома $\varphi(z)$ лежат в полосе $d_2 < \operatorname{Re} z < d_1$. При $\operatorname{Re} z > d_1$ функция $1 / \varphi(z)$ будет почти периодической и ограниченной [8].

Если $d_1 < 0$, то исследуемое течение будет асимптотически устойчивым. Можно показать, что при $d_1 < 0$

$$|I(\tau)| \leqslant \left\{\left[e^{2(\alpha+\beta)|\sigma_0|} - 1\right] \frac{1 + A^2(K_1^2 + K_2^2)}{8\pi\sigma_0^2}\right\} L e^{\tau\sigma_0}$$

$$d_1 < \sigma_0 < 0, \quad L = \max_{\operatorname{Re} z = \sigma_0} \left|\frac{1}{\varphi(z)}\right| \max_{0 \leqslant \tau \leqslant \alpha+\beta} |I'(\tau)|$$

Пусть σ^* — точная верхняя граница действительных частей нулей квазиполинома $\varphi(z)$ при α / β иррациональном. Установим критерии асимптотической устойчивости течения, т. е. соотношения между параметрами A, K_1 и K_2, при которых $\sigma^* < 0$. Рассмотрим уравнение

$$e^{-(\alpha+\beta)z} \varphi(z) \equiv 1 + AK_1 e^{-\alpha z} - AK_2 e^{-\beta z} - K_1 K_2 e^{-(\alpha+\beta)z} = 0 \tag{4.1}$$

Согласно теореме Кронекера (см., например, [8]), при α / β иррациональном аргументам второго и третьего слагаемого в (4.1) можно, распоряжаясь выбором $\operatorname{Im} z$, придать с любой степенью точности любую наперед заданную систему значений. Следовательно, замыкание множества действительных частей корней уравнения (4.1) будет совпадать с множеством значений σ, удовлетворяющих уравнению (4.2), где θ_r $(r = 1, 2)$ — произвольные действительные числа.

$$1 + A^2(c\zeta_1 - b\zeta_2 - cb\zeta_1\zeta_2) = 0 \tag{4.2}$$

$$c = \left|\frac{K_1}{A}\right| e^{-\alpha\sigma}, \quad b = \left|\frac{K_2}{A}\right| e^{-\beta\sigma}, \quad \sigma = \operatorname{Re} z, \quad \zeta_r = e^{-i\theta_r}$$

Запишем уравнение (4.2) в виде

$$\zeta_1 = \frac{1 - A^2 b\zeta_2}{A^2 c(b\zeta_2 - 1)} \tag{4.3}$$

Так как ζ_1 и ζ_2 могут принимать произвольные независимые значения на единичной окружности, то решением уравнения (4.3) будет совокупность всех значений σ, ν $(\nu = \cos\theta_2)$, для которых модуль (R) правой части в (4.3) равен единице. Из (4.3) следует, что

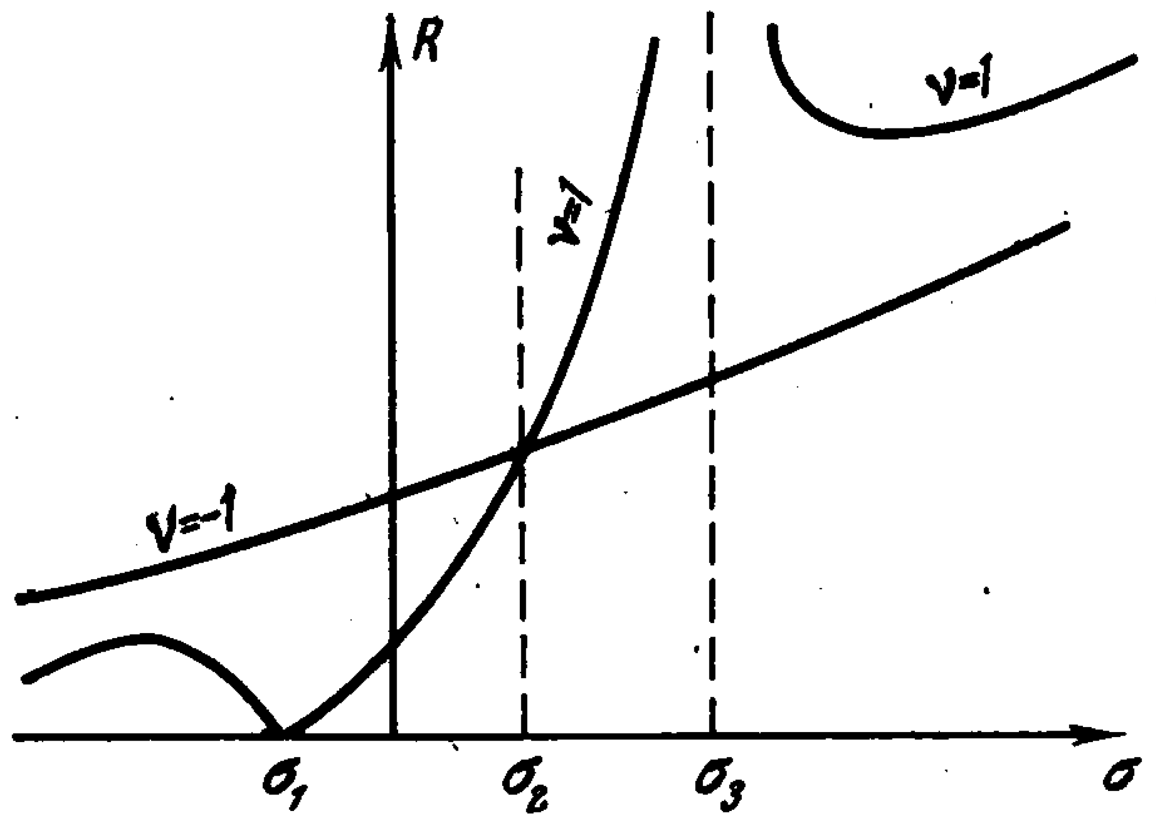
$$R = \frac{1}{A^2 c}\left[\frac{1 + (A^2 b)^2 - 2A^2 b\nu}{1 + b^2 - 2b\nu}\right]^{1/2}$$

Отметим некоторые необходимые для дальнейшего свойства функции $R(\sigma, \nu)$. Обозначим через σ_r $(r = 1, 2, 3)$ значения σ, при которых $b(\sigma_r) = |A|^{r-3}$. Вычислив производные функции $R(\sigma, \nu)$. Нетрудно установить, что $(\partial R / \partial\sigma) > 0$ при $\nu = -1$ и при $\nu = 1$ и $\sigma_1 \leqslant \sigma < \sigma_3$, а

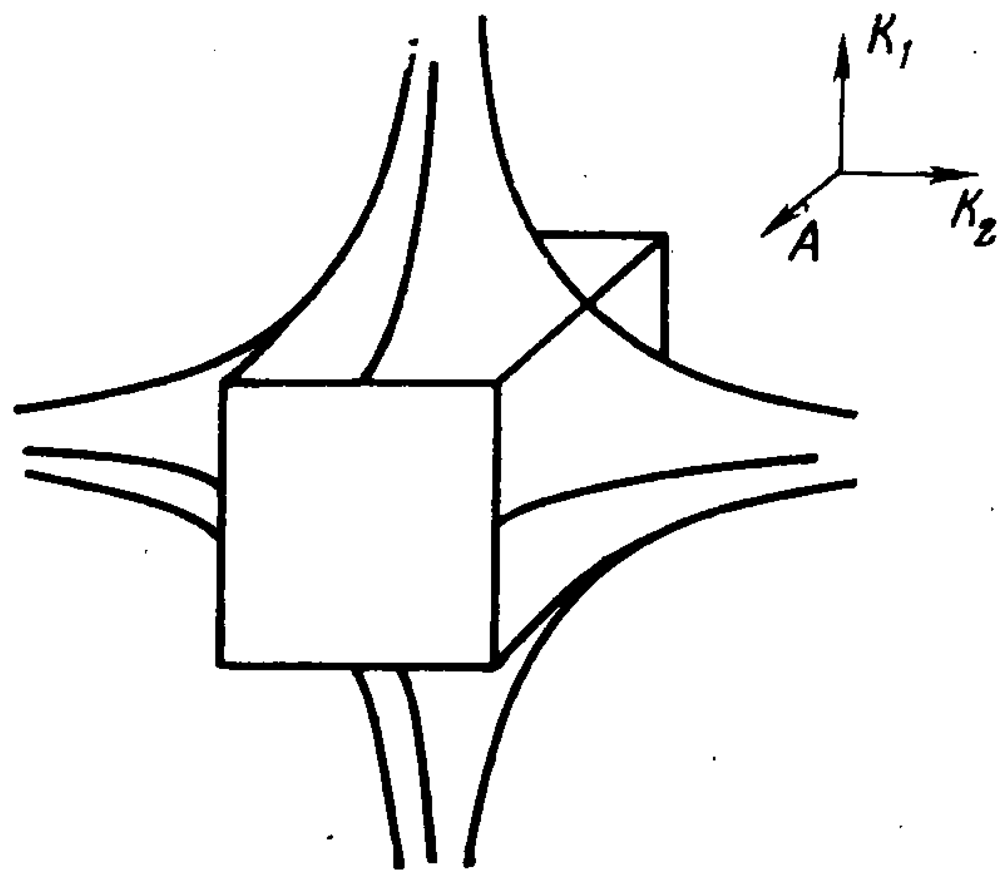
$$\frac{\partial R}{\partial \nu} \begin{cases} < 0, & -\infty < \sigma < \sigma_2 \\ = 0, & \sigma = \sigma_2 \\ > 0, & \sigma_2 < \sigma < \infty \end{cases}$$

Отметим также, что $R(\sigma_1, 1) = 0$. Перечисленных свойств функции $R(\sigma, \nu)$ достаточно, чтобы получить требуемые выводы (для иллюстрации на фиг. 2 приведены графики функций $R(\sigma, 1)$, $R(\sigma, -1)$).

Очевидно, что уравнение (4.3) всегда имеет корни в правой полуплоскости, если $\sigma_1 \geqslant 0$. Пусть $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$. В этом случае $\min_{\sigma \geqslant 0} R(\sigma, \nu) = R(0, 1)$. Если $\sigma_2 \leqslant 0$, то $\min_{\sigma \geqslant 0} R(\sigma, \nu) = R(0, -1)$. Следовательно,



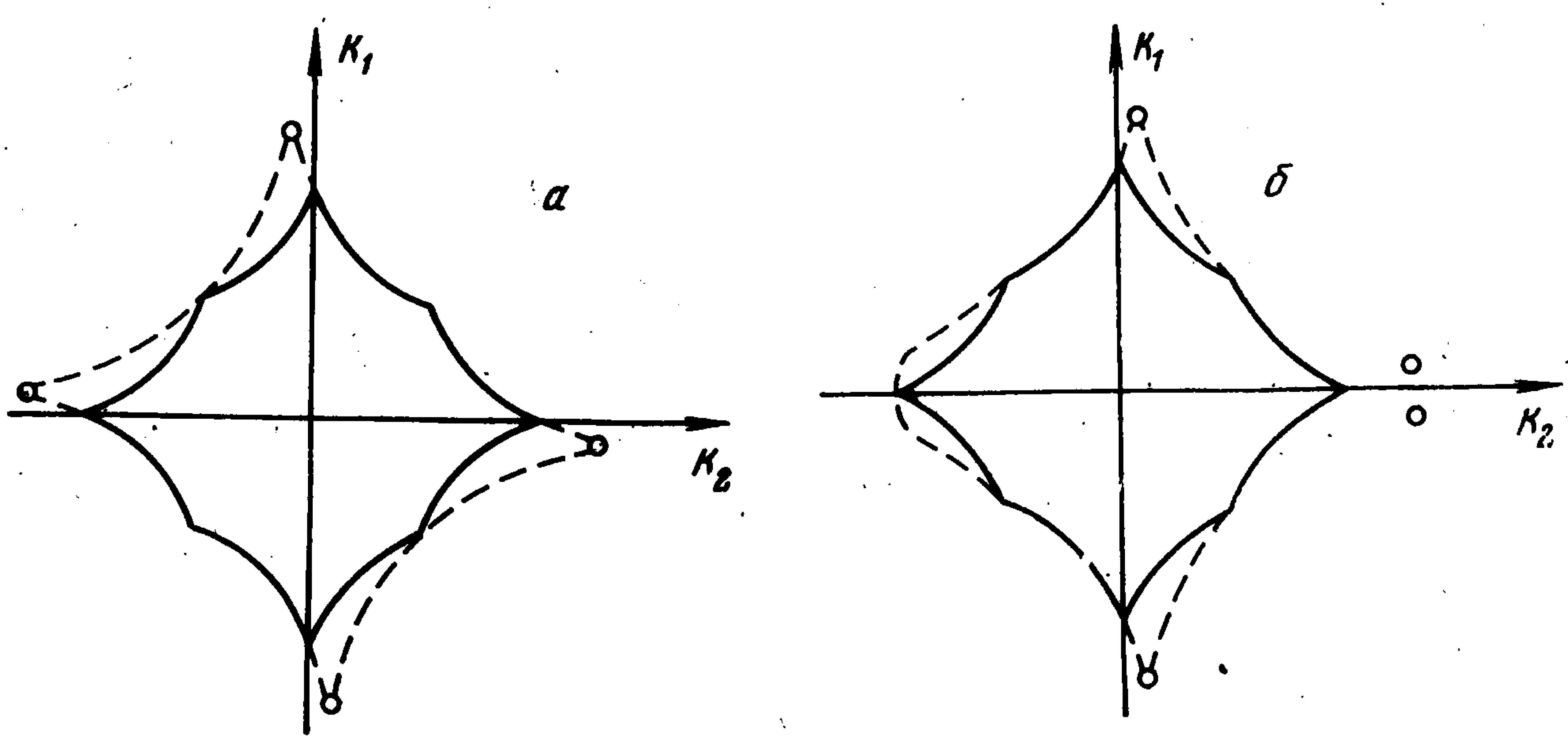
Фиг. 2



Фиг. 3

$\sigma^* < 0$ при следующих условиях: $R(0, 1) > 1$ при $1 < |K_2| < 1 / |A|$, а при $|K_2| \leqslant 1$ $R(0, -1) > 1$.

Отсюда вытекает, что при иррациональном α / β течение будет асимптотически устойчивым, если коэффициенты A, K_1, K_2 принадлежат области,



Фиг. 4

определяемой неравенствами

$$1 + |A|(|K_1| - |K_2|) - |K_1K_2| > 0 \tag{4.4}$$

$$1 - |A|(|K_1| - |K_2|) - |K_1K_2| > 0$$

Совокупность точек $P(A, K_1, K_2)$, удовлетворяющих критериям асимптотической устойчивости (4.4), а в частных случаях — сформулированным в (2.3), образует в пространстве параметров A, K_1, K_2 область Q. Ее общий вид дан на фиг. 3. Границы области Q в плоскости $A = A_1$ $(0 < A_1 < 1)$ показаны на фиг. 4. Сплошная линия соответствует α / β иррациональным. Для сравнения на фиг. 4 показана также граница области Q при $\alpha = \beta$ (*а*), $2\alpha = \beta$ (*б*). Соответствующие этим случаям критерии асимптотической устойчивости даны в (3.5). При α / β рациональных границы области Q в той части, где они не совпадают с границами области Q при иррациональных α / β, обозначены пунктирными линиями.

Необходимо подчеркнуть следующее. Критерии (2.3), (3.5), (4.4) получены в предположении, что присутствующие в потоке скачки эволюционны ($\mu_r \neq 2\,(1 + M_r)$, $M_r \leqslant 1$, $M_{0r} \geqslant 1$), а первое из неравенств (1.1) при их выводе не использовалось. С другой стороны, критерии устойчивости течения (3.5), (4.4) и сформулированные в (2.3) допускают скачки, неустойчивые по отношению к малым неодномерным возмущениям. На таких скачках $\mu < 0$ или $\mu > 2\,(1 + M)$ [6]. Течения, содержащие такие скачки, следует считать нереализующимися.

Иными словами, рассматриваемое течение будет устойчивым, если на скачках удовлетворяются неравенства (1.1) и выполнен тот из полученных в п. 2—4 критериев устойчивости, который соответствует данному течению.

Поступила 18 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е.* К теории разрывов в жидкости. Соб. соч., т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1949.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
3. *Галин Г. Я.* О взаимодействии малых возмущений с обычными и комбинированными простыми волнами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
4. *Бам-Зеликович Г. М.* Распад произвольного разрыва в горючей смеси. В сб.: Теоретическая гидромеханика, вып. 4. М., Оборонгиз, 1949.
5. *Гогосов В. В.* Распад произвольного разрыва в магнитной гидродинамике. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.
6. *Дьяков С. П.* Об устойчивости ударных волн. ЖЭТФ, 1954, т. 27, вып. 3.
7. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, М., Физматгиз, 1960.
8. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М., Гостехиздат, 1953.