

МОДЕЛЬ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. А. Выслоух, В. П. Кандидов, С. С. Чесноков

(Москва)

Рассматривается динамическая устойчивость тонкой пластины в сверхзвуковом потоке газа при малых числах Струхалия. Аэродинамические силы определяются на основе той же сетки разбиения, что и при представлении пластины в виде модели из конечных элементов. Используются прямоугольные элементы, имеющие по четыре координаты в каждом узле. В результате редукции порядка уравнения движения число динамических переменных уменьшено до одной в каждом узле. Приводятся примеры расчета колебаний пластины в пустоте и в потоке.

Использование метода конечных элементов в задачах аэроупругости в общем случае, когда аэродинамические воздействия определяются численно [1, 2], приводит к большим трудностям. Это связано с тем, что для расчета аэродинамических сил используется сетка разбиений, не связанная с моделью конечных элементов, представляющей систему. Аэродинамическая сетка обычно состоит из сравнительно большого числа ромбовидных [1] или прямоугольных ячеек [2] и меняется с изменением числа Маха. Сетка конечных элементов имеет более крупный шаг и жестко связана с конструкцией. Ее изменение требует значительных вычислительных затрат.

Представляется целесообразным развитие такого подхода к задачам аэроупругости, в котором расчет аэродинамических воздействий производится на основе той же сетки разбиения, что и описание упругомассовых свойств системы. Чтобы увеличение шага сетки не понизило точность вычисления аэродинамических сил, скосы потока в пределах ячеек представляются в виде степенного ряда от координат. Коэффициенты ряда полностью определяются вектором обобщенных координат элемента. Используя обычные условия сопряжения элементов, можно записать уравнение движения модели упругой пластины в сверхзвуковом потоке в замкнутом виде, без введения априорных форм колебаний.

$$(0.1) \quad (K + \lambda^2 M)\mathbf{q} = \mathbf{Q}_a, \quad \mathbf{Q}_a = \sum_{n=0}^N \lambda^n A_n \mathbf{q}$$

Здесь \mathbf{q} — вектор обобщенных координат модели, \mathbf{Q}_a — вектор аэродинамических сил в узлах модели, λ — частотный параметр. Аэродинамические матрицы модели A_n , матрицы жесткости K и масс M образуются из соответствующих матриц отдельных элементов с учетом их взаимного расположения. Элементы матриц A_n зависят от числа Маха M_0 и скорости потока U . В случае треугольных элементов способ получения матриц A_n развит в работе [3]. При исследовании колебаний тонких пластин часто применяются так называемые согласованные элементы, которые имеют четыре обобщенных координаты в каждом узле. В задачах динамики неоднородных систем необходима мелкая сетка разбиения, поэтому порядок системы (0.1), определяемый рангом матриц M и A_n , сильно возрастает, в то время как он ограничен объемом памяти ЦВМ. Это ограничение наиболее существенно при исследовании неконсервативных систем, требующем определения собственных значений неэрмитовых матриц.

Один из возможных путей уменьшения порядка системы (0.1), т. е. числа динамических переменных модели, без изменения сетки разбиения предложен в работе [4].

Он основан на введении двух систем базисных функций: «полной» — для получения матрицы жесткости K и «укороченной» — для получения матрицы масс M .

В данной работе этот прием используется для редукции числа степеней свободы модели из согласованных элементов в задаче динамической устойчивости пластины в сверхзвуковом потоке. Рассматривается динамическая устойчивость квадратной консольной пластины в потоке газа при малых числах Струхала.

1. Определение аэродинамических сил. В рамках линейной теории нестационарного сверхзвукового течения основное уравнение для потенциала возмущений $\Phi(x, y, z, t)$ имеет вид [5]

$$(1.1) \quad (1 - M_0^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{2M_0}{c_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Если деформация пластины представима в форме $z(x, y, t) = Z(x, y)e^{\lambda t}$, где $\lambda = \delta + i\omega$, c_0 — скорость звука, то решение уравнения (1.1) в плоскости $Z = 0$ запишется в виде

$$(1.2) \quad \Phi(x, y, 0, t) = -\frac{1}{\pi} \int \int_{S(\xi, \eta)} W(\xi, \eta, t) (rs)^{-1/2} \times \\ \times \exp\left[-\frac{\lambda M_0^2 (x - \xi)}{U\beta^2}\right] \operatorname{ch}\left[\frac{\lambda M_0 (rs)^{1/2}}{U\beta^2}\right] d\xi d\eta \\ \beta^2 = M_0^2 - 1, \quad r = (x - \xi) - \beta(y - \eta), \quad s = (x - \xi) + \\ + \beta(y - \eta)$$

Здесь $W(\xi, \eta, t)$ — скос потока в точке ξ, η , который связан с формой прогиба пластины соотношением

$$(1.3) \quad W(\xi, \eta, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial \xi}\right) z(\xi, \eta, t)$$

Интегрирование в выражении (1.2) производится по площади $S(\xi, \eta)$, заключенной в обратном конусе Маха с вершиной в точке x, y . В дальнейшем ограничимся случаем малых чисел Струхала $k = \lambda L_x / U \ll 1$, где L_x — характерный размер пластины вдоль потока. Это позволяет разложить в ряд подынтегральное выражение в (1.2). При малых значениях числа Струхала (практически $k \sim 0.1 \div 0.2$) можно ограничиться членами первого порядка по k , пренебрегая членами $O(k^2)$, которые соответствуют присоединенным массам. Тогда потенциал примет вид

$$(1.4) \quad \Phi(x, y, t) = \int \int_{S(\xi, \eta)} W(\xi, \eta, t) [G_0(\xi, \eta, x, y) + \lambda G_1(\xi, \eta, x, y) / U] d\xi d\eta \\ G_0 = -(rs)^{-1/2} / \pi, \quad G_1 = -M_0^2 (x - \xi) G_0 / \beta^2$$

При $M_0 k \gg 1$ можно пользоваться поршневой теорией, а при $k \sim 1$ необходимо учитывать в (1.2) члены разложения более высокого порядка.

Рассмотрим модель пластины из конечных элементов. На фиг. 1 изображена пластина, разбитая на ряд прямоугольных элементов со сторонами a^j, b^j . Точки пересечения линий разбиения называются узлами. Форму перемещения отдельного элемента возьмем в виде

$$(1.5) \quad z^j = \psi^T a w^j e^{\lambda t}$$

Здесь $\psi(\xi', \eta')$ — строка базисных функций, w^j — вектор поперечных смещений j -го элемента.

В качестве ψ возьмем укороченную систему

$$(1.6) \quad \psi^T = \{1, \xi^*, \eta^*, \xi^* \eta^*\}, \quad \xi^* = \xi' / a^j, \quad \eta^* = \eta' / b^j$$

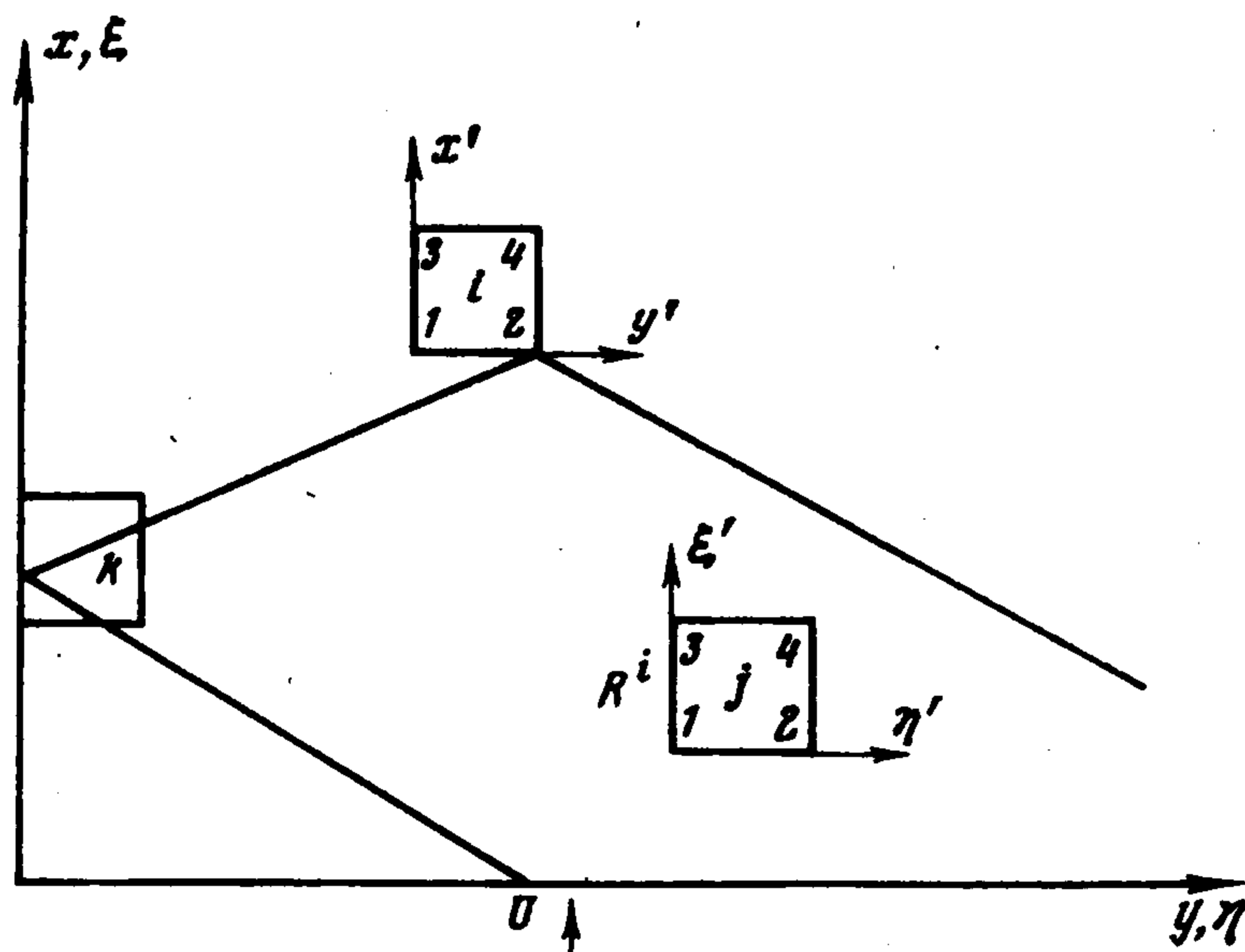
Тогда

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Скос потока на j -м элементе, согласно (1.3), будет

$$(1.7) \quad W^j(\xi', \eta', t) = \left(U \frac{\partial \psi^T}{\partial \xi} + \lambda \psi^T \right) a w^j e^{\lambda t}$$

Подставив (1.7) в выражение (1.4) и отбросив члены второго порядка малости, получим после интегрирования по площади j -го элемента



Фиг. 1

$S^j(\xi, \eta)$ потенциал возмущения в точке (x, y) , связанный со скосом потока на j -м элементе

$$(1.8) \quad \Phi^{ij}(x, y, t) = \left(U \iint_{S^j} \frac{\partial \psi^T}{\partial \xi} G_0 d\xi' d\eta' + \right. \\ \left. + \lambda \iint_{S^j} \left(\psi^T G_0 + \frac{\partial \psi^T}{\partial \xi} G_1 \right) d\xi' d\eta' \right) a w^j e^{\lambda t}$$

Полагая в (1.8) x, y равными координатам узлов 1 ÷ 4 i -го элемента, получим вектор потенциалов в узлах i -го элемента, обусловленный скосом на j -м (фиг. 1)

$$(1.9) \quad \Phi^{ij} = (UC^0 + \lambda a^j C^1) w^j$$

Элементы матриц C^0, C^1 вычисляются по формулам

$$(1.10) \quad C_{11}^0 = -C_{12}^0 = -b^j \int_0^1 \int_0^1 (1 - \eta^*) G_0 d\xi^* d\eta^* \\ C_{13}^0 = -C_{14}^0 = -b^j \int_0^1 \int_0^1 \eta^* G_0 d\xi^* d\eta^*, \quad G_0 = G_0(\xi_l^*, \eta_l^*, x_l, y_l)$$

$$\begin{aligned}
 (1.11) \quad C_{11}^1 &= b^j \int_0^1 \int_0^1 \left[(1 - \xi^* - \eta^* + \xi^* \eta^*) G_0 - (1 - \eta^*) \frac{G_1}{a^j} \right] d\xi^* d\eta^* \\
 C_{12}^1 &= b^j \int_0^1 \int_0^1 \left[\xi^* (1 - \eta^*) G_0 + (1 - \eta^*) \frac{G_1}{a^j} \right] d\xi^* d\eta^* \\
 C_{13}^1 &= b^j \int_0^1 \int_0^1 \left[\eta^* (1 - \xi^*) G_0 - \eta^* \frac{G_1}{a^j} \right] d\xi^* d\eta^* \\
 C_{14}^1 &= b^j \int_0^1 \int_0^1 \left[\xi^* \eta^* G_0 + \eta^* \frac{G_1}{a^j} \right] d\xi^* d\eta^*, \quad G_1 = G_1(\xi_l^*, \eta_l^*, x_l, y_l)
 \end{aligned}$$

Здесь индекс l означает номер строки для элементов матриц C и принимает значения 1, 2, 3, 4.

При определении давления $p^{ij}(x, y)$, создаваемого на i -м элементе, положим, что потенциал внутри него является линейной комбинацией потенциалов узловых точек

$$(1.12) \quad \Phi^{ij}(x', y', t) = \psi^T a \Phi^{ij} e^{\lambda t}$$

где x', y' — локальная система координат i -го элемента (фиг. 1), $\psi(x', y')$ — система базисных функций, совпадающая с (1.6). Подставляя $\Phi^{ij}(x', y', t)$ в известное выражение для давления [5] и учитывая (1.9) (1.12), найдем

$$\begin{aligned}
 (1.13) \quad p^{ij}(x', y', t) &= 2\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi^{ij}(x', y', t) = \\
 &= 2\rho_0 U \left[U \frac{\partial \psi^T}{\partial x} C^0 + \lambda \left(\psi^T C^0 + \frac{\partial \psi^T}{\partial x} C^1 \right) \right] w^j e^{\lambda t}
 \end{aligned}$$

Для вычисления вектора поперечных сил в узлах P_a^{ij} , эквивалентных нагрузке $p^{ij}(x', y', t)$, воспользуемся методом виртуальных работ. Возьмем форму перемещения i -го элемента в виде (1.5). Тогда

$$(1.14) \quad P_a^{ij} e^{\lambda t} = a^T \int_{S^i} \psi(x', y') p^{ij}(x', y', t) dx' dy'$$

Подставляя (1.13) в формулу (1.14) и интегрируя по площади i -го элемента, получим

$$P_a^{ij} = 2\rho_0 U [U d C^0 b^i + \lambda (d C^1 + e C^0) a^i b^i] w^j$$

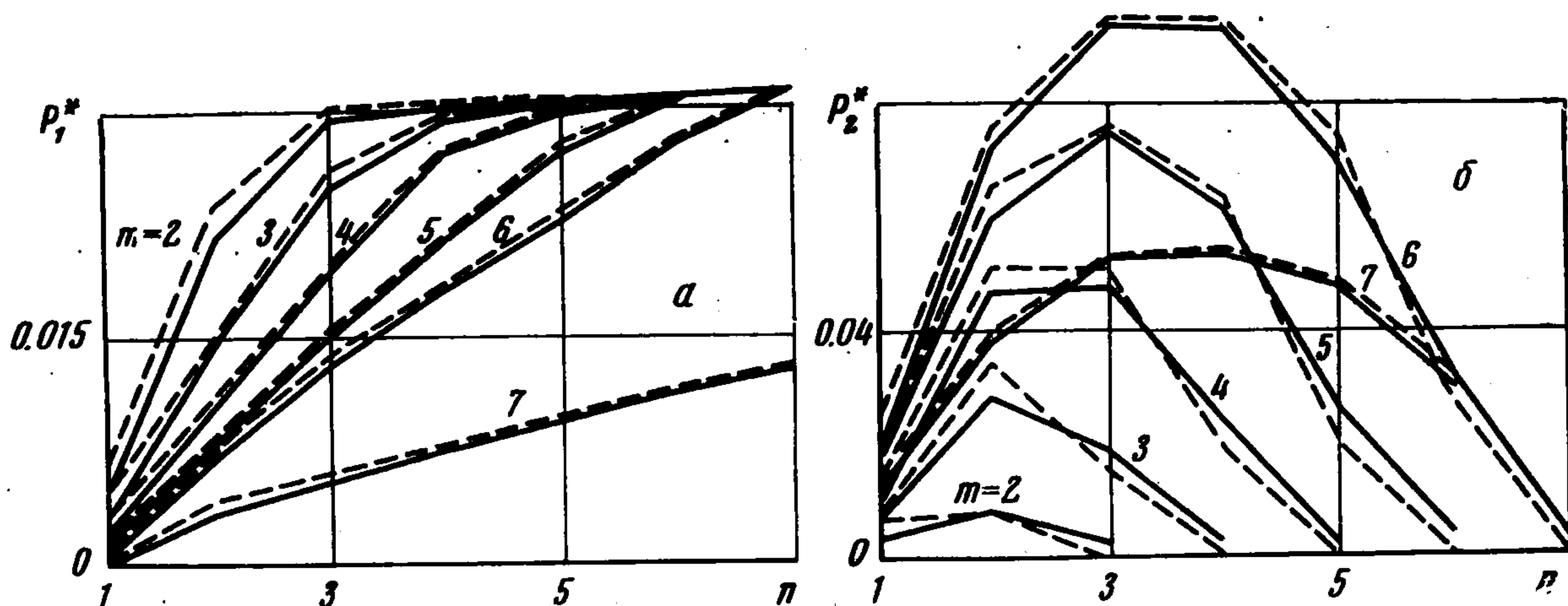
$$d = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}, \quad e = \frac{1}{36} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Введем матрицы взаимной аэродинамической жесткости B^{ij} и демпфирования D^{ij} для i -го элемента, обусловленные движением j -го. Тогда

$$P_a^{ij} = 2\rho_0 U (U b^i B^{ij} + \lambda a^i b^i D^{ij}) w^j, \quad B^{ij} = d C^0, \quad D^{ij} = d C^1 + e C^0$$

Столбец суммарных сил P_a^i , действующих в узлах i -го элемента, вычисляется суммированием по j -м элементам, которые лежат полностью или

частично в обратном конусе Маха. Для учета концевго эффекта применяется теорема Эварда [5] об эквивалентных областях интегрирования, справедливая для $k \ll 1$. Например, при получении матриц B^{ik} и D^{ik} для k -го элемента, частично лежащего внутри конуса Маха, необходимо по-



Фиг. 2

ложить подынтегральные функции $G_0(\xi, \eta, x, y)$ и $G_1(\xi, \eta, x, y)$ в формулах (1.10), (1.11) равными нулю вне области R^i (см. фиг. 1). Вблизи левого края пластины R^i задается неравенствами

$$\xi \leq -\beta|\eta - y| + x, \quad \xi \geq -\beta|\eta| + (x - \beta y)$$

Для того чтобы образовать аэродинамические матрицы B и D всей модели, необходимо просуммировать силы P_a^i в узлах соседних элементов, используя условие непрерывности смещения. Результирующие аэродинамические силы будут линейно зависеть от вектора узловых смещений модели w

$$(1.15) \quad P_a = 2\rho_0 U^2 L_x B w e^{\lambda t} + 2\rho_0 U L_x L_y \lambda D w e^{\lambda t}$$

Интегралы в формулах (1.10) и (1.11) могут быть вычислены аналитически, но более целесообразно весь алгоритм получения матриц B и D реализовать на ЦВМ. При численном интегрировании в соотношениях (1.10) и (1.11) область интегрирования по элементам, частично лежащим в области R^i , необходимо сузить, чтобы избавиться от особенностей в подынтегральных функциях.

Рассмотрим простой пример расчета аэродинамических сил, который позволяет сравнить приближенное решение с «точным» аналитическим. Пусть жесткая прямоугольная пластина с хордой $L_x = 1$ и удлинением, равным двум, совершает гармонические колебания вокруг передней кромки $x = 0$, т. е.

$$(1.16) \quad z(x, t) = \alpha x e^{i\omega t}$$

Пластина разбита на 6 элементов вдоль хорды и 12 вдоль размаха. В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть левую половину пластины. Матрицы аэродинамической жесткости B и демпфирования D вычислялись на ЦВМ «МИР-1» для потока с $M_0 = \sqrt{2}$. Подставляя в (1.14) эти матрицы и вектор $w(t)$, соответствующий форме (1.16), получим значения действительной и мнимой частей аэродинамических сил в узловых точках.

Результаты расчета представлены на фиг. 2, где по оси ординат отложены безразмерные значения действительной P_1^* и мнимой P_2^* частей узловых сил. По оси абсцисс

графиков указаны номера разбиений n , параллельных оси ox . Значения сил нанесены точками для узлов в различных сечениях, перпендикулярных потоку, и соединены условно сплошной линией. Возле образовавшихся ломаных указаны номера этих сечений m .

Для данного примера нетрудно вычислить точное значение узловых сил, исходя из аналитического выражения для давления. Скос потока, соответствующий форме перемещения (1.16), равен $W(\xi, \eta, t) = \alpha(U + \lambda\xi)e^{i\omega t}$.

Подставляя $W(\xi, \eta, t)$ в (1.2), получим аналитическое выражение для распределения потенциала

$$\Phi(x, y, t) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{\pi x}{2} - xA + 2S + \lambda \left(-\frac{\pi x^2}{4} + \frac{x^2 A}{2} + (x - 2y)S \right) \right] e^{\lambda t}, & x > y \\ -\frac{\alpha}{\pi} \left[\pi x - \lambda \pi \frac{x^2}{2} \right] e^{\lambda t}, & x \leq y \end{cases}$$

$$A = \arcsin \left(1 - \frac{2y}{x} \right), \quad S = \sqrt{y(x-y)}$$

Отсюда

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{2\rho_0 U \alpha}{\pi} \left[U \left(\frac{\pi}{2} - A \right) + 4\lambda S \right], & x > y \\ 2\rho_0 U^2 \alpha, & x < y \end{cases}$$

Точные значения узловых сил, эквивалентных давлению $p(x, y)$, получим с помощью выражения (1.14). Соответствующие значения действительной и мнимой части сил приведены на фиг. 2, где они условно соединены штриховой линией. Из сопоставления кривых видно хорошее совпадение приближенных и точных значений узловых сил вдали от кромок пластины и удовлетворительное вблизи передней и боковой кромок. Увеличивая число элементов, можно повысить точность вычислений.

Заметим, что значения потенциала, вычисленные в узлах модели, совпадают с точными, так как для рассмотренного примера класс допустимых перемещений элементов (1.5) включает форму перемещения (1.16). Отклонение расчетных сил от точных связано с представлением потенциала внутри элемента (1.12).

2. Модель упругой пластины из согласованных элементов. Рассмотрим i -й элемент сетки, изображенной на фиг. 1. Для получения его матрицы жесткости K^i введем в каждом узле, кроме поперечного смещения w , три координаты [6]: φ , θ , τ . Эти величины образуют вектор обобщенных координат элемента, имеющий 16 компонент

$$(2.1) \quad \mathbf{q}^i = \text{col} \{w, \varphi, \theta, \tau\}$$

Форму прогиба элемента z^{*i} возьмем в виде, аналогичном (1.5), используя полную систему базисных функций

$$(2.2) \quad z^{*i}(\xi^*, \eta^*, t) = \chi^T(\xi^*, \eta^*) a^* \mathbf{q}^i e^{\lambda t}$$

$$\chi^T(\xi^*, \eta^*) = \{\xi^{*l}, \eta^{*k}\}, \quad l, k = 0, 1, 2, 3$$

Числовая матрица a^* имеет порядок 16×16 .

Ограничимся случаем однородной изотропной пластины с жесткостью на изгиб D^0 . Плотность энергии упругой деформации равна

$$\varepsilon(\xi, \eta, t) = \frac{D^0}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \eta^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \eta^2} \right) + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right]$$

Подставляя z^* в виде (2.2), после простых преобразований получим

$$\varepsilon^i(\xi', \eta', t) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{iT} \mathbf{a}^{*T} E \mathbf{a}^* \mathbf{q}^i, \quad E(\xi, \eta) = D^0 \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \chi^T}{\partial \xi^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \chi^T}{\partial \eta^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \chi^T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \chi^T}{\partial \xi^2} \right) + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \chi^T}{\partial \xi \partial \eta} \right]$$

После интегрирования по площади S^i найдем энергию упругой деформации элемента, которую можно представить следующим образом:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{iT} K^i \mathbf{q}^i, \quad K^i = \mathbf{a}^{*T} \int \int_{S^i} E(\xi, \eta) d\xi d\eta \mathbf{a}^*$$

Матрица K^i жесткости элемента определяет вектор обобщенных сил упругой деформации $\mathbf{Q}^i(t)$, сопряженный вектору $\mathbf{q}^i(t)$

$$\mathbf{Q}^i = K^i \mathbf{q}^i, \quad \mathbf{Q}^i = \text{col} \{P_e, N_e, T_e, H_e\}$$

Компонентами вектора \mathbf{Q}^i являются поперечные силы упругости P_e^i и моменты N_e^i, T_e^i, H_e^i , возникающие в узлах элемента при его деформации.

При получении матрицы масс элемента M^i воспользуемся укороченной системой базисных функций $\psi(\xi, \eta)$, взяв форму перемещения в виде (1.5). Тогда плотность сил инерции на элементе будет

$$(2.3) \quad p_m^i = -\lambda^2 \rho h \psi(\xi', \eta') a w e^{\lambda t}$$

Здесь ρ — плотность материала, h — толщина пластины. Подставляя (2.3) и (1.14) и интегрируя по площади i -го элемента, получим вектор сил инерции в узлах (M^i — матрица масс элемента порядка 4×4)

$$P_m^i = -\lambda^2 M^i w^i, \quad M^i = \mathbf{a}^T \int \int_{S^i} \rho h \psi \psi^T d\xi d\eta \mathbf{a}$$

Условия сопряжения элементов, изложенные в п. 1, в случае упругой пластины дополняются требованиями непрерывности переменных φ, ϑ, τ в узлах. Важно отметить, что при выполнении указанных требований обеспечивается не только непрерывность, но и гладкость формы прогиба на границе соседних элементов. В связи с этим элементы с обобщенными координатами (2.1) получили название согласованных. Используя условия сопряжения, можно образовать вектор обобщенных координат модели \mathbf{q} .

Записывая условия уравновешенности сил P_e, P_m и моментов N_e, T_e, H_e в каждом узле, получим систему четырех матричных уравнений:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} K^{pw} \mathbf{w} + K^{p\varphi} \boldsymbol{\varphi} + K^{p\vartheta} \boldsymbol{\vartheta} + K^{p\tau} \boldsymbol{\tau} + \lambda^2 M \mathbf{w} + \\ + 2\rho_0 U^2 L_x B \mathbf{w} + 2\rho_0 \lambda U L_x L_y D \mathbf{w} = 0 \\ K^{Nw} \mathbf{w} + K^{N\varphi} \boldsymbol{\varphi} + K^{N\vartheta} \boldsymbol{\vartheta} + K^{N\tau} \boldsymbol{\tau} = 0 \\ K^{Tw} \mathbf{w} + K^{T\varphi} \boldsymbol{\varphi} + K^{T\vartheta} \boldsymbol{\vartheta} + K^{T\tau} \boldsymbol{\tau} = 0 \\ K^{Hw} \mathbf{w} + K^{H\varphi} \boldsymbol{\varphi} + K^{H\vartheta} \boldsymbol{\vartheta} + K^{H\tau} \boldsymbol{\tau} = 0 \end{aligned}$$

Здесь K^{pw} — клетка матрицы жесткости порядка $R \times R$, описывающая связь между поперечными силами P_e и смещениями w , $K^{p\varphi}$ — между силами P_e и углами φ и т. д., R — число свободных узлов модели.

Из системы (2.4) видно, что переменные φ , ψ , τ могут быть линейно выражены через w . После матричных преобразований, подобных изложенным в [4], можно привести систему (2.4) к виду (K^* — редуцированная матрица жесткости)

$$2.5) \quad K^*w + \lambda^2 M w + 2\rho_0 U^2 L_x B w + 2\rho_0 U \lambda L_x L_y D w = 0$$

В результате порядок матричного уравнения движения модели снижается вчетверо и становится равным числу свободных узлов R .

3. Примеры расчета. Для оценки точности решения при использовании предлагаемой редукции числа степеней свободы рассмотрим свободные колебания квадратной консольной пластины со стороной $L = 0.24$ м. Остальные параметры пластины таковы: модуль Юнга $E = 1.96 \times 10^{11}$ н/м² (сталь), коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, $\rho = 7.8 \times 10^3$ кг/м³, $h = 0.00227$ м.

В таблице приведены значения круговых частот ω для модели пластины из согласованных элементов при разбиениях 3×3 , 4×4 , 5×5 , вычисленные с помощью БЭСМ-4М. Там же помещены частоты модели из несогласованных элементов с укороченными матрицами масс [4] и экспериментальные данные [7].

тон	Согласованные элементы			Несогласованные элементы			
	3×3	4×4	5×5	3×3	4×4	5×5	эксперимент
1	205.0	206.6	207.2	205.4	206.6	206.8	208.4
2	512.9	511.1	510.5	514.1	511.7	511.1	510.5
3	1342.3	1324.4	1308.8	1379.9	1343.5	1320.8	1280.2
4	1778.8	1730.4	1696.9	1766.8	1720.2	1689.8	1639.6

Из таблицы видна хорошая сходимость частот, полученных для согласованных элементов, к экспериментальным значениям. Приведенный пример иллюстрирует эффективность редукции числа степеней свободы в случае согласованных элементов.

Динамическая устойчивость рассматриваемой пластины исследуется для случая потока, набегающего вдоль заземленной стороны. Для расчета выбрана модель из 5×5 квадратных согласованных элементов. Она имеет 30 степеней свободы и обеспечивает точность не хуже 3.5% в определении первых четырех частот колебаний в пустоте. Аэродинамические матрицы, описывающие воздействие сверхзвукового потока, вычислены для ряда значений числа Маха без учета аэродинамического демпфирования. С помощью ЦВМ определены собственные значения $\lambda = \delta + i\omega$ уравнения (2.5) при разных скоростях потока.

Поведение λ при изменении скорости обычно рассматривается на комплексной плоскости. С ростом скорости потока собственные значения первых двух тонов колебаний λ_1 и λ_2 перемещаются вдоль оси ω , оставаясь чисто мнимыми. Начиная с некоторой скорости, λ_1 и λ_2 сближаются одно с другим. Наконец, при критическом значении $M_0^* = 3.1$ они становятся комплексными: мнимые части λ_1 и λ_2 совпадают, действительные отличаются знаком. Значения частот ω_1 и ω_2 при разных M_0 приведены ниже.

$M_0 = \sqrt{2}$	2.3	2.8	2.9	3.0	3.1
$\omega_1 = 239.9$	251.0	263.8	268.3	289.0	317.8
$\omega_2 = 356.8$	397.6	385.6	379.3	352.9	317.8

В случае использования поршневой теории потеря устойчивости происходит на меньших M_0 , критические частоты при этом выше. Так, в работе [8] методом конечных элементов получены значения $M_0^* = 2.96$, $\omega^* = 386.9$, в [9] методом Ритца — значения $M_0^* = 2.78$, $\omega^* = 384.6$. Это различие объясняется, по-видимому, концевым эффектом на свободной кромке, параллельной заземленному краю пластины.

Из уравнения (2.5) были вычислены собственные векторы. С их помощью можно получить распределение амплитуд и фаз колебаний в различных точках пластины и выяснить физическую картину потери устойчивости.

Авторы благодарны С. П. Стрелкову за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступила 20 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Т. Крыло в нестационарном потоке газа. М., «Наука», 1971.
2. Bisplinghoff R. L., Ashley H. Principles of aeroelasticity. N. Y., Willey, 1962.
3. Kari-Appa. Kinematically consistent unsteady aerodynamic coefficients in supersonic flow. Internat. J. Numer. Meth. Engng, 1973, vol. 7, No. 2.
4. Vysloukh V. A., Kandidov V. P., Chesnokov S. S. Reduction of the degrees of freedom in solving dynamic problems by finite element method. Internat. J. Numer. Meth. Engng, 1973, vol. 7, No. 2.
5. Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфман Р. Л. Аэроупругость. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
6. Carson W. G., Newton R. E. Plate buckling analysis using a fully compatible finite element. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 3.
7. Barton M. V. Vibrations of rectangular and skew cantilever plates. J. Appl. Mech., 1951, vol. 18, No. 2.
8. Марченко Г. А. Метод Ритца в неконсервативных задачах теории упругой устойчивости. Изв. вузов. Авиац. механ., 1966, № 3.
9. Кандидов В. П., Чесноков С. С. Расчет устойчивости прямоугольных пластин в потоке воздуха методом конечных элементов. Вестн. МГУ. Сер. физ., астрон., 1972, № 5.