Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 534.2

НОВЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ

В. В. Третьяков

(Москва)

В работе [1] указаны точные решения для цилиндрических и сферических волн, позволяющие решить задачу дифракции волн от пространственного и плоского источников. В данной работе класс точных решений существенно расширяется. Задача дифракции волны от плоского источника на полубесконечной пластинке решается в конечном виде.

1. Известно [1], что если имеется однородное относительно t и $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ размерности $-{}^1/_2$ решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

в виде $\Phi_{-1/2}(t, r, \theta)$, то $\Phi_{-1/2}(t + \alpha(t^2 - r^2), r, \theta)$ тоже удовлетворяет уравнению (1.1). Здесь $\alpha = \mathrm{const}$, а $\theta = \mathrm{arctg}\,(y / x)$.

С другой стороны, известна связь между однородными решениями волнового уравнения разных размерностей. В частности, если Φ_0 и Φ_n — однородные относительно t и r размерности 0 и n соответственно решения уравнения (1.1) такие, что $(\Phi_n / t^n)|_{t=r} = \Phi_0|_{t=r}$, то между ними существует следующая связь [2,3]:

$$\Phi_n = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!}(t^2 - r^2)^{n+1/2} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\Phi_0(r, t, \theta)}{\sqrt{t^2 - r^2}} \tag{1.2}$$

Составим теперь чисто формально сумму решений волнового уравнения, используя соотношение (1.2)

$$\Phi = \sqrt{t^2 - r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n (t^2 - r^2)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\Phi_0(t, r, \theta)}{\sqrt{t^2 - r^2}}$$

Эта бесконечная сумма может быть заменена выражением

$$\Phi = \frac{\Phi_0(t + \alpha(t^2 - r^2), r, \theta)}{\sqrt{1 + 2\alpha t + \alpha^2 (t^2 - r^2)}} \tag{1.3}$$

Таким образом, имеем, кроме утверждения А. Ф. Филиппова, еще и следующее утверждение: если $\Phi_0(t, r, \theta)$ — однородное относительно t и r размерности 0 решение волнового уравнения (1.1), то выражение (1.3) — также решение волнового уравнения.

Эти два результата позволяют сформулировать следующую задачу: определить функцию $\eta(x, y, t)$ такую, что функция

$$\Phi = \eta(x, y, t)\, \Phi_\beta(X, Y, T) \tag{1.4}$$

удовлетворяет волновому уравнению (1.1), Φ_β — однородное относительно X, Y, T размерности β решение волнового уравнения, записанного в координатах X, Y, T и $X = x$, $Y = y$, $T = t + \alpha(t^2 - r^2)$

Подставляя произведение (1.4) в уравнение (1.1) и учитывая, что

$$\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial x} = \frac{\partial\Phi_\beta}{\partial X} - 2\alpha x\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial T} \text{ и т. д.,} \qquad \frac{\partial^2\Phi_\beta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Phi_\beta}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2\Phi_\beta}{\partial T^2} = 0$$

получаем

$$\begin{aligned}(1.5)\qquad & \Phi_\beta\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right) + 2\left\{\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial X} - 2\alpha x\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial T}\right) + \right.\\ & \left. + \frac{\partial\eta}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial Y} - 2\alpha y\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial T}\right) - (1 + 2\alpha t)\frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial T}\right\} + \\ & + \eta\left\{-4\alpha T\frac{\partial^2\Phi_\beta}{\partial T^2} - 6\alpha\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial T} - 4\alpha\frac{\partial}{\partial T}\left(X\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial X} + Y\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial Y}\right)\right\} = 0\end{aligned}$$

Поскольку Φ_β — однородная функция, то

$$X\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial X} + Y\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial Y} + T\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial T} = \beta\Phi_\beta$$

Следовательно, выражение (1.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}(1.6)\qquad & \Phi_\beta\left\{\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right\} + 2\left\{\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{x}{y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right\}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial X} - \\ & - 2\left\{2\alpha x\frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\frac{T}{y} + 2\alpha y\right)\frac{\partial\eta}{\partial y} + (1 + 2\alpha t)\frac{\partial\eta}{\partial t} + \right.\\ & \left. + \alpha(2\beta + 1)\eta\right\}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial T} = 0\end{aligned}$$

Будем требовать произвольности однородной функции Φ_β. Тогда нужно порознь положить равными нулю выражения в фигурных скобках в (1.6).

Получим три уравнения для определения η, переходя в них к новым переменным $2\alpha x = \mu$, $2\alpha y = \nu$, $2\alpha t = \tau$, имеем

$$\begin{aligned}(1.7)\qquad & \frac{\partial^2\eta}{\partial\mu^2} + \frac{2\beta}{\nu}\frac{\partial\eta}{\partial\nu} + \frac{\partial^2\eta}{\partial\nu^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2} = 0, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial\mu} - \frac{\mu}{\nu}\frac{\partial\eta}{\partial\nu} = 0\\ & \mu\frac{\partial\eta}{\partial\mu} + \frac{1}{\nu}\left[\tau + \frac{1}{2}(\tau^2 - \rho^2) + \nu^2\right]\frac{\partial\eta}{\partial\nu} + (1 + \tau)\frac{\partial\eta}{\partial\tau} + \\ & + \left(\beta + \frac{1}{2}\right)\eta = 0 \qquad (\rho^2 = \mu^2 + \nu^2)\end{aligned}$$

Второе уравнение (1.7) показывает, что η зависит только от ρ и τ (не зависит от $\theta = \operatorname{arctg}(\nu / \mu)$). Тогда $\partial\eta / \partial\nu = \sin\theta$, $\partial\eta / \partial\rho\, \partial\eta / \partial\mu = \cos\theta\, \partial\eta/\partial\rho$ и остальные уравнения (1.7) принимают вид

$$\begin{aligned}(1.8)\qquad & \frac{\partial^2\eta}{\partial\rho^2} + \frac{2\beta + 1}{\rho}\frac{\partial\eta}{\partial\rho} - \frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2} = 0\\ & \frac{1}{\rho}\left[\tau + \frac{1}{2}(\tau^2 - \rho^2)\right]\frac{\partial\eta}{\partial\rho} + (1 + \tau)\frac{\partial\eta}{\partial\tau} + \left(\beta + \frac{1}{2}\right)\eta = 0\end{aligned}$$

Решением второго уравнения (1.8) будет

$$\eta = \frac{f(\xi)}{(\tau + 1)^{\beta + 1/2}}, \qquad \xi = \frac{\tau^2 - \rho^2}{\tau + 1}$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (1.8), получим

$$(\xi^2 + 4\xi) f'' + (2\beta + 3)(2 + \xi) f' + {}^1/_4 (2\beta + 1)(2\beta + 3) f = 0$$

Решением этого уравнения будет (C_1, C_2 — постоянные)

$$f(\xi) = C_1 / \xi^{\beta+1/2} + C_2 / (\xi + 4)^{\beta+1/2}$$

Выберем решение, не имеющее особенностей при $\tau = \rho$. Тогда решением поставленной выше задачи будет

$$\Phi = \frac{\Phi_\beta [x, y, t + \alpha (t^2 - r^2)]}{[(1 + \alpha t)^2 - \alpha^2 r^2]^{\beta+1/2}} \tag{1.9}$$

Частными следствиями соотношения (1.9) является результат [1] и соотношение (1.3).

2. В работе А. Ф. Филиппова [1] имеется также указание о построении решения задачи дифракции сферической волны от источника на клине. Этот случай, как и предыдущий, может быть обобщен для произвольной однородной функции относительно t и $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ любой размерности, если эта функция является решением уравнения (1.1). Аналогично предыдущему поставим задачу: найти такую функцию η (x, y, z, t), чтобы функция $\Phi = \eta \Phi_\beta (T, P, \Theta)$ удовлетворяла волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

если Φ_β является однородной относительно T и P функцией размерности β и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi_\beta}{\partial P^2} + \frac{1}{P} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial P} + \frac{1}{P^2} \frac{\partial^2 \Phi_\beta}{\partial \Theta^2} - \frac{\partial^2 \Phi_\beta}{\partial T^2} = 0$$

$$(P = r,\ \Theta = \theta,\ T = t + \alpha (t^2 - r^2 - z^2))$$

Не приводя громоздких выкладок, которые аналогичны выкладкам, приведенным в п. 1, выпишем уравнения, которым должна удовлетворять функция η

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho^2} + \frac{2\beta + 1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{2\rho} (2\tau + \tau^2 + \rho^2 - \zeta^2) \frac{\partial \eta}{\partial \rho} + \zeta \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} + (1 + \tau) \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + (\beta + 1) \eta = 0$$

$$(\rho = 2\alpha r, \zeta = 2\alpha z, \tau = 2\alpha t)$$

Последнее уравнение (2.1) показывает, что

$$\eta = \frac{W(\xi, \lambda)}{(\tau + 1)^{\beta+1}}, \quad \xi = \frac{\tau^2 - \zeta^2 - \rho^2}{\tau + 1}, \quad \lambda = \frac{\zeta}{\tau + 1}$$

Подставив это выражение во второе уравнение (2.1) и введя переменную $\sigma = (\xi + 2)/2$, получим

$$(1 - \lambda^2) \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda^2} + (1 - \sigma^2) \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma^2} - 2\lambda\sigma \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial \sigma} - \tag{2.2}$$

$$- 2(\beta + 2) \lambda \frac{\partial W}{\partial \lambda} - 2(\beta + 2) \sigma \frac{\partial W}{\partial \sigma} - (\beta + 1)(\beta + 2) W = 0$$

Таким образом, по сравнению с задачей п. 1 задача, поставленная здесь, имеет более широкий класс решений, зависящий уже от двух переменных.

Не приводя детального анализа уравнения (?.2), заметим, что оно довольно глубоко исследовано. В частности, при $\beta = -1$ уравнение (2.2) сводится к уравнению Лапласа в переменных R, ψ, где

$$R = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \lambda^2}} - \sqrt{\frac{1}{\sigma^2 + \lambda^2} - 1}, \qquad \psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)$$

Получим необходимое для дальнейшего решение, не зависящее от λ. Этим решением является

$$W = C_1 \,/\, \xi^{\beta+1} + C_2 \,/\, (\xi + 4)^{\beta+1}$$

Выбирая решение, не имеющее особенностей при $\xi = 0$, получаем частное решение поставленной здесь задачи

$$\Phi = \frac{\Phi_\beta\,[t + \alpha\,(t^2 - r^2 - z^2),\, r,\, \theta]}{[(\alpha t + 1)^2 - \alpha^2 z^2 - \alpha^2 r^2]^{\beta+1}} \tag{2.3}$$

Не приводя выкладок, укажем другой результат, полученный путем аналогичных преобразований. Если $\Phi_\beta\,(q,\ t,\ \theta,\ \omega)$ — однородная функция относительно t и $q = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ порядка β, удовлетворяющая волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi_\beta}{\partial q^2} + \frac{2}{q}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial q} + \frac{1}{q^2}\frac{\partial^2\Phi_\beta}{\partial\omega^2} + \frac{\cos\omega}{q^2\sin\omega}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\omega} + \frac{1}{q^2\sin^2\omega}\frac{\partial^2\Phi_\beta}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\Phi_\beta}{\partial t^2} = 0,$$

то функция

$$\Phi = \frac{\Phi_\beta\,(q,\, t + \alpha(t^2 - q^2),\, \theta,\, \omega)}{[1 + 2\alpha t + \alpha^2\,(t^2 - q^2)]^{\beta+1}} \tag{2.4}$$

тоже удовлетворяет этому волновому уравнению. Интересно отметить, что функция η в выражении (2.4) тождественна функции η в выражении (2.3).

3. Рассмотрим задачу, несколько отличную от предыдущих. Пусть $\Phi_\beta\,(X,\ Y,\ T)$ — однородная функция относительно X, Y, T размерности β, удовлетворяющая волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi_\beta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Phi_\beta}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2\Phi_\beta}{\partial T^2} = 0 \tag{3.1}$$

Если

$$X = x + \alpha\,(t^2 - r^2), \quad Y = y, \quad T = t + \alpha\,(t^2 - r^2)$$

то требуется найти такую $\eta\,(x,\ y,\ t)$, чтобы функция $\Phi = \eta\,(x,\ y,\ t)\cdot\Phi_\beta(X,\ Y,\ T)$ удовлетворяла волновому уравнению (1.1).

Эта задача тоже имеет решение. Для определения η получается следующая система уравнений.

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{t - x}{y}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial t} = 0 \tag{3.2}$$

$$(1 - 2\alpha x)\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{1}{y}(X + 2\alpha y^2)\frac{\partial\eta}{\partial y} - 2\alpha t\frac{\partial\eta}{\partial t} - \alpha(2\beta + 1)\,\eta = 0$$

Из второго уравнения (3.2) следует, что η должна зависеть только от двух переменных $\xi_1 = (t - x)$ и $\zeta_1 = x\,(t - x) - {}^1/_2 y^2$. Введя новые переменные $\xi = \alpha\,(t - x)$ и $\zeta = \alpha^2\,(x\,(t - x) - {}^1/_2 y^2)$, запишем в этих переменных первое и третье уравнения (3.2)

$$(\xi^2-2\zeta)\frac{\partial^2\eta}{\partial\zeta^2}-2\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial\zeta\partial\xi}-(2\beta+3)\frac{\partial\eta}{\partial\zeta}=0$$

$$(\xi+\xi^2-2\zeta)\frac{\partial\eta}{\partial\zeta}-(1+2\xi)\frac{\partial\eta}{\partial\xi}-(2\beta+1)\eta=0$$

Не проводя общего анализа по определению совместного решения этой системы уравнений, замечаем, что она допускает решение, не зависящее от ζ

$$\eta = C/(h+t-x)^{\beta+1/2} \qquad (h = 1/2\alpha)$$

Волновое уравнение инвариантно к повороту осей координат относительно начала, поэтому можем выбрать $x=r\cos(\gamma+\theta)$, $y=r\sin(\gamma+\theta)$. Тогда решением волнового уравнения (1.1) будет

$$\Phi=\Phi_\beta\left(r\cos(\gamma+\theta)+\frac{1}{2h}(t^2-r^2), r\sin(\gamma+\theta),\right. \tag{3.3}$$
$$\left. t+\frac{1}{2h}(t^2-r^2)\right)\Big/[h+t-r\cos(\gamma+\theta)]^{\beta+1/2}$$

4. Проиллюстрируем на простейших примерах применение полученных результатов к задачам дифракции. Прежде всего заметим, что выражение (1.9) позволяет для решенной задачи плоской волны на клине найти решение задачи дифракции соответствующей цилиндрической волны. Точно так же выражения (2.3) и (2.4) позволяют имеющиеся решения задач дифракции плоских волн на телах, образованных полубесконечными прямыми и плоскостями, использовать соответственно для построения решения задач дифракции сферических волн на этих же телах.

Пусть на полубесконечную пластинку, совпадающую с лучом $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)=0$, падает единичная плоская волна $H(t-r\cos(\gamma+\theta))$. Решение задачи дифракции этой волны на пластинке дается внутри круга $r\leqslant t$ выражением

$$\Phi_0=\Phi_0^+ + \Phi_0^-,\quad \Phi_0^\pm=\frac{1}{2}H(t-r\cos(\gamma\pm\theta))+ \tag{4.1}$$
$$+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2r}{t-r}}\sin\frac{\gamma\pm\theta}{2}\right)$$

Тогда задача дифракции для цилиндрической падающей волны, задаваемой выражением

$$\Phi=\sqrt{2R_0}H((R_0+t)^2-P_+^2)/[(2R_0+t)^2-r^2]^{1/2}$$
$$P_+^2=R_0^2+2R_0r\cos(\gamma+\theta)+r^2 \quad (\alpha=1/2R_0)$$

где H — единичная функция, на основании (1.9) будет решена внутри круга $r\leqslant t$, и потенциал представляется выражением

$$\Phi=\Phi^+ + \Phi^- \tag{4.2}$$

$$\Phi^\pm=\frac{1}{2\sqrt{(2R_0+t)^2-r^2}}\left[H((R_0+t)^2-P_\pm^2)+\right.$$
$$\left.+\frac{2\sqrt{2R_0}}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2r}{T-r}}\sin\frac{\gamma\pm\theta}{2}\right)\right]$$
$$P_\pm^2=R_0^2+2R_0r\cos(\gamma\pm\theta)+r^2,\quad T=t+\frac{1}{2R_0}(t^2-r^2)$$

Для второго примера используем результаты п. 3. Если опять на ту же пластинку падает плоская волна $H(t - r\cos(\gamma + \theta))$, то соответствующая ей тоже плоская падающая волна на основании выражения (3.3) будет задаваться потенциалом

$$\Phi = H(t - r\cos(\gamma + \theta)) \, / \, [h + t - r\cos(\gamma + \theta)]^{1/2} \tag{4.3}$$

Обращаясь к выражению (4.1), видим, что оно представляет собой сумму двух функций $\Phi_0^+ + \Phi_0^-$. Каждая из них удовлетворяет волновому уравнению, причем функция Φ_0^+ соответствует падающей волне, а функция Φ_0^- — отраженной волне.

Для описания дифракции волны, задаваемой потенциалом (4.3), образуем точно так же две функции, соответствующие падающей и отраженной волнам

$$F^\pm = \frac{1}{\sqrt{h + t - r\cos(\gamma \pm \theta)}}\left[\frac{1}{2} H(t - r\cos(\gamma \pm \theta)) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2P_\pm}{T - P_\pm}}\sin\frac{\Theta_\pm}{2}\right)\right] \tag{4.4}$$
$$P_\pm = \left[r^2 + \frac{r}{h}(t^2 - r^2)\cos(\gamma \pm \theta) + \frac{1}{4h^2}(t^2 - r^2)^2\right]^{1/2}$$
$$\Theta_\pm = \operatorname{arctg}\frac{r\sin(\gamma \pm \theta)}{r\cos(\gamma \pm \theta) + (t^2 - r^2)/2h}, \quad T = t + \frac{1}{2h}(t^2 - r^2)$$

На основании (3.3) каждая из функций F^+ и F^- удовлетворяет волновому уравнению, а их сумма, кроме того, удовлетворяет и граничным условиям при $r = t$ и условию непротекания на пластинке. Следовательно, сумма $F^+ + F^-$ есть решение задачи дифракции на полубесконечной пластинке волны, задаваемой выражением (4.3).

При устремлении h к нулю в выражениях (4.4) второе слагаемое в квадратных скобках стремится к нулю при $r < t$. Тогда внутри круга $r < t$ решением задачи дифракции на полубесконечной пластинке волны, задаваемой потенциалом

$$\Phi = H(t - r\cos(\gamma + \theta)) \, / \, [t - r\cos(\gamma + \theta)]^{1/2}$$

будет сумма $\Phi = \Phi^+ + \Phi^-$, $\Phi^\pm = {}^1/_2\,[t - r\cos(\gamma \pm \theta)]^{-1/2}$.

В таком случае, следуя [1] или используя выражение (1.9) при $\beta = -{}^1/_2$, получаем решение задачи дифракции на полубесконечной пластинке волны от плоского источника ($r < t$)

$$\Phi = \Phi^+ + \Phi^-, \quad \Phi^\pm = \frac{1}{2}\,[(R_0 + t)^2 - R_0^2 - 2R_0 r\cos(\gamma \pm \theta) - r^2]^{-1/2}$$

если падающая волна задается потенциалом

$$\Phi = \frac{H((R_0 + t)^2 - R_0^2 - 2R_0 r\cos(\gamma + \theta) - r^2)}{[(R_0 + t)^2 - R_0^2 - 2R_0 r\cos(\gamma + \theta) - r^2]^{1/2}}$$

Автор признателен Ю. А. Демьянову за полезные обсуждения.

Поступила 12 VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А. Ф.* Дифракция произвольной акустической волны на клине. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
2. *Гуревич М. И.* К вопросу о тонком треугольном крыле, движущемся со сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1947, т. 11, вып. 3.
3. *Третьяков В. В.* К вопросу о сведении в автомодельном случае решения волнового уравнения в пространстве к решению уравнения Лапласа. Тезисы докладов IV Всес. симпоз. по распространению упругих и упругопластических волн. Кишинев, 1968.