

## ДВУМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ СМЕСИ И СТРУКТУРА СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

А. Л. Ни, О. С. Рыжов

(Москва)

Рассматриваются плоскопараллельные и осесимметричные течения химически активной смеси, в которой происходит только одна реакция. Предполагается, что равновесная и замороженная скорости звука в среде близки по своей величине. Используется асимптотическая система уравнений, которая справедлива в рамках нелинейной теории малых возмущений для трансзвукового диапазона скоростей. Строится точное частное решение этих уравнений; оно позволяет проследить за процессом зарождения и развития ударных волн. Как и в одномерных течениях, ударные волны получаются полностью диспергированными, если скорость частиц больше равновесной, но меньше замороженной скорости звука. Включающие разрывы волны с неполной дисперсией образуются, когда скорость потока превосходит замороженную скорость звука.

Течения химически активной газовой смеси с близкими по величине равновесной и замороженной скоростями звука впервые изучал Наполитано [1]. Считая, что в любой точке пространства скорость частиц не сильно отличается от обеих названных скоростей звука, он воспользовался нелинейной теорией малых возмущений и в ее рамках вывел асимптотическую систему уравнений, которой подчиняются параметры смеси. Дальнейшее развитие намеченный Наполитано путь нашел в работах [2, 3].

**1. Собственно трансзвуковой режим.** Как и в работах [1-3], предполагаем, что в смеси происходит только одна реакция, а ее состав характеризуется единственным параметром  $q$ , называемым полнотой реакции. Обозначив через  $V$ ,  $s$  и  $e$  удельные объем, энтропию и внутреннюю энергию смеси, а через  $Q$  и  $\dot{q}$  сродство и скорость химической реакции, запишем выражения для термодинамических производных

$$e_{11} = \left( \frac{\partial^2 e}{\partial q^2} \right)_{V, s}, \quad e_{12} = \left( \frac{\partial^2 e}{\partial q \partial V} \right)_s, \quad H_1 = - \left( \frac{\partial \dot{q}}{\partial Q} \right)_{q, V}$$

Различие в величинах равновесной  $a_e$  и замороженной  $a_f$  скоростей звука будем характеризовать малым параметром  $\varepsilon_a$ , основное равновесное состояние газа, на которое накладываются малые возмущения, пометим индексом  $\infty$ . Обозначим буквами  $v$  и  $p$  модуль скорости частиц и давление газа соответственно. Для собственно трансзвукового режима, в котором скорость частиц в каждой точке пространства близка по величине к обеим скоростям звука, согласно [1-3], имеем

$$(1.1) \quad e_{12 \infty} = e_a \frac{p_{\infty}}{q_{\infty}} e'_{12 \infty}, \quad v_{\infty} - a_{e \infty} = \varepsilon_a^2 v_{\infty} \sigma_{e \infty}, \quad v_{\infty} - a_{f \infty} = \varepsilon_a^2 v_{\infty} \sigma_{f \infty}$$

Порядок безразмерных постоянных  $e'_{12 \infty}$ ,  $\sigma_{e \infty}$ ,  $\sigma_{f \infty}$  равен здесь единице.

Пусть  $v_x$  и  $v_r$  означают проекции вектора скорости потока на оси  $x$  и  $r$  декартовой либо цилиндрической системы координат,  $L$  — характерную

длину вдоль оси  $x$ , а  $\varepsilon$  и  $\Delta$  — малые параметры. Введем безразмерные переменные по формулам

$$(1.2) \quad x = Lx', \quad r = \frac{L}{\Delta} r', \quad v_x = v_\infty (1 + \varepsilon v_x'), \quad v_r = \varepsilon \Delta v_\infty v_r'$$

Отклонения плотности  $\rho = 1/V$ , давления  $p$ , равновесной  $a_e$  и замороженной  $a_f$  скоростей звука от соответствующих значений в основном равномерном потоке пропорциональны  $\varepsilon$ . Таким образом

$$(1.3) \quad \rho = \rho_\infty (1 + \varepsilon \rho'), \quad p = p_\infty (1 + \varepsilon p') \\ a_e = a_{e\infty} (1 + \varepsilon a_e'), \quad a_f = a_{f\infty} (1 + \varepsilon a_f')$$

В то же время возмущенная полнота реакции, химическое сродство и скорость реакции должны быть порядка произведения малых параметров  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_a$

$$(1.4) \quad q = q_\infty (1 + \varepsilon \varepsilon_a q'), \quad Q = \varepsilon \varepsilon_a \frac{p_\infty}{q_\infty \rho_\infty} Q', \quad \dot{q} = \varepsilon \varepsilon_a \frac{q_\infty}{\tau} \dot{q}'$$

Здесь  $\tau$  — время релаксации. Введем еще две связанные с этим временем безразмерные величины

$$N_r = \frac{L}{\tau v_\infty}, \quad H_1 = \frac{q_\infty^2 \rho_\infty}{\tau p_\infty} H_1'$$

Остается подставить формулы (1.1) — (1.4) в уравнения, которым подчиняется движение релаксирующей смеси. Удерживая во всех соотношениях лишь главные члены и пренебрегая членами более высокого порядка малости, будем следовать асимптотическому анализу, изложенному в работе [3]. Опустим ради удобства штрихи над всеми безразмерными величинами. Подчиним малые параметры следующим связям:

$$2\varepsilon m_\infty = \Delta^2 = 2\varepsilon_a^2 \frac{p_\infty^2 e_{12\infty}^2}{q_\infty^2 \rho_\infty^2 e_{11\infty} v_\infty^2}$$

и обозначим посредством

$$\sigma = \frac{\varepsilon_a^2 \sigma_{e\infty}}{\varepsilon m_\infty}, \quad l = \frac{1}{N_r} \frac{p_\infty}{q_\infty^2 \rho_\infty e_{11\infty} H_{1\infty}}$$

В рассматриваемом приближении термодинамический коэффициент

$$m_\infty = m_{e\infty} = m_{f\infty} = \frac{1}{2\rho_\infty^3 v_\infty^2} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial V_\infty^2} \right)_{q,s} = \frac{1}{2\rho_\infty^3 v_\infty^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial V_\infty^2} \right)_{Q,s}$$

Обращаясь к результатам работы [3], представим теперь систему асимптотических уравнений, которая описывает возмущенное неравновесное течение смеси, в виде

$$(1.5) \quad \left( v_x + \sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial v_x}{\partial x} - \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} + (v - 1) \frac{v_r}{r} \right] = \frac{1}{2} \frac{q_\infty^2 \rho_\infty e_{11\infty}}{p_\infty e_{12\infty}} \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{l} \left( q + \frac{p_\infty e_{12\infty}}{q_\infty^2 \rho_\infty e_{11\infty}} v_x \right), \quad \frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial x}$$

Для плоскопараллельных движений параметр  $\nu = 1$ , для движений с осевой симметрией  $\nu = 2$ .

Система квазилинейных уравнений (1.5) имеет гиперболический тип при  $v_x > 1/2 - \sigma$ . Поскольку разность

$$\sigma_{f\infty} - \sigma_{e\infty} = -\frac{1}{2} \frac{p_{\infty}^2 e_{12,\infty}^2}{q_{\infty}^2 \rho_{\infty}^2 e_{11,\infty} v_{\infty}^2}$$

то это условие означает, что скорость частиц газа превосходит местную замороженную скорость звука. Направления трех характеристик задаются в каждой точке соотношениями

$$(1.6) \quad \frac{dx}{dr} = \pm \sqrt{v_x + \sigma - \frac{1}{2}}, \quad \frac{dr}{dx} = 0$$

Вводя в рассмотрение новую искомую функцию  $u = v_x + \sigma$ , из системы (1.5) получим для ее определения одно уравнение третьего порядка

$$(1.7) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\nu-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{l}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - l \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\nu-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]$$

Оно содержит только один постоянный параметр  $l$ , который зависит от свойств релаксирующей смеси.

**2. Переход к обыкновенному дифференциальному уравнению.** По сравнению с системой (1.5) уравнение (1.7) более удобно для дальнейших операций. Его решение ищем в виде

$$(2.1) \quad u = 4 \left( \frac{d}{c} \right)^2 r^2 - 2\nu \frac{d}{c^2} f(\xi), \quad \xi = cx - dr^2$$

Здесь  $c$  и  $d$  — произвольные постоянные, а функция  $f(\xi)$  служит интегралом обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка

$$(2.2) \quad f \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left( \frac{df}{d\xi} \right)^2 - \frac{df}{d\xi} - \frac{2}{\nu} = -lc \left[ f \frac{d^3 f}{d\xi^3} + \left( 3 \frac{df}{d\xi} - 1 \right) \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right] - \frac{lc^3}{4\nu d} \frac{d^3 f}{d\xi^3}$$

Решения, имеющие форму (2.1), неоднократно применялись для описания течений инертного газа. В отсутствие диссипативных процессов поток с местными сверхзвуковыми зонами, расположенными у стенок сопла Лавалья, был исследован в работах [4, 5]. В [6] было показано, как при помощи формул (2.1) пристроить поле скоростей невязкого газа в другом нерасчетном режиме работы сопла, в котором занимающая всю горловину сверхзвуковая область включает сзади скачок уплотнения. Обобщение этих решений, позволившее изучить движения вязкого и теплопроводящего газа обоих типов, указано в [7, 8]. Наконец, в работе [9] при помощи предельного перехода было выяснено, каким образом поток диссипирующего газа переходит в невязкое идеальное течение.

В дальнейшем будет видно, что интеграл (2.1) с функцией  $f(\xi)$ , удовлетворяющей уравнению (2.2), дает возможность проследить за зарождением и развитием ударных волн, которые образуются в течениях химически активной смеси.

В результате интегрирования уравнения (2.2) имеем

$$(2.3) \quad \alpha(\beta + f) \frac{d^2 f}{d\xi^2} - (\alpha - f) \frac{df}{d\xi} + \alpha \left( \frac{df}{d\xi} \right)^2 - f - \frac{2}{\nu} \xi = \frac{2}{\nu} \alpha A$$

$$\left( \alpha = lc, \quad \beta = \frac{c^2}{4\nu d} \right)$$

Здесь постоянная  $A$  произвольна. Что касается постоянных  $c$  и  $d$ , то для определенности они будут считаться положительными; тогда положительными будут также постоянные  $\alpha$  и  $\beta$ .

Прежде чем переходить к изучению свойств нелинейного уравнения (2.3), установим вид функций  $q$  и  $v_r$ . Подставив выражение

$$(2.4) \quad \frac{q_{\infty}^2 \rho_{\infty} e_{11 \infty}}{P_{\infty} e_{12 \infty}} q = \sigma - 4 \left( \frac{d}{c} \right)^2 r^2 + 2\nu \frac{d}{c^2} h(\xi)$$

во второе уравнение из системы (1.5), находим

$$\alpha \frac{dh}{d\xi} + h = f$$

Исключив из рассмотрения функцию  $h$  с экспоненциальным ростом при  $\xi \rightarrow -\infty$ , имеем отсюда

$$(2.5) \quad h = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{\xi}{\alpha}\right) \int \exp\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) f d\xi$$

Определим поперечную составляющую вектора скорости. Из последнего уравнения системы (1.5) следует, что

$$(2.6) \quad v_r = B_1 r + B_2 r^3 + 8 \left( \frac{d}{c} \right)^2 x r + 4\nu \frac{d^2}{c^3} r f(\xi)$$

Остается вычислить постоянные  $B_1$  и  $B_2$ . Для этой цели воспользуемся различными выражениями для производной  $\partial q / \partial x$ , которые получаются из первого и второго уравнений системы (1.5). Подставив в правую часть второго из названных уравнений формулы (2.1) и (2.4) для  $v_x = u - \sigma$  и  $q$  соответственно, имеем

$$\frac{q_{\infty}^2 \rho_{\infty} e_{11 \infty}}{P_{\infty} e_{12 \infty}} \frac{\partial q}{\partial x} = -2\nu \frac{d}{lc^2} (h - f)$$

Первое уравнение системы (1.5) с учетом соотношения (2.6) дает

$$\begin{aligned} \frac{q_{\infty}^2 \rho_{\infty} e_{11 \infty}}{P_{\infty} e_{12 \infty}} \frac{\partial q}{\partial x} = & 2 \left[ -\nu B_1 - (2 + \nu) B_2 r^2 - 8\nu \left( \frac{d}{c} \right)^2 x - 4\nu^2 \frac{d^2}{c^3} f + \right. \\ & \left. + \nu \frac{d}{c} \frac{df}{d\xi} + 4\nu^2 \frac{d^2}{c^3} f \frac{df}{d\xi} \right] \end{aligned}$$

Правая часть здесь должна зависеть от комбинации  $\xi$  независимых переменных  $x$  и  $r$ . Это условие удовлетворяется только при

$$B_2 = -\frac{8\nu}{2 + \nu} \left( \frac{d}{c} \right)^3$$

Приравняем теперь оба написанных выше выражения для  $\partial q / \partial x$ , в результате

$$(2.7) \quad \beta h = \alpha \beta \frac{c}{d} B_1 + 2 \frac{\alpha}{\nu} \xi + (\alpha + \beta) f - \alpha(\beta + f) \frac{df}{d\xi}$$

Вспоминая формулу (2.5) для функции  $h$  и дифференцируя соотношение (2.7), возвращаемся к уравнению (2.3) с постоянной  $(2\alpha d + \nu\beta c B_1) / (\nu d)$  в правой части. Отсюда ясно, что

$$B_1 = 8l \left( \frac{d}{c} \right)^2 (A - 1)$$

Укажем еще вид функции  $Q$ , характеризующей степень отклонения состояния смеси от полного термодинамического равновесия. Как показано в работе [3], в рассматриваемом приближении

$$(2.8) \quad Q = \frac{q_{\infty}^2 \rho_{\infty} e_{11 \infty}}{p_{\infty}} q + e_{12 \infty} v_x = 2\nu e_{12 \infty} \frac{d}{c^2} (h - f)$$

Возвратимся к уравнению (2.3). При изучении свойств его решений большую роль играют два частных интеграла

$$(2.9) \quad f = a_{1,2} \xi + \alpha b_{1,2}, \quad a_{1,2} = \frac{1}{2} \left( 1 \mp \sqrt{1 + \frac{8}{\nu}} \right), \quad b_{1,2} = \frac{2}{\nu} \frac{A - 1}{a_{1,2} - 1}$$

При изменении скорости химической реакции меняется коэффициент  $l$  и вместе с ним  $\alpha$ . При  $\alpha = 0$  формулы (2.9) описывают движения невязкого инертного газа [4-6]. Однако наличие пропорционального  $\alpha$  члена в определении функции  $f$  не является существенным, так как его можно обратить в нуль простым изменением начала отсчета координаты  $x$  в исходных уравнениях (1.5) и (1.7). Этой же цели можно достичь, выбрав постоянную  $A = 1$ . Одновременно с  $b_{1,2}$  тогда будет равна нулю и постоянная  $B_1$ , что имеет место в случае, когда рассматривается поле скоростей в течении инертного газа. Положим в дальнейшем  $A = 1$ . Тогда интеграл  $f = a_1 \xi$  будет представлять поток с дозвуковым полем скоростей в подводной части сопла Лавала и переходом как через равновесную, так и замороженную скорость звука в окрестности его критического сечения.

Выведем начальные условия для интегрирования уравнения (2.3). Очевидно, что на бесконечности вверх по потоку, т. е. при  $\xi \rightarrow -\infty$ , решение, описывающее химически активную смесь, должно быть близко к решению для невязкого инертного газа. С другой стороны, все режимы работы сопла, через которое течет инертный газ, задаются соотношениями, стремящимися при  $\xi \rightarrow -\infty$  к интегралу (2.9) с  $a = a_1$  [4-6]. Отсюда следует, что начальные данные для интегрирования уравнения (2.3) должны быть выбраны при больших отрицательных значениях  $\xi$  в окрестности прямой  $f = a_1 \xi$ . Чтобы получить более точное представление об асимптотическом поведении искомого решения, положим

$$(2.10) \quad f = a\xi + \chi(\xi), \quad a = a_1$$

и линеаризуем уравнение (2.3), считая величину  $\chi(\xi)$  малой по сравнению с  $a\xi$ . Имеем

$$\alpha(\beta + a\xi) \frac{a^2 \chi}{d\xi^2} + [\alpha(2a - 1) + a\xi] \frac{d\chi}{d\xi} + (a - 1)\chi = 0$$

После замены  $\eta = -(\beta + a\xi) / (\alpha a)$  независимой переменной последнее уравнение можно записать как

$$\eta \frac{d^2 \chi}{d\eta^2} + \left( \frac{2a - 1}{a} - \frac{\beta}{\alpha a} - \eta \right) \frac{d\chi}{d\eta} - \frac{a - 1}{a} \chi = 0$$

Полученное уравнение представляет собой канонический вид конфлюэнтного гипергеометрического уравнения [10]. Применяя обычные обозначения для конфлюэнтных гипергеометрических функций, возьмем общее

решение в форме

$$(2.11) \quad \chi = C_1 \Phi \left( \frac{a-1}{a}, \frac{2a-1}{a} - \frac{\beta}{\alpha a}; \eta \right) + C_2 \eta^{-\frac{a-1}{a} + \frac{\beta}{\alpha a}} \times \\ \times \Phi \left( \frac{\beta}{\alpha a}, \frac{1}{a} + \frac{\beta}{\alpha a}; \eta \right)$$

Остается найти связь между постоянными  $C_1$  и  $C_2$ . Этого можно достичь, исходя из асимптотического представления гипергеометрических функций при  $\eta \rightarrow +\infty$ . Действительно, при  $\alpha > 0$  переменная  $\eta \rightarrow +\infty$ , если  $\xi \rightarrow -\infty$ . Итак [10]

$$\chi = \eta^{-1 + \frac{\beta}{\alpha a}} e^{\eta} G \left( \frac{1}{a}, 1 - \frac{\beta}{\alpha a}; \eta \right) \left[ C_1 \frac{\Gamma \left( \frac{2a-1}{a} - \frac{\beta}{\alpha a} \right)}{\Gamma \left( \frac{a-1}{a} \right)} + C_2 \frac{\Gamma \left( \frac{1}{a} + \frac{\beta}{\alpha a} \right)}{\Gamma \left( \frac{\beta}{\alpha a} \right)} \right] + \dots$$

Здесь буква  $\Gamma$  означает гамма-функцию Эйлера, а символ  $G(1/a, 1 - \beta/(\alpha a); \eta)$  — асимптотический ряд по обратным степеням  $\eta$ , причем  $G(1/a, 1 - \beta/(\alpha a); \eta) \rightarrow 1$  при  $\eta \rightarrow \infty$ . Чтобы получить решение, стремящееся на бесконечности к нулю, необходимо положить выражение в квадратных скобках равным нулю, что дает связь между  $C_1$  и  $C_2$ . Теперь формула (2.11) преобразуется к виду

$$(2.12) \quad \chi = C_1 \left[ \Phi \left( \frac{a-1}{a}, \frac{2a-1}{a} - \frac{\beta}{\alpha a}; \eta \right) - \right. \\ \left. - \frac{\Gamma \left( \frac{\beta}{\alpha a} \right) \Gamma \left( \frac{2a-1}{a} - \frac{\beta}{\alpha a} \right)}{\Gamma \left( \frac{a-1}{a} \right) \Gamma \left( \frac{1}{a} + \frac{\beta}{\alpha a} \right)} \eta^{-\frac{a-1}{a} + \frac{\beta}{\alpha a}} \Phi \left( \frac{\beta}{\alpha a}, \frac{1}{a} + \frac{\beta}{\alpha a}; \eta \right) \right]$$

Заключенная в квадратные скобки линейная комбинация гипергеометрических функций пропорциональна так называемой  $\Psi$ -функции [10], отсюда при  $\eta \rightarrow +\infty$  и  $\xi \rightarrow -\infty$  выводим

$$(2.13) \quad \chi = \alpha^{-\frac{a-1}{a}} C \eta^{-\frac{a-1}{a}} + \dots = C (-\xi)^{-\frac{a-1}{a}} + \dots \\ C = \alpha^{\frac{a-1}{a}} C_1 \frac{\Gamma \left( \frac{\beta}{\alpha a} \right)}{\Gamma \left( -\frac{a-1}{a} + \frac{\beta}{\alpha a} \right)}$$

Постоянная  $C_1$  в формулах (2.12) и (2.13) остается произвольной, в зависимости от нее изменяются начальные значения функции  $f(\xi)$ . В асимптотическом разложении  $\chi(\xi)$  показатель степени главного члена

$$-\frac{a-1}{a} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8/v}}{1 - \sqrt{1 + 8/v}} < 0$$

поэтому второе слагаемое в правой части равенства (2.10) действительно значительно меньше первого, когда  $\xi \rightarrow -\infty$ . Можно показать также, что формула (2.13) представляет главный член асимптотического разложения поправки  $\chi(\xi)$  и в том случае, когда речь идет о движениях инертного газа, управляемых уравнением (2.3) с  $\alpha = 0$ .

**3. Непрерывные течения.** Выясним, чему соответствует особое значение  $f = -\beta$ , при котором коэффициент при старшей производной в обыкновенном дифференциальном уравнении (2.3) обращается в нуль. Вспомогательная формула (1.6), напишем уравнение, задающее наклоны характеристических кривых

$$(3.1) \quad \left(\frac{dx}{dr}\right)^2 = 4 \left(\frac{d}{c}\right)^2 r^2 - 2\nu \frac{d}{c^2} f(\xi) - \frac{1}{2}$$

Его решение ищем в виде  $\xi = \xi_c = \text{const}$ , т. е.  $x = c^{-1}(\xi_c + dr^2)$ .

Из уравнения (3.1) следует сразу, что  $f(\xi_c) = -\beta$ . Таким образом, переход вдоль любой интегральной кривой уравнения (2.3) через прямую  $f = -\beta$  означает пересечение характеристики в физическом пространстве.

Установим качественные свойства изучаемых интегральных кривых, асимптотическое поведение которых при  $\xi \rightarrow -\infty$  определяется разложением (2.13). Положим сначала постоянную  $C > 0$ . Из формулы для производной

$$\frac{df}{d\xi} = a_1 + \frac{a_1 - 1}{a_1} C (-\xi)^{-\frac{2a_1 - 1}{a_1}} + \dots$$

следует, что существует диапазон  $-\infty < \xi < \xi_0$ , в котором  $df/d\xi > a_1$ . Как легко показать, наклон интегральной кривой уравнения (2.3) и в точке  $\xi = \xi_0$  должен оставаться больше наклона прямой  $f = a_1\xi$ , если выполнено условие  $f(\xi_0) > -\beta$ .

Допустим от противного, что  $df(\xi_0)/d\xi = a_1$ . Тогда  $d^2f(\xi_0)/d\xi^2 \leq 0$ . Кроме того, очевидно

$$(3.2) \quad f(\xi_0) = a_1\xi_0 + \alpha b, \quad b > 0$$

Подставляя эти значения функции  $f$  и ее первой производной в уравнение (2.3), находим

$$(3.3) \quad (\beta + f) \frac{d^2f}{d\xi^2} = ba_2$$

Определяемое отсюда значение второй производной  $d^2f(\xi_0)/d\xi^2$  положительно. Полученное противоречие доказывает высказанное утверждение.

Пусть теперь некоторая интегральная кривая уравнения (2.3) пересекает прямую  $f = -\beta$  в точке с  $\xi = \xi_c$ , причем ее наклон и кривизна остаются в этой точке конечными. Имеем

$$(3.4) \quad \frac{df}{d\xi_c} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{8}{\nu} \left(1 + \frac{\xi_c}{\alpha}\right)}$$

График производной  $df/d\xi_c$  показан на фиг. 1, где

$$\xi_* = -\alpha \left[1 + \frac{\nu}{8} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right], \quad \frac{df_*}{d\xi_c} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

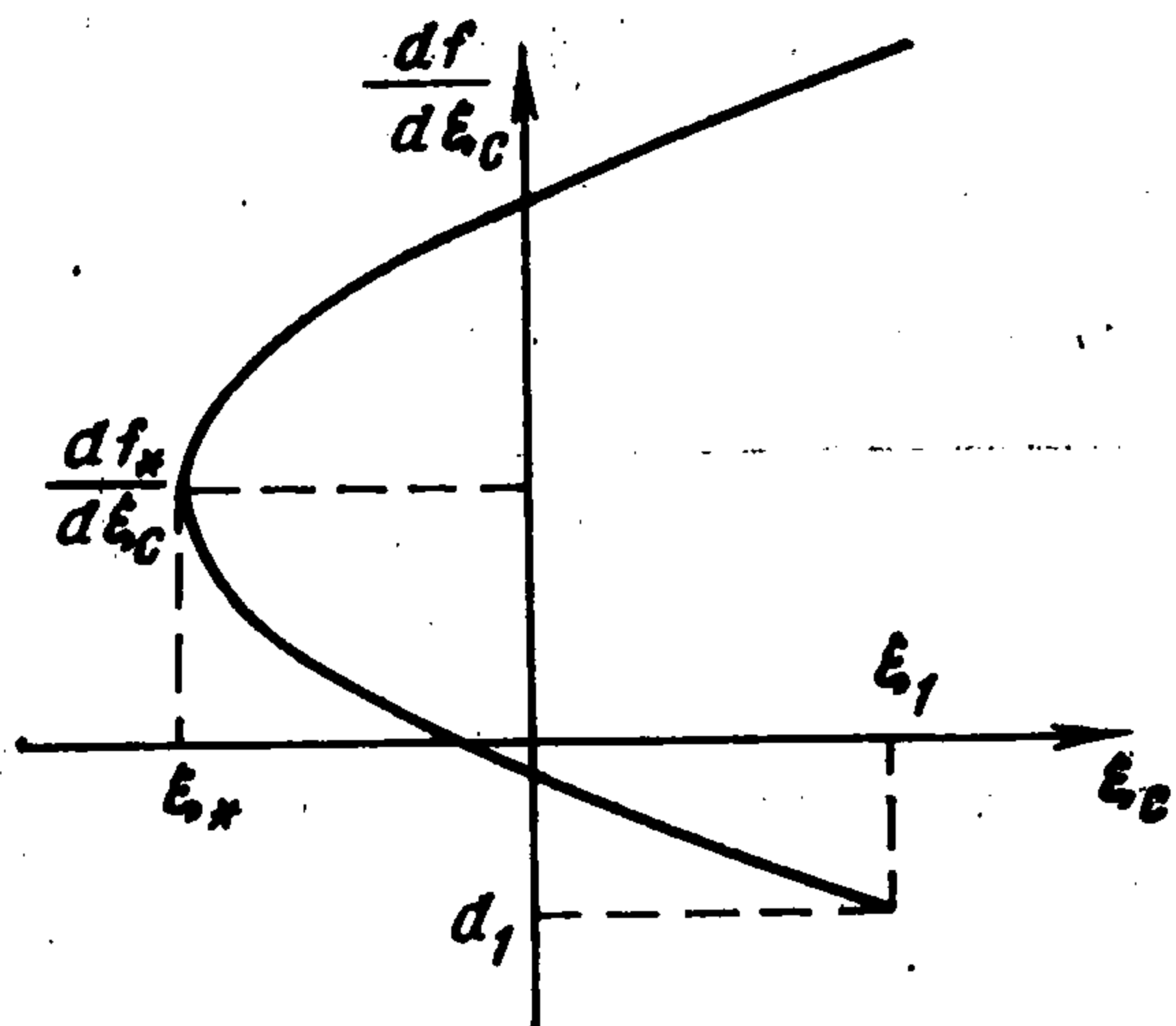
Обозначим через  $\xi_1$  абсциссу точки пересечения прямых  $f = a_1\xi$  и  $f = -\beta$ . Очевидно  $\xi_1 = -\beta/a_1 > 0$ . При  $\xi_c = \xi_1$  из формулы (3.4) следует

$$(3.5) \quad \left(\frac{df}{d\xi_1}\right)_1 = a_1, \quad \left(\frac{df}{d\xi_1}\right)_2 = a_2 + \frac{\beta}{\alpha}$$

Первое из написанных значений производной относится к прямой  $f = a_1 \xi$ .

Покажем, что интегральная кривая уравнения (2.3) с асимптотикой (2.13) при  $\xi \rightarrow -\infty$  и  $C > 0$  не может достичь прямой  $f = -\beta$ . Действительно, если бы она пересекала эту прямую в некоторой точке с  $\xi = \xi_c$ , то в силу доказанного выше  $\xi_c > \xi_1$ , а производная  $a_1 < df/d\xi_c \leq 0$ . Обращаясь к фиг. 1, необходимо взять нижнюю ветвь изображенной на ней кривой, откуда при  $\xi_c > \xi_1$  имеем в противоречие с исходной оценкой  $df/d\xi_c < a_1$ .

Положим теперь в асимптотическом разложении (2.13) постоянную  $C < 0$ . Тогда в некотором диапазоне  $-\infty < \xi < \xi_0$  наклон рассматриваемой интегральной кривой должен быть меньше наклона прямой  $f = a_1 \xi$ . Если  $f(\xi_0) > -\beta$ , то и в точке с  $\xi = \xi_0$  производная  $df(\xi_0)/d\xi < a_1$ .



Фиг. 1

Как и ранее, доказательство этого утверждения получается при помощи предположения от противного, что  $df(\xi_0)/d\xi = a_1$ . Тогда  $d^2f(\xi_0)/d\xi^2 \geq 0$ . Воспользовавшись первой из формул (3.2), где знак постоянной  $b$  необходимо изменить на обратный, возвращаемся к соотношению (3.3) с отрицательной правой частью. Это ведет к противоречию при вычислении  $d^2f(\xi_0)/d\xi^2$ .

Интегральная кривая уравнения (2.3) с асимптотикой (2.13) и  $C < 0$  может пересечь прямую  $f = -\beta$  лишь под прямым углом. Действительно, по только-что доказанному в точке пересечения  $\xi_c < \xi_1$ , а  $df/d\xi_c < a_1$ . Если бы значение производной  $df/d\xi_c$  оставалось конечным, то оно определялось бы нижней ветвью кривой, приведенной на фиг. 1. Однако при  $\xi_c < \xi_1$  эта кривая дает значения  $df/d\xi_c > a_1$ . Отсюда следует, что наклон рассматриваемой интегральной кривой обращается в бесконечность, когда она достигает прямой  $f = -\beta$ .

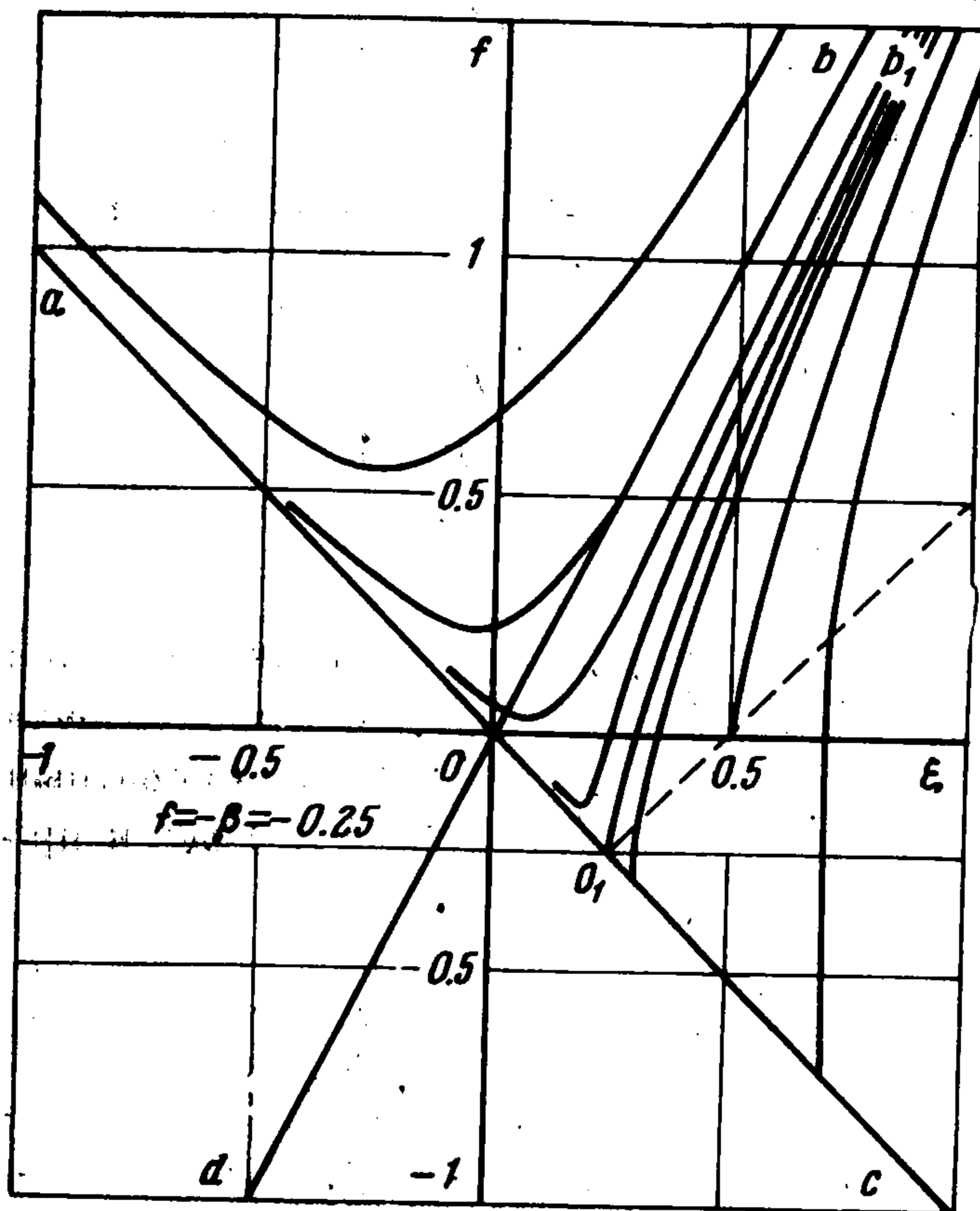
Обращение в бесконечность производной  $df/d\xi_c$  при  $f(\xi_c) = -\beta$  означает возникновение бесконечных ускорений на линии в физическом пространстве, которая в каждой своей точке имеет характеристический наклон. Такая линия является, как хорошо известно [11], огибающей характеристических кривых. Поэтому интегральные кривые уравнения (2.3), асимптотическое поведение которых при  $\xi \rightarrow -\infty$  задается разложением (2.13) с  $C < 0$ , нельзя использовать для построения полей реальных течений.

После того как качественные свойства уравнения (2.3) установлены, можно перейти к его непосредственному интегрированию. В качестве примера рассмотрим поток через плоское сопло, ему отвечают значения постоянных  $\nu = 1$  и  $a_1 = -1$ . Начальные данные для функции  $f$  и ее первой производной задаются при помощи формул (2.12) или (2.13), но лучше

воспользоваться более точными асимптотическими рядами

$$(3.6) \quad f = -\xi + C \frac{1}{\xi^2} - 3\alpha\beta C \frac{1}{\xi^4} - 2 \left( 4\alpha^2\beta - \frac{1}{3} C \right) C \frac{1}{\xi^5} + \\ + 15\alpha^2\beta (\beta - 2\alpha) C \frac{1}{\xi^6} + \dots \\ \frac{df}{d\xi} = -1 - 2C \frac{1}{\xi^3} + 12\alpha\beta C \frac{1}{\xi^5} + 10 \left( 4\alpha^2\beta - \frac{1}{3} C \right) C \frac{1}{\xi^6} - \\ - 90\alpha^2\beta (\beta - 2\alpha) C \frac{1}{\xi^7} + \dots$$

которые выведены с учетом нелинейных членов в уравнении (2.3). Результаты расчетов представлены на фиг. 2. Полагалось, что  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.25$ ,



Фиг. 2

а коэффициенту  $C$  в формулах (3.6) придавались значения  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-6}$ . Интеграл (2.9) с  $a = a_1$  изображается прямой  $ac$ , тот же интеграл с  $a = a_2$  — прямой  $bd$ .

Значения  $v_x < -\sigma$  отвечают диапазону, в котором скорость частиц меньше и замороженной, и равновесной скоростей звука. При  $-\sigma < v_x < 1/2 - \sigma$  равновесная скорость звука ограничивает величину скорости потока снизу, а замороженная — сверху. Значения  $v_x > 1/2 - \sigma$  соответствуют диапазону, где скорость частиц больше обеих скоростей звука. Области, в которых величина скорости потока принадлежит одному из трех указанных диапазонов, отмечены на фиг. 3, 4 буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Кривые в плоскости  $\xi f$  дают распределение возмущенной скорости  $v_x(x, 0)$  вдоль центральной линии тока (оси сопла), причем, согласно равенствам (2.1)

$$v_x(x, 0) = -\sigma - 2\nu \frac{d}{c^2} f(\xi)$$

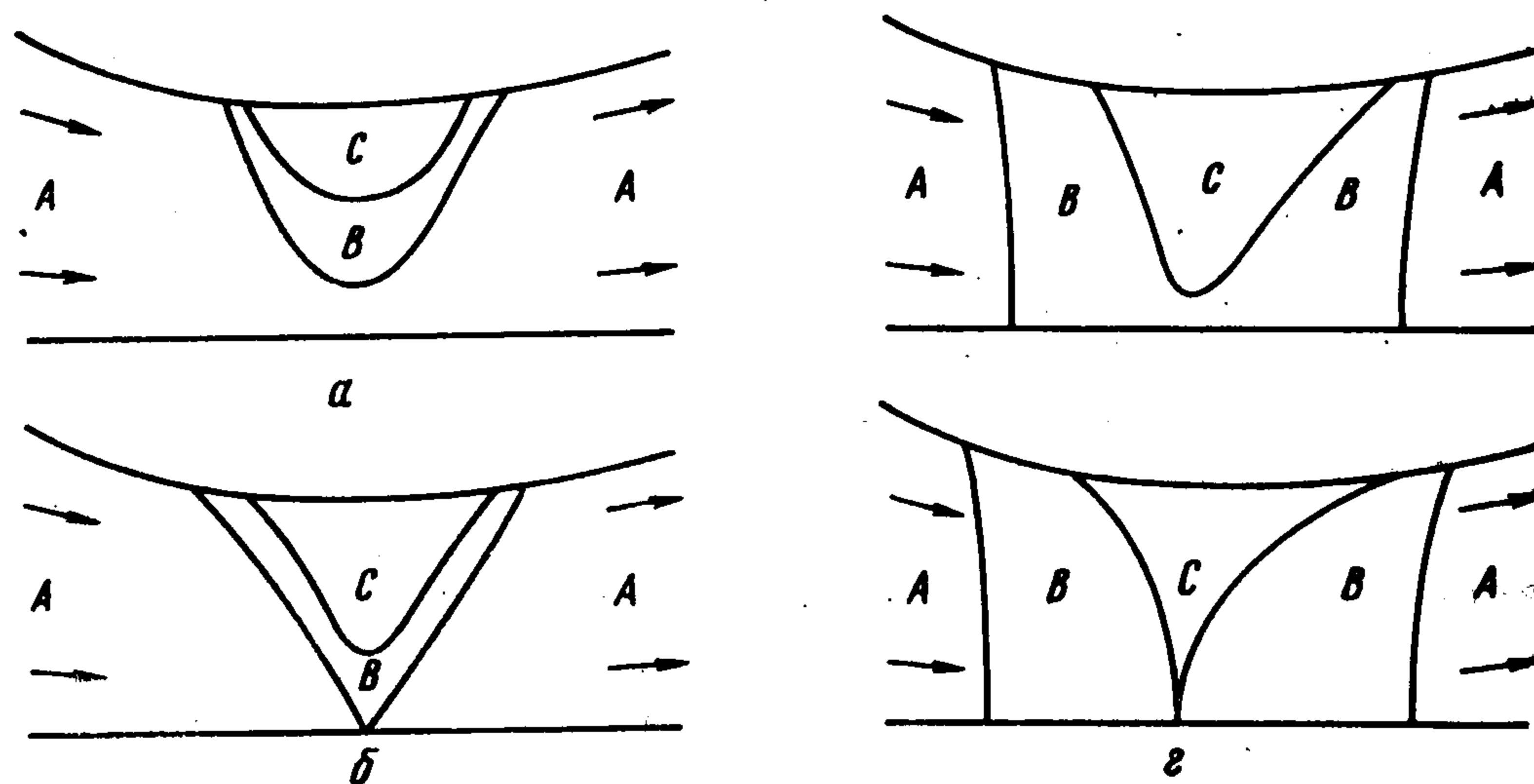
Выбирая кривые в полуплоскости  $f > 0$ , получим течения, в которых частицы движутся вдоль центральной линии тока со скоростью, меньшей равновесной скорости звука, но могут разгоняться до скоростей, превышающих как равновесную, так и замороженную скорости звука в расположенных у стенок канала зонах.

Видно, что при  $f = -\beta$  функция  $v_x(x, 0) = 1/2 - \sigma$ . Поэтому интегральные кривые уравнения (2.3), пересекающие полосу  $-\beta < f < 0$ , дают течения со скоростью, меньшей замороженной и большей равновесной скорости звука на центральной линии тока. Скорость частиц в этих течениях может превосходить первую из названных скоростей звука на некотором удалении от оси симметрии.

Течения обоих рассматриваемых типов являются непрерывными.

Сопоставим эти течения с одномерными течениями релаксирующей смеси, которые подробно изучены в работах [3,12,13]; в [13] изложены, кроме того, глубокие соображения относительно их устойчивости. Для сравнения приведем также геометрические характеристики течений инертного газа.

Проходящие в полуплоскости  $f > 0$  кривые изображают течения, не имеющие аналогов среди одномерных. Схематически эти течения показаны на фиг. 3, а. На больших расстояниях от оси сопла поток переходит сначала через равновесную, а затем



Фиг. 3

через замороженную скорости звука. Если вместо релаксирующей смеси обратиться к инертному газу, то рассматриваемым течениям будут отвечать течения с местными сверхзвуковыми зонами, прилегающими к стенкам канала.

Интегральная кривая уравнения (2.3), касающаяся оси  $f = 0$ , дает предельное течение со слившимися на центральной линии тока областями, где скорость частиц превосходит равновесную скорость звука (фиг. 3, б). Наличие химической реакции приводит к тому, что предельное течение не обладает каким-либо особым характером. Как и для вязкого инертного газа [7-9], в точке слияния областей с  $v_x(x, r) > -\sigma$  производная  $\partial v_x(x, 0) / \partial x = 0$ . Кривая, на которой скорость частиц достигает равновесной скорости звука, имеет угловую точку на оси симметрии. Соответствующее предельное течение невязкого инертного газа изображается на фиг. 2 ломаной  $aob$ , в нем производная  $\partial v_x(x, 0) / \partial x \neq 0$  и терпит разрыв в точке слияния местных сверхзвуковых зон; только в том случае, когда звуковая линия является прямой, ускорение обращается в нуль при ее пересечении с осью симметрии [14,15].

Достижение возмущенной скоростью  $v_x(x, 0)$  величин, превышающих  $-\sigma$ , не приводит к качественному изменению поля потока. Лишь при выборе ее максимальных значений вблизи правого конца интервала  $-\sigma < v_x(x, 0) < 1/2 - \sigma$  в потоке появляются, как это следует из поведения кривых на фиг. 2, области с относительно большими градиентами параметров смеси. Такие области можно трактовать как ударные волны с полной дисперсией, структура которых в одномерных течениях изучена в работах [3,12,13]. Качественно аналогия получается полной, но в рассматриваемом случае распределение параметров газа внутри ударной волны будет несколько сложнее из-за наличия поперечной составляющей вектора скорости. Схематически течения с  $-\sigma < v_x(x, 0) < 1/2 - \sigma$  показаны на фиг. 3, в. Если от релаксирующей смеси перейти к инертному газу, то им снова нужно поставить в соответствие течения с местными сверхзвуковыми зонами у стенок канала. Отличительная черта течений релаксирующей смеси заключается в том, что в них кривая, на которой скорость частиц достигает равновесной скорости звука, распадается на две отдельные ветви, соединяющие стенки с осью симметрии. Окрестность второй из этих ветвей, где совершается быстрое торможение потока, является полностью диспергированной ударной волной.

Обратимся ко второму предельному случаю, когда на центральной линии тока происходит слияние областей со скоростями, превышающими замороженную скорость звука. Изображение предельного течения на фиг. 2 складывается из прямой  $ao_1$  и кривой  $o_1b_1$ . Это течение имеет особую природу, поскольку точка  $o_1$  соответствует характеристике исходной системы уравнений газодинамики, вдоль которой смыкаются аналитически различные решения. Область больших градиентов здесь представляет собой полностью диспергированную ударную волну со скоростью частиц перед ней, в точности равной замороженной скорости звука. Одномерная структура такой волны также характеризуется неаналитическим распределением параметров релаксирующей смеси: по одну сторону от точки-характеристики равномерный поток вообще не подвергается воздействию возмущений и находится в состоянии полного термодинамического равновесия [3,12,13]. При слиянии областей с  $v_x(x, r) > 1/2 - \sigma$  производная  $\partial v_x(x, 0) / \partial x \neq 0$  и терпит разрыв. Аналогичной особенностью, как отмечалось выше, обладает поле скоростей невязкого инертного газа со слившимися на центральной линии тока местными сверхзвуковыми зонами. Эта особенность приводит к тому, что кривая, на которой скорость частиц достигает замороженной скорости звука, пересекает ось симметрии под прямым углом и имеет там точку возврата (фиг. 3,  $\varepsilon$ ).

4. Ударные волны с неполной дисперсией. Рассмотрим другой нерасчетный режим работы сопла Лавала, когда область, в которой частицы движутся со скоростью, превышающей не только равновесную, но и замороженную скорости звука, занимает всю центральную часть канала. В плоскости  $\xi f$  изображением потока в подводящей части сопла служит прямая  $ao_1$ , поэтому здесь в распределении параметров смеси не происходит никаких изменений по сравнению с только-что рассмотренным предельным случаем слившихся на оси симметрии местных зон, в которых массовая скорость больше замороженной скорости звука. Поскольку переход вдоль прямой  $ac$  через прямую  $f = -\beta$  допустим, то все течение вплоть до ударного фронта будет описываться интегралом (2.9) с  $a = a_1 = -1$ . За скачком уплотнения поле потока задается функцией  $f$ , определяемой в результате интегрирования уравнения (2.3).

Выведем граничные условия, которые должны удовлетворяться на скачке уплотнения в рассматриваемом приближении. Будем следовать анализу соотношений Гюгонио, данному Буземанном [16] применительно к трансзвуковым течениям инертного газа. Вернемся к исходным размерным переменным и отметим индексом 1 значения параметров газа на той стороне линии разрыва, которая обращена к набегающему потоку, а индексом 2 соответствующие значения на противоположной стороне этой линии. Первое условие

$$(4.1) \quad q_2 = q_1$$

очевидно; оно следует из того факта, что процесс ударного сжатия газа совершается мгновенно.

Обозначим через  $\alpha_f$  замороженный угол Маха, а через  $\gamma$  угол между касательной к фронту ударной волны и осью  $r$ ; в собственно трансзвуковом режиме угол  $\gamma$  мал. С учетом равенства (4.1) для любой слабой ударной волны [11]

$$\cos \gamma = \sin \alpha_{f_1} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m_{f_1}}{\sin^2 \alpha_{f_1}} \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 a_{f_1}^2} \right)$$

При вычислении угла Маха необходимо принять во внимание, что скорость потока на бесконечности близка к обеим скоростям звука. В первом приближении имеем

$$\sin \alpha_{f_1} = \frac{a_{f_1}}{v_1} = 1 + m_{f_\infty} \frac{p_1 - p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2} - \frac{v_\infty - a_{f_\infty}}{v_\infty}$$

Разлагая в ряд  $\cos \gamma$ , из последних двух формул находим

$$(4.2) \quad \gamma^2 = 2 \frac{v_\infty - a_{f_\infty}}{v_\infty} - m_\infty \frac{p_2 + p_1 - 2p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2}$$

Это соотношение связывает угол наклона ударного фронта с изменением давления при переходе через него. Третье условие, которому нужно удовлетворить на скачке уплотнения, заключается в непрерывности тангенциальной составляющей вектора скорости

$$(4.3) \quad \gamma v_{x1} + v_{r1} = \gamma v_{x2} + v_{r2}$$

Если обозначить линию разрыва через  $x = x_s(r)$ , то  $\gamma = dx_s / dr$ . Воспользовавшись этим равенством, подставим формулы (1.1) — (1.3) в условия (4.2) и (4.3). Как показано в работах [1-3], приращение давления  $p - p_\infty = -\rho_\infty v_\infty (v_x - v_\infty)$ . В результате перехода к безразмерным переменным (с опущенными над ними штрихами) получим теперь

$$(4.4) \quad \left(\frac{dx_s}{dr}\right)^2 = \frac{1}{2}(u_2 + u_1 - 1), \quad u_2 \frac{dx_s}{dr} + v_{r2} = u_1 \frac{dx_s}{dr} + v_{r1}$$

Будем считать, что ударный фронт имеет форму кривой второго порядка  $\xi = \xi_s = \text{const}$ , т. е.  $x = C^{-1}(\xi_s + dr^2)$ . С учетом этого равенства первое из условий (4.4) дает

$$(4.5) \quad f_2 + f_1 = -2\beta$$

в то время как второе условие удовлетворяется тождественно. Величина  $f_1 = a_1 \xi_s$ , поэтому геометрическим местом точек на плоскости  $\xi f$ , которые изображают состояния газа позади ударного фронта, будет прямая (на фиг. 2 она показана пунктирной линией).

Чтобы начать интегрирование уравнения (2.3), нужно вычислить еще значение производной  $df_2 / d\xi$ . На рассматриваемом решении уравнений газодинамики условие (4.1) принимает вид  $h_2 = h_1$ . Обращаясь к выражению (2.7) для функции  $h$ , имеем отсюда

$$(4.6) \quad \frac{df_2}{d\xi} + \frac{df_1}{d\xi} = 2 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Эта формула теряет силу в предельном случае с  $f_2 = f_1 = -\beta$ , тогда вместо нее нужно пользоваться равенствами (3.5).

Покажем, что исследование структуры поля скоростей на бесконечности вниз по потоку не приводит к дополнительным краевым условиям, которым следует удовлетворить при интегрировании уравнения (2.3). При  $\xi \rightarrow +\infty$  решение, описывающее химически активную смесь, должно стремиться к решению для невязкого инертного газа. Но все нерасчетные режимы сопла для инертного газа задаются разложениями, асимптотически приближающимися при  $\xi \rightarrow +\infty$  к интегралу (2.9) с  $a = a_2$  [6]. Отсюда следует, что при больших положительных значениях  $\xi$  решение уравнения (2.3) дол-

жно проходить в окрестности прямой  $f = a_2 \xi$ . Последнее требование будет удовлетворено только в том случае, если в асимптотическом представлении функции  $f$  содержатся две произвольные постоянные.

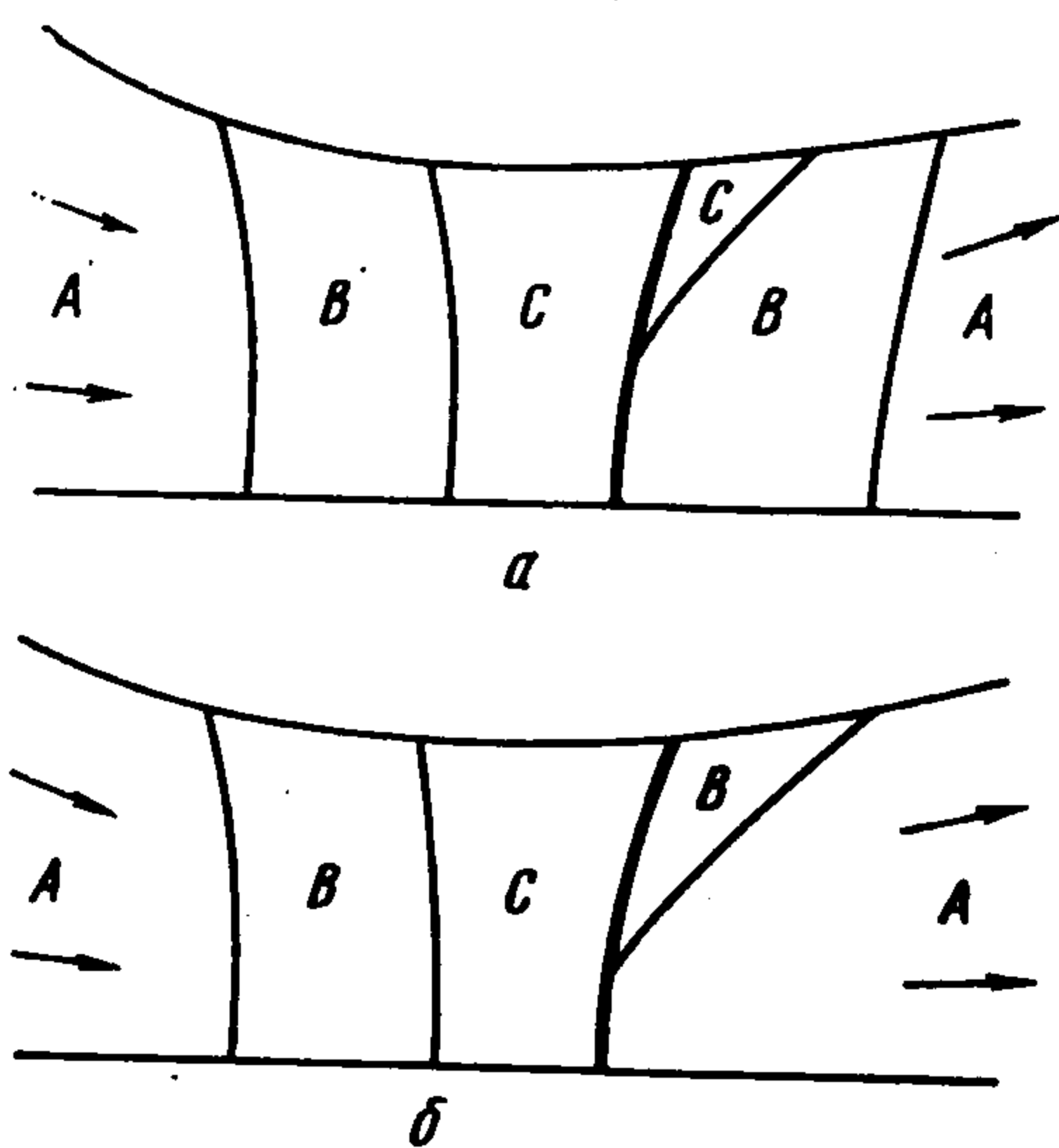
Асимптотические свойства интегральных кривых уравнения (2.3) легко установить, записав функцию  $f$  в виде (2.10), где, разумеется,  $a = a_2$ . Поправка  $\chi$  задается формулой (2.11). Отсюда при  $\xi \rightarrow +\infty$  и  $\eta \rightarrow -\infty$  находим

$$\chi = (-\eta)^{-\frac{a-1}{a}} G\left(\frac{a-1}{a}, \frac{\beta}{\alpha a}; -\eta\right) \left[ C_1 \frac{\Gamma\left(\frac{2a-1}{a} - \frac{\beta}{\alpha a}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\beta}{\alpha a}\right)} + \right. \\ \left. + C_2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a} + \frac{\beta}{\alpha a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)} \right] + \dots$$

Точки здесь обозначают экспоненциально малые члены. Поскольку при  $a = a_2$  показатель степени

$$-\frac{a-1}{a} = \frac{1 - \sqrt{1 + 8/\nu}}{1 + \sqrt{1 + 8/\nu}} < 0$$

при любых значениях постоянных  $C_1$  и  $C_2$  второе слагаемое в правой части соотношения (2.10) значительно меньше первого. Таким образом, обе величины  $C_1$  и  $C_2$  остаются произвольными.



Фиг. 4

Для рассматриваемых решений они находятся в результате численных расчетов при продолжении интегральных кривых уравнения (2.3), однозначно определяемых данными Коши (4.5) и (4.6), в область больших  $\xi$ . Приведенным на фиг. 2 кривым отвечают значения  $\xi_s = 0.3, 0.5$  и  $0.7$ .

При  $f_1 = a_1 \xi_s$  производная  $df_2 / d\xi = 1 + a_2 + 2\beta / \alpha$  не зависит от положения скачка уплотнения. За его фронтом градиенты параметров релаксирующей смеси получаются сравнительно большими, поэтому скачок уплотнения вместе с прилегающей к нему сзади областью можно трактовать как ударную волну с неполной дисперсией. Качественно весьма близкой структурой обладают неполностью диспергированные ударные волны в одномерных течениях [8,12,13].

Поля скоростей в течениях с разрывами показаны на фиг. 4, а, б, где скачок уплотнения изображен жирной линией. Первый из этих режимов характеризуется довольно слабой ударной волной, за ее фронтом возмущенная скорость  $-\sigma < v_{x2}(x_s, 0) < <^{1/2} - \sigma$ . Интенсивность скачка уплотнения во втором режиме значительно больше, так что  $v_{x2}(x_s, 0) < -\sigma$ . Обоим режимам соответствуют течения инертного газа, в которых сверхзвуковая область занимает всю горловину сопла Лавала. Для инертного газа  $df_2 / d\xi = 1 + a_2$ . Поэтому в области потока, прилегающей сзади к линии разры

Полы скоростей в течениях с разрывами показаны на фиг. 4, а, б, где скачок уплотнения изображен жирной линией. Первый из этих режимов характеризуется довольно слабой ударной волной, за ее фронтом возмущенная скорость  $-\sigma < v_{x2}(x_s, 0) < <^{1/2} - \sigma$ . Интенсивность скачка уплотнения во втором режиме значительно больше, так что  $v_{x2}(x_s, 0) < -\sigma$ . Обоим режимам соответствуют течения инертного газа, в которых сверхзвуковая область занимает всю горловину сопла Лавала. Для инертного газа  $df_2 / d\xi = 1 + a_2$ . Поэтому в области потока, прилегающей сзади к линии разры

ва, градиенты параметров релаксирующей смеси больше градиентов, которые получаются для инертного газа. Отличие объясняется химическим превращением элементов смеси в не полностью диспергированной ударной волне.

Отметим в заключение, что для интегралов  $f = a\xi$  с  $a = a_{1,2}$  функция  $h = a(\xi - \alpha)$ . Согласно определению (2.8) химического сродства, имеем отсюда

$$Q = -2ve_{12\infty}\alpha a \frac{d}{c^2} \neq 0$$

Поступила 11 IV 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Napolitano L. G.* Small perturbation theories for singly reacting mixtures. I. A. Report, 1966, No 135.
2. *Наполитано Л. Дж., Рыжов О. С.* Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околосвуковых скоростях. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5.
3. *Рыжов О. С.* О собственно трансзвуковом режиме в течениях реагирующей смеси. В сб.: Проблемы прикладной математики и механики. М., «Наука», 1971.
4. *Tomotika S., Tamada K.* Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluids. Pt. 1. Quart. Appl. Math., 1950, vol. 7, No. 4.
5. *Tomotika S., Hasimoto Z.* On the transonic flow of a compressible fluid through an axially symmetrical nozzle. J. Math. and Phys., 1950, vol. 29, No. 2.
6. *Рыжов О. С.* О работе сопел Лаваля в нерасчетных режимах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 4.
7. *Sichel M.* The effect of longitudinal viscosity on the flow at a nozzle throat. J. Fluid Mech., 1966, vol. 25, pt. 4.
8. *Sichel M., Yin Y. K.* An axisymmetric similarity solution for viscous-transonic nozzle flow. J. Fluid Mech., 1967, vol. 28, pt. 3.
9. *Рыжов О. С.* О некоторых свойствах трансзвуковых течений реального газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 2.
10. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions, vol. 1. New-York — Toronto — London, McGraw-Hill, 1953.
11. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны, М., Изд-во иностр. лит. 1950.
12. *Кларк Дж., Макчесни М.* Динамика реальных газов. М., «Мир», 1967.
13. *Полянский О. Ю.* О неустойчивости некоторых стационарных течений релаксирующего газа. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 3.
14. *Франкль Ф. И.* О плоско-параллельных воздушных течениях через каналы при околосвуковых скоростях. Матем. сб., 1933, т. 40, № 1.
15. *Görtler H.* Zum Übergang von Unterschall-zu Überschallgeschwindigkeiten in Düsen. ZAMM, 1939, Bd. 19, No 6.
16. *Busemann A.* Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung. Luftfahrt — Forschung, 1942, Bd. 19, No 4.