Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.36

О ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЯХ ЛЯПУНОВА И СТАБИЛИЗАЦИИ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

В. Д. Фурасов

(Москва)

Рассматриваются некоторые вопросы, связанные с применением векторных функций Ляпунова при решении задач стабилизации взаимосвязанных систем. Находится множество управляющих воздействий, удовлетворяющих критерию затухания переходных процессов. Показывается, что предложенная конструкция векторной функции Ляпунова позволяет получить решение поставленной задачи при более мягких ограничениях, накладываемых на управляющие воздействия, чем ограничения, которые могут быть получены с помощью конструкции Бейли [1]. Определяются свойства полученного множества воздействий. Из найденного множества выделяются управляющие воздействия, обеспечивающие стабилизацию взаимосвязанных систем при неполной информации о характеристиках исполнительных устройств. Показывается оптимальность выделенных воздействий по отношению к векторным функционалам.

1. Постановка задачи. Рассмотрим совокупность l гладких динамических систем, возмущенное движение которых в области

$$\|x_i\| \leqslant r_i, \quad t \geqslant 0 \quad (\|x_i\|^2 = (x_i, x_i), \quad r_i = \text{const}, \quad r_i > 0) \tag{1.1}$$

описывается дифференциальными уравнениями

$$x_i^{\cdot} = F_i(x_i, t) + G_i(x_i, t)u_i + \sum_{j=1}^{l} H_{ij}(x_1, \ldots, x_l, t)x_j, \quad i = 1, \ldots, l \tag{1.2}$$

Здесь x_i — вектор переменных по отношению к которым осуществляется стабилизация i-й системы, $x_i \in R^{n_i}$, F_i и G_i — вектор-функция и матрица, определенные и непрерывные в (1.1) вместе со своими частными производными по x_i и t, u_i — вектор управляющих воздействий, $u_i \in R^{m_i}$, H_{ij} — матрица, характеризующая влияние j-й системы на поведение i-й системы ($H_{ii} \equiv 0$), t — время.

Задачу о стабилизации взаимосвязанных систем по аналогии с [2,3] сформулируем следующим образом.

Задача. Даны положительные числа h_{ij}, t_i^*, d_i и ε_i ($h_{ii} = 0, \varepsilon_i \leqslant d_i$, $i, j = 1, \ldots, l$), совокупность взаимосвязанных систем (1.2), множество Ω непрерывных управляющих воздействий

$$u_i = u_i(x_i, t), \quad i = 1, \ldots, l$$

Требуется из Ω выделить подмножество воздействий, на котором заданная совокупность систем асимптотически устойчива и переходные процессы удовлетворяют условию

$$\|x_i(t)\| \leqslant \varepsilon_i, \quad t \geqslant t_i^*, \quad i = 1, \ldots, l \tag{1.3}$$

при любых начальных возмущениях

(1.4) $\quad \| x_i (0) \| \leqslant d_i, \quad i = 1, \ldots, l$

и любых матрицах H_{ij}, удовлетворяющих оценкам

$$\| H_{ij} (x_1, \ldots, x_l, t) x_j \| \leqslant h_{ij} \| x_j \|, \quad i, j = 1, \ldots, l$$

Условия (1.3), (1.4), которые будем называть критерием затухания переходных процессов, имеют общие черты с задачами, оптимизации векторных функционалов [4–6] и с задачами, рассмотренными в [3, 7, 8]. Поэтому предлагаемое решение поставленной задачи основывается на функциях Ляпунова, удовлетворяющих оценкам, характерным для квадратичных форм [9], и существенным образом связано с понятием векторной функции Ляпунова [10–14].

2. Решение задачи. Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_l$ — постоянные положительные величины, $V_1 (x_1, t), \ldots, V_l (x_l, t)$ — функции Ляпунова, удовлетворяющие оценкам

(2.1) $\quad c_{i1}^2 \| x_i \|^2 \leqslant V_i (x_i, t) \leqslant c_{i2}^2 \| x_i \|^2 \quad (c_{i1}, c_{i2} = \mathrm{const} > 0, \ i = 1, \ldots, l)$

(2.2) $\quad \| \partial V_i / \partial x_i \|^2 \leqslant c_{i3}^2 V_i (x_i, t) \quad (c_{i3} = \mathrm{const} > 0, \ i = 1, \ldots, l)$

в области (1.1), $\lambda_1 (x_1, t), \ldots, \lambda_l (x_l, t)$ — произвольные гладкие скалярные функции, $P_1 (x_1, t), \ldots, P_l (x_l, t)$ — произвольные кососимметричекие матрицы, $y_1^* (t), \ldots, y_l^* (t)$ — частное решение уравнений

(2.3) $$y_i^{\cdot} = -\frac{\beta_i}{2} y_i + \sum_{j=1}^{l} \frac{c_{i3} h_{ij}}{2 c_{j1}} y_j, \quad y_i^* (0) = c_{i2} d_i, \quad i = 1, \ldots, l$$

Теорема. Множество управляющих воздействий

(2.4) $$u_i = -\frac{\lambda_i}{2} G_i' \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + P_i G_i' \frac{\partial V_i}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, l$$

удовлетворяет критерию затухания переходных процессов, если

(2.5) $$\frac{\partial V_i}{\partial t} \leqslant -\beta_i V_i (x_i, t) - \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, F_i \right) + \frac{\lambda_i}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, G_i G_i' \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, \ldots, l$$

нулевое решение уравнений (2.3) асимптотически устойчиво ($y_i^* (t) \to 0$ при $t \to \infty$) и

(2.6) $\quad y_i^* (t) \leqslant c_{i1} \varepsilon_i, \quad t \geqslant t_i^*, \quad i = 1, \ldots, l$

Для доказательства теоремы рассмотрим производные функций $V_1 (x_1, t), \ldots, V_l (x_l, t)$, определенные на движениях систем (1.2), отвечающих управляющим воздействиям (2.4). При выполнении указанных неравенств

$$V_i^{\cdot} (x_i, t) \leqslant \Delta (V_i (x_i, t))$$

$$\Delta (V_i) = -\beta_i V_i + \sum_{j=1}^{l} \frac{c_{i3} h_{ij}}{c_{j1}} (V_i V_j)^{1/2}, \quad i = 1, \ldots, l$$

Следовательно, при всех $t \geqslant 0$

(2.7) $\quad V_i (x_i(t), t) \leqslant \xi_i (t), \quad i = 1, \ldots, l$

если $V_i(x_i(0), 0) = \xi_i(0)$ и $\xi_i(t)$ — частное решение уравнений

$$\xi_i^{\cdot} = \Delta(\xi_i), \quad i = 1, \ldots, l \tag{2.8}$$

В рассматриваемом случае $\xi_i(t) \neq 0$, если $\xi_i(0) \neq 0$, поэтому замена переменных $\xi_i = y_i^2$ приводит систему (2.8) к виду (2.3). Нулевое решение полученных уравнений в силу условий теоремы асимптотически устойчиво. Следовательно, асимптотически устойчиво и нулевое решение уравнений (1.2), (2.4).

Далее, при любых начальных возмущениях (1.4)

$$(V_i(x_i(t), t))^{1/2} \leqslant y_i^*(t), \quad t \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, l$$

и так как при этом $\| x_i \| \leqslant (V_i(x_i, t))^{1/2} / c_{i1}$, то при всех $t \geqslant 0$

$$\| x_i(t) \| \leqslant y_i^*(t) / c_{i1}, \quad i = 1, \ldots, l$$

и в силу условия (2.6) теоремы неравенства (1.3) выполняются на всех движениях систем (1.2), (2.4), начинающихся в области (1.4). Теорема доказана.

Покажем теперь, что конструкция векторной функции Ляпунова, используемая при доказательстве теоремы, приводит к решению поставленной задачи при более мягких ограничениях, накладываемых на управляющие воздействия, чем ограничения, которые могут быть получены с помощью вектор-функции Ляпунова, предложенной Бейли [1]. С этой целью рассмотрим неравенства (2.1), (2.2) и (2.5). При их выполнении

$$V_i^{\cdot}(x_i, t) \leqslant -\beta_i V_i(x_i, t) + c_{i3}(V_i(x_i, t))^{1/2} \sum_{j=1}^{l} h_{ij} \| x_j \|, \quad i = 1, \ldots, l$$

Отсюда в соответствии с [1]

$$V_i^{\cdot}(x_i, t) \leqslant -\frac{\beta_i}{2} V_i(x_i, t) + \frac{1}{2\beta_i} c_{i3}^2 \sum_{j=1}^{l} h_{ij}^2 \sum_{j=1,\, j\neq i}^{l} \| x_j \|^2 \leqslant \Delta^*(V_i(x_i, t))$$

$$\Delta^*(V_i) = -\frac{\beta_i}{2} V_i + \frac{1}{2\beta_i} c_{i3}^2 \sum_{j=1}^{l} h_{ij}^2 \sum_{j=1,\, j\neq i}^{l} \frac{1}{c_{j1}^2} V_j, \quad i = 1, \ldots, l$$

Таким образом, при всех $t \geqslant 0$

$$V_i(x_i(t), t) \leqslant z_i(t), \quad i = 1, \ldots, l \tag{2.9}$$

если $V_i(x_i(0), 0) = z_i(0)$ и $z_i^{\cdot} = \Delta^*(z_i)$, $i = 1, \ldots, l$.

Но в рассматриваемом случае

$$\Delta(V_i) \leqslant -\frac{\beta_i}{2} V_i + \frac{1}{2\beta_i} \left[\sum_{j=1}^{l} \frac{c_{i3} h_{ij}}{c_{j1}} (V_j)^{1/2} \right]^2 \leqslant \Delta^*(V_i), \ i = 1, \ldots, l$$

Следовательно, при всех $t \geqslant 0$

$$\xi_i(t) \leqslant z_i(t), \quad i = 1, \ldots, l$$

что и доказывает сделанное утверждение (см. оценки (2.7) и (2.9)).

Заметим, что в случае, когда $h_{ij} = 0$, $i, j = 1, \ldots, l$, в соответствии с теоремой множество управляющих воздействий (2.4) удовлетворяет критерию затухания переходных процессов, если

$$\beta_i \geqslant \frac{1}{t_i^*} \ln \frac{c_{i2} d_i}{c_{i1} \varepsilon_i}, \quad i = 1, \ldots, l$$

Применение же оценок (2.9) в этом случае дает

$$\beta_i \geqslant \frac{2}{t_i^*} \ln \frac{c_{i2} d_i}{c_{i1} \varepsilon_i}, \quad i = 1, \ldots, l$$

3. Определение свойств полученных воздействий. Множество управляющих воздействий (2.4) определено с точностью до произвольных функций $\lambda_1(x_1; t), \ldots, \lambda_l(x_l, t)$ и матриц $P_1(x_1, t), \ldots, P_l(x_l, t)$. Естественно, что при решении конкретных задач стабилизации произвол в выборе названных функций и матриц может быть использован самым различным образом. Однако при этом нужно иметь в виду, что в случае, когда $\lambda_i(x_i, t) \leqslant 0$, переходные процессы в системах (1.2) заведомо удовлетворяют заданному критерию качества при $u_i \equiv 0$, если они удовлетворяют этому критерию качества в силу условий доказанной теоремы.

Считая в дальнейшем выполненными неравенства

$$(3.1) \qquad \lambda_i(x_i, t) > 0$$

рассмотрим управляющие воздействия

$$(3.2) \qquad u_i = -\frac{\lambda_i}{2} G_i' \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$$

и предположим, что

$$(3.3) \qquad \frac{\partial V_i}{\partial t} = -\beta_i V_i(x_i, t) - \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, F_i\right) + \frac{\lambda_i}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, G_i G_i' \frac{\partial V_i}{\partial x_i}\right), \quad i = 1, \ldots, l$$

Управляющие воздействия (3.2) являются, очевидно, частным случаем воздействий (2.4). При этом, если (2.4) — множество воздействий, обеспечивающих выполнение неравенств

$$\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, F_i + G_i u_i\right) + \frac{\partial V_i}{\partial t} \leqslant -\beta_i V_i(x_i, t), \quad i = 1, \ldots, l$$

в области (1.1), то (3.2) — управляющие воздействия, гарантирующие выполнение указанных неравенств с наименьшим значением величины $z_w = \| u_1 \|^2 + \ldots + \| u_l \|^2$ в каждой точке $\{x_1, \ldots, x_l, t\}$ этой области.

По аналогии с [3,8] управляющие воздействия (3.2) будем называть воздействиями, оптимальными по принуждению.

Управляющие воздействия, оптимальные по принуждению, обладают важным свойством: они являются решением задачи о стабилизации для систем

$$(3.4) \qquad x_i^{\cdot} = F_i(x_i, t) + G_i(x_i, t)\varphi_i(u_i, t) + \sum_{j=1}^{l} H_{ij}(x_1, \ldots, x_l, t) x_j, \quad i = 1, \ldots, l$$

при любых непрерывных вектор-функциях $\varphi_1(u_1, t), \ldots, \varphi_l(u_l, t)$, удовлетворяющих неравенствам

$$(3.5) \qquad (u_i, \varphi_i(u_i, t)) \geqslant (u_i, u_i), \quad t \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, l$$

В самом деле, при выполнении неравенств (3.5)

$$\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, F_i + G_i\varphi_i\left(-\frac{\lambda_i}{2}G_i'\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, t\right)\right) + \frac{\partial V_i}{\partial t} = -\beta_i V_i(x_i, t) + $$
$$+\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, G_i\varphi_i\left(-\frac{\lambda_i}{2}G_i'\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, t\right)\right) + \frac{\lambda_i}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, G_iG_i'\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\right) \leqslant$$
$$\leqslant -\beta_i V_i(x_i, t) \qquad i = 1, \ldots, l$$

и справедливость сделанного утверждения непосредственно вытекает из доказанной теоремы.

В работах Н. Н. Красовского и А. М. Летова была установлена связь функций Ляпунова с задачами оптимального управления. Дополнительный интерес здесь представляет то обстоятельство, что управляющие воздействия, оптимальные по принуждению, являются воздействиями, оптимальными и по отношению к векторному функционалу

$$(3.6)\qquad I_i(u_1, \ldots, u_l) = \int\limits_0^\infty \left[\beta_i V_i(x_i, t) - \sum_{j=1}^{l}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, H_{ij}x_j\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{\lambda_i}{4}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, G_iG_i'\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\right) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{l}\left\| u_j + \frac{\lambda_j}{2}G_j'\frac{\partial V_j}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{\lambda_i}\|u_i\|^2\right]dt$$
$$i = 1, \ldots, l$$

Действительно, в соответствии с [15] управляющие воздействия

$$(3.7)\qquad u_k^\circ = -\frac{\lambda_k}{2}G_k'\frac{\partial S}{\partial x_k}, \quad u_j^\circ = -\frac{\lambda_j}{2}G_j'\frac{\partial V_j}{\partial x_j} - \frac{\lambda_j}{2}G_j'\frac{\partial S}{\partial x_j}, \; j \neq k, \, j = 1, \ldots, l$$

доставляют минимум k-му функционалу (3.6), если нулевое решение уравнений (1.2), (3.7) асимптотически устойчиво, и функция $S = S(x_1, \ldots, x_l, t)$ удовлетворяет известному уравнению в частных производных. Этому уравнению можно удовлетворить, положив $S = V_k(x_k, t)$. Тогда

$$(3.8)\qquad u_i^\circ = -\frac{\lambda_i}{2}G_i'\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, l$$

и так как нулевое решение уравнений (1.2), (3.8) в силу построения управляющих воздействий (3.2) асимптотически устойчиво, то справедливость сделанного утверждения непосредственно следует из [15].

Построение управляющих воздействий, оптимальных по принуждению, связано с решением уравнений в частных производных (3.3). Однако управляющие воздействия (3.2) являются решением поставленной задачи и тогда, когда функции Ляпунова удовлетворяют неравенствам (2.5). При выполнении указанных неравенств и неравенств (3.1) управляющие воздействия (3.2) будем называть квазиоптимальными воздействиями.

Свойства квазиоптимальных воздействий аналогичны свойствам воздействий, оптимальных по принуждению. Так, на всех движениях систем (1.2), начинающихся в области (1.4), они доставляют минимум функционалам

$$I_i(u_1, \ldots, u_l) = \int\limits_0^\infty \left[\frac{\lambda_i}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, G_iG_i'\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, F_i\right) - \frac{\partial V_i}{\partial t} - \right.$$
$$\left. -\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, H_{ij}x_j\right) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{l}\left\| u_j + \frac{\lambda_j}{2}G_j\frac{\partial V_j}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{\lambda_i}\|u_i\|^2\right]dt,$$
$$i = 1, \ldots, l$$

При выполнении неравенств (3.5) квазиоптимальные воздействия являются решением поставленной задачи для систем (3.4).

4. Пример. Пусть возмущенное движение взаимосвязанных систем описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i \varphi_i(u_i, t) + \sum_{j=1}^{l} H_{ij}(x_1, \ldots, x_l, t)\, x_j$$

$$\operatorname{rank}[B_i, A_i B_i, \ldots, A_i^{n_i-1} B_i] = n_i, \quad i = 1, \ldots, l$$

где A_i и B_i — постоянные матрицы, удовлетворяющие указанному условию.

В этом случае, положив $\lambda_i = \text{const} > 0$, условиям теоремы можно удовлетворить функциями

(4.1) $$V_1 = (x_1, \Gamma_1 x_1), \ \ldots, \ V_l = (x_l, \Gamma_l x_l)$$

Решение поставленной задачи теперь сводится к отысканию матриц $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$, удовлетворяющих уравнениям

(4.2) $$0 = -\beta_i \Gamma_i - \Gamma_i A_i - A_i' \Gamma_i + 2\lambda_i \Gamma_i B_i B_i' \Gamma_i$$

или неравенствам

$$0 \leqslant -\beta_i \Gamma_i - \Gamma_i A_i - A_i' \Gamma_i + 2\lambda_i \Gamma_i B_i B_i' \Gamma_i, \quad i = 1, \ldots, l$$

определению наименьших и наибольших собственных значений найденных матриц и проверке выполнения условия (2.6).

При выполнении указанного условия порождаемые функциями (4.1) управляющие воздействия

$$u_i = -\lambda_i B_i' \Gamma_i x_i, \quad i = 1, \ldots, l$$

удовлетворяют критерию затухания переходных процессов при любых изменениях вектор-функций $\varphi_1(u_1, t), \ldots, \varphi_l(u_l, t)$, допускаемых неравенствами (3.5).

Рассмотрим теперь некоторые особенности решения уравнений (4.2) в случае, когда A_i, B_i — $(n \times n)$- и $(n \times 1)$-матрицы

$$A_i = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \quad B_i = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad i = 1, \ldots, l$$

В рассматриваемом случае при $n = 2$ уравнениям (4.2) можно удовлетворить матрицами

$$\Gamma_i = \frac{1}{2\lambda_i} \begin{Vmatrix} \beta_i^3 & \beta_i^2 \\ \beta_i^2 & 2\beta_i \end{Vmatrix}, \quad i = 1, \ldots, l \quad (\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_l > 0)$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ — произвольные постоянные величины, удовлетворяющие указанным неравенствам.

При $n = 3$ матрицы Γ_i определяются выражениями

$$\Gamma_i = \frac{1}{2\lambda_i} \begin{Vmatrix} \beta_i^5 & 2\beta_i^4 & \beta_i^3 \\ 2\beta_i^4 & 5\beta_i^3 & 3\beta_i^2 \\ \beta_i^3 & 3\beta_i^2 & 3\beta_i \end{Vmatrix}, \quad i = 1, \ldots, l$$

Отсюда, по индукции, для любого n

$$
\Gamma_i = \frac{1}{2\lambda_i}\left\|\begin{array}{ccccc}
\overset{\circ}{\gamma}_{11}\beta_i^{2n-1} & \overset{\circ}{\gamma}_{12}\beta_i^{2n-2} & \ldots & \overset{\circ}{\gamma}_{1,\,n-1}\beta_i^{n+1} & \overset{\circ}{\gamma}_{1n}\beta_i^{n} \\
\overset{\circ}{\gamma}_{12}\beta_i^{2n-2} & \overset{\circ}{\gamma}_{22}\beta_i^{2n-3} & \ldots & \overset{\circ}{\gamma}_{2,\,n-1}\beta_i^{n} & \overset{\circ}{\gamma}_{2n}\beta_i^{n-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\overset{\circ}{\gamma}_{1,n-1}\beta_i^{n+1} & \overset{\circ}{\gamma}_{2,\,n-1}\beta_i^{n} & \ldots & \overset{\circ}{\gamma}_{n-1,\,n-1,\,n}\beta_i^{3} & \overset{\circ}{\gamma}_{n-1,\,n}\beta_i^{2} \\
\overset{\circ}{\gamma}_{1n}\beta_i^{n} & \overset{\circ}{\gamma}_{2n}\beta_i^{n-1} & \ldots & \overset{\circ}{\gamma}_{n-1,\,n}\beta_i^{2} & \overset{\circ}{\gamma}_{nn}\beta_i
\end{array}\right\| \tag{4.3}
$$

где, что существенно, $\gamma_{ij}{}^\circ$ — положительные постоянные, не зависящие от $\beta_i, i = 1, \ldots, l$.

Предположим теперь, что, используя тот или иной метод, решение уравнений (4.2) может быть получено с помощью электронных вычислительных машин. Тогда, решая на ЭВМ одно из уравнений (4.2) при $\beta_i = 1$, $\lambda_i = 1$ и подставляя затем найденные значения $\gamma_{ij}{}^\circ$ в (4.3), получим матрицы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$, отвечающие любым значениям постоянных $\beta_1, \ldots, \beta_l$.

Рассмотренный пример достаточно наглядно показывает возможности сочетания аналитических и машинных методов при построении взаимосвязанных систем, обладающих заданным качеством. Впрочем, в рассматриваемом случае матрицы Γ_i могут быть найдены чисто аналитически для любых значений n.

Поступила 3 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bailey F. N.* The application of Lyapunov's second method to interconnected systems. J. Siam. Control. Ser. A. 1965, vol. 3, No. 3.
2. *Летов А. М.* Некоторые нерешенные задачи теории автоматического управления. Диф. уравнения, 1970, т. 6, № 4.
3. *Фурасов В. Д.* Построение управляемых систем по заданным оценкам переходного процесса. I, II. Автоматика и телемеханика, 1971, № 7, 10.
4. *Zadeh L. A.* Optimality and non-scalar Valued performace criteria. IEEE Trans. Autom. Control, 1963, vol. AC-8, No. 1.
5. *Reid R. W., Citron S. J.* On noninferior performance index vectors. J. Optimizat. Theory and Appl., 1971, vol. 7, No. 1
6. *Салуквадзе М. Е.* Об оптимизации векторных функционалов. I, II. Автоматика и телемеханика, 1971, № 8, 9.
7. *Фурасов В. Д.* Об оптимальном построении множества дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. Диф. уравнения, 1968, т. 4, № 9.
8. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д.* Построение систем программного движения, М., «Наука», 1971.
9. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
10. *Матросов В. М.* Развитие метода функций Ляпунова в теории устойчивости. Тр. II Всес. съезда по теор. и прикл. механ., вып. 1. М., «Наука», 1965.
11. *Летов А. М.* Проблематика научных исследований в области автоматического управления. Автоматика и телемеханика, 1966, № 8.
12. *Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения. В кн: Механика в СССР за 50 лет, т. 1, М., «Наука», 1968.
13. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М., «Наука», 1970.
14. *Matrosov V. M.* Vector Lyapunov functions in the analysis of nonliner interconnected systems. Sympos. Math., London — New Vork, 1971, vol. 6.
15. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. М., «Наука», 1970.