Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.36

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. М. Лахаданов

(Минск)

Доказывается обобщение теоремы Кельвина — Четаева. Рассматриваются некоторые вопросы стабилизации неустойчивых потенциальных систем гироскопическими и неконсервативными силами [1].

1. Рассмотрим системы (D, F — постоянные симметричные $n \times n$-матрицы)

$$x^{\cdot\cdot} + Dx^{\cdot} + Fx = 0 \tag{1.1}$$

$$x^{\cdot\cdot} + Dx^{\cdot} + Fx = X(x, x^{\cdot}) \tag{1.2}$$

$$x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n),\ X(x, x^{\cdot}) = \operatorname{col}(X_1(x, x^{\cdot}), \ldots, X_n(x, x^{\cdot})),\ X(0,0) \equiv 0$$

(функции $X_i(x, x^{\cdot})$ содержат x_i, $x_i^{\cdot}$ в степени не ниже второй).

В [2] доказан результат, который можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема Кельвина — Четаева. Если матрица D — определенно-положительная и среди собственных значений матрицы F есть хотя бы одно отрицательное, то системы (1.1) и (1.2) неустойчивы.

В работе [3] доказан результат, который можно считать обобщением теоремы Кельвина — Четаева.

Теорема [3]. Если матрица D — определенно-положительная и $|F| \neq 0$, то число корней характеристического уравнения

$$|E\lambda^2 + D\lambda + F| = 0 \tag{1.3}$$

с положительной вещественной частью равно числу отрицательных собственных значений матрицы F.

С помощью предложенной в [2] замены $x = ye^{\varepsilon t}$, где ε — подходящим образом выбранная постоянная, можно избавиться от условия $|F| \neq 0$ и доказать, что при определенно-положительной матрице D число корней характеристического уравнения (1.3) с положительной вещественной частью не меньше числа отрицательных собственных значений матрицы F. Но, оказывается, существует простое доказательство следующего более сильного утверждения.

Теорема 1.1. Число положительных корней характеристического уравнения (1.3) не меньше числа отрицательных собственных значений матрицы F.

Доказательство. Рассмотрим симметричную матрицу

$$B(\lambda) = E\lambda^2 + D\lambda + F$$

где λ — вещественный параметр. Определитель этой матрицы равен произведению ее собственных значений

$$| B(\lambda) | = b_1(\lambda) \cdot b_2(\lambda) \ldots b_n(\lambda)$$

При достаточно большом $\lambda > 0$ матрица $B(\lambda)$ определенно-положительна, а ее собственные значения больше нуля. Если среди собственных значений матрицы F $b_1(0)$, $b_2(0)$, ..., $b_n(0)$ есть отрицательные, например $b_k(0) < 0$, то в силу их непрерывности по λ существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $b_k(\lambda_0) = 0$, т. е. характеристическое уравнение (1.3) имеет положительный корень λ_0. Завершение доказательства очевидно.

Замечание. Аналогично доказывается, что число отрицательных корней характеристического уравнения (1.3) не меньше числа отрицательных собственных значений матрицы F.

Следствия. 1°. Если матрица F — определенно-отрицательная, то характеристическое уравнение (1.3) имеет n положительных корней и n отрицательных.

2°. Если среди собственных значений матрицы F есть хотя бы одно отрицательное, то системы (1.1) и (1.2) неустойчивы.

2. Рассмотрим систему (G — постоянная кососимметричная $n \times n$-матрица, характеризующая гироскопические силы, H — вещественный параметр)

$$x^{\cdot\cdot} + HGx^{\cdot} + Fx = 0 \tag{2.1}$$

Наиболее полно системы вида (2.1) рассмотрены в [4].

Теорема 2.1. Если матрица F — определенно-отрицательная и определитель $| G | \neq 0$, то система (2.1) устойчива при $H > H_0 > 0$, где H_0 определяется равенством

$$H_0 = \frac{f_1 g_1 - 1}{2 f_1 g_2} + \left[\left(\frac{f_1 g_1 - 1}{2 f_1 g_2} \right)^2 + \frac{f_1 - f_2}{g_2} \right]^{1/2} \tag{2.2}$$

в котором f_1 и g_1 — наибольшие собственные значения матриц F и $G'FFG$, f_2 и g_2 — наименьшие собственные значения матриц F и $G'G$.

Доказательство. Система (2.1) имеет интеграл энергии

$$V_1 = {}^1/_2 \, (x^{\cdot\prime} E x^{\cdot} + x' F x)$$

Легко проверить, что она имеет второй квадратичный интеграл

$$V_2 = (HGx^{\cdot} + Fx)' \, (HGx^{\cdot} + Fx) + x^{\cdot\prime} F x^{\cdot}$$

Составим линейную связку этих интегралов

$$V = 2\,(H/f_1 - f_1)\, V_1 + V_2$$

которую можно записать в виде

$$\begin{aligned} V = {} & x^{\cdot\prime} \, [H^2 G'G - HG'FFG + (H/f_1 - f_1) E + F] \, x^{\cdot} + \\ & + x' \, [(H/f_1 - f_1) F - HE + FF] \, x + H \, (x + \\ & + FGx^{\cdot})' \, (x + FGx^{\cdot}) \end{aligned}$$

Можно показать, что при $H > H_0$ квадратичная форма V определенно-положительна. Тогда в силу теоремы Ляпунова об устойчивости система (2.1) устойчива.

Если матрица F — определенно-отрицательная и все ее собственные значения равны между собой, то система (2.1) неустойчива, когда $|G| = 0$. Однако в общем случае существуют устойчивые системы (2.1), у которых матрица F — определенно-отрицательная и $|G| = 0$.

Это доказывает следующий пример.

Рассмотрим систему (2.1), у которой

$$H = 1, \quad G = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 10 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ -10 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & -10 & -100 & 0 \end{Vmatrix}, \quad -F = \begin{Vmatrix} 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{3} \end{Vmatrix}$$

Здесь матрица F — определенно-отрицательная, $|G| = 0$. Характеристическое уравнение этой системы имеет чисто мнимые различные корни, т. е. система устойчива. Заметим, что в этом примере при $H = 0$ система неустойчива, с увеличением H ($H = 1$) становится устойчивой, а при дальнейшем увеличении H становится и остается неустойчивой.

3. Рассмотрим системы (P — постоянная кососимметричная $n \times n$-матрица, характеризующая неконсервативные силы)

(3.1) $$x^{\bullet\bullet} + Gx^{\bullet} + Fx + Px = 0.$$

(3.2) $$x^{\bullet\bullet} + Gx^{\bullet} + Fx + Px = X(x, x^{\bullet})$$

О системах (3.1) и (3.2) известно:

1) система (3.1) не является асимптотически устойчивой [4];

2) если матрица F — определенно-отрицательная, то при нечетном n системы (3.1) и (3.2) неустойчивы [4];

3) если матрица F — определенно-отрицательная, $P = \alpha G$ $(\alpha > 0)$, то системы (3.1) и (3.2) неустойчивы [5].

Замечание. Ограничение $\alpha > 0$ несущественно и утверждение 3) справедливо при любом постоянном $\alpha \neq 0$.

Теорема 3.1. Если $F = kE$, где k — произвольная постоянная, и матрицы G и P коммутативны, то система (3.1) неустойчива.

Теорема 3.2. Если выполнены условия теоремы 3.1 и $|P| \neq 0$, то система (3.2) тоже неустойчива.

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 совпадают с доказательствами теорем 4 и 5 из работы [6].

Теорема 3.3. Системы (3.1) и (3.2) неустойчивы, если

(3.3) $$\sum_{i,j} g_{ij} p_{ij} \neq 0$$

где g_{ij}, p_{ij} — элементы матриц G, P.

Доказательство. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$|E\lambda^2 + G\lambda + F + P| = \lambda^{2n} + a_1\lambda^{2n-1} + \ldots + a_{2n} = 0$$

Можно показать, что в нем

$$a_1 = 0, \qquad a_3 = \sum_{i,j} g_{ij} p_{ij}$$

Если выполнено условие (3.3), то $a_3 \neq 0$, что говорит о наличии у характеристического уравнения хотя бы одного корня с отличной от нуля вещественной частью. Но тогда из условия $a_1 = 0$ следует, что характеристическое уравнение имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью. Теорема доказана.

Следствия. 1°. Если $G = \alpha P$, то системы (3.1) и (3.2) неустойчивы.

2°. Системы (3.1) и (3.2) при $n = 2$ неустойчивы.

Примеры. 1°. Рассмотрим систему (3.1), у которой

$$G = \begin{Vmatrix} 0 & -6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{Vmatrix}, \quad -F = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

где $\alpha = 0.01$. Можно показать, что характеристическое уравнение этой системы имеет чисто мнимые различные корни. Таким образом, эта система устойчива. Здесь матрица F — определенно-отрицательная, матрицы G и P коммутативны, $|P| \neq 0$, но теоремы 3.1 и 3.2 не работают, так как $F \neq kE$.

2°. Как уже отмечалось, систему

(3.4) $$x^{\cdot\cdot} + Fx = 0$$

при $F = \alpha E$ $(\alpha < 0)$ нельзя стабилизировать гироскопическими силами с определителем $|G| = 0$. Нельзя ее стабилизировать в этом случае и одними неконсервативными силами. Однако использование одновременно гироскопических и неконсервативных сил позволяет добиться стабилизации и при условии $|G| = 0$.

Действительно, рассмотрим систему (3.1), у которой

$$F = \alpha E, \quad G = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{Vmatrix}$$

где $\alpha = -0.01$. Можно показать, что характеристическое уравнение этой системы имеет чисто мнимые различные корни, т. е. система устойчива.

4. В [6] поставлена задача стабилизации неустойчивых потенциальных систем (3.4) неконсервативными силами. Там же дано ее решение для случаев $n = 2$ и 3. Ниже приводится решение этой задачи в общем случае.

Теорема 4.1. Вещественную матрицу R можно привести ортогональным преобразованием к виду с различными положительными диагональными элементами тогда и только тогда, когда

(4.1) $$\operatorname{sp} R > 0$$

(4.2) $$R + R' \neq \alpha E$$

Доказательство. Так как след матрицы является инвариантом ортогонального преобразования, то необходимость условия (4.1) очевидна.

Запишем матрицу R в виде суммы симметричной и кососимметричной частей

(4.3) $$R = {}^1/_2\,(R + R') + {}^1/_2\,(R - R')$$

Симметричность и кососимметричность сохраняются при ортогональном преобразовании, поэтому из (4.3) следует необходимость условия (4.2) и то, что матрицу R в дальнейшем, не уменьшая общности, можно считать диагональной. Пусть $R = \operatorname{diag}(r_1, \ldots, r_n)$. Достаточность условий (4.1) и (4.2) докажем индукцией по n.

При $n = 2$ достаточно рассмотреть случай $r_1 > 0$, $r_2 \leqslant 0$. Применим к матрице R ортогональное преобразование с матрицей $A : ARA' = S$. Можно показать, что формулы

$$a_{11}^2 = a_2^{22} = \frac{\varepsilon - r_2}{r_1 - r_2}, \qquad a_{12}^2 = a_{21}^2 = \frac{r_1 - \varepsilon}{r_1 - r_2}$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ определяют элементы матрицы A ортогонального преобразования, приводящего матрицу R к требуемому виду.

Пусть теорема доказана для всех $n \leqslant m$. Докажем ее справедливость и для $n = m + 1$. Не уменьшая общности, считаем, что $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_{m+1}$.

Случай $r_{m+1} > 0$.

1) Если $r_2 \neq r_{m+1}$, то с помощью ортогонального преобразования с матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A^m \\ 0 & \end{Vmatrix} \tag{4.4}$$

где A^m — ортогональная $m \times m$-матрица, матрицу R по индуктивному предположению можно привести к виду

$$Q = ARA' = \begin{Vmatrix} q_{11} \cdots q_{1n} & \\ \vdots & Q^m \\ q_{n1} & \end{Vmatrix} \tag{4.5}$$

где $q_{11} > 0$ и $m \times m$-матрица Q^m имеет различные положительные диагональные элементы.

2) Если $r_2 = r_{m+1}$, то меняем r_1 и r_2 местами и тем же способом приводим полученную матрицу к виду (4.5).

Случай $r_{m+1} \leqslant 0$. Меняем r_2 и r_{m+1} местами и к полученной матрице R_1 применяем ортогональное преобразование с матрицей

$$A_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & E \\ 0 & 0 & \end{Vmatrix} \tag{4.6}$$

Аналогично случаю $n = 2$ матрицу R_1 приводим к виду

$$R_2 = A_1 R_1 A_1' = \begin{Vmatrix} \varepsilon \ldots \\ \vdots \; R_3 \end{Vmatrix}$$

где $\varepsilon > 0$ и $m \times m$-матрица R_3 удовлетворяет условиям (4.1) и (4.2). Матрицу R_2 с помощью ортогонального преобразования с матрицей вида (4.4) по индуктивному предположению можно привести к виду (4.5).

Итак, при сделанных предположениях матрицу R всегда можно с помощью ортогонального преобразования привести к виду (4.5). Если в (4.5) q_{11} не совпадает ни с одним из остальных различных диагональных элементов, то теорема доказана. Если же q_{11} совпадает с одним из них, то, не уменьшая общности, можно считать, что $q_{11} \neq q_{22}$. Тогда можно показать, что существует ортогональное преобразование с матрицей вида (4.6), которое приводит матрицу Q к требуемому виду. Теорема полностью доказана.

Теорема 4.2. Неустойчивую систему (3.4) можно стабилизировать неконсервативными силами тогда и только тогда, когда выполнено условие

(4.7) $\quad \operatorname{sp} F > 0$

Доказательство. Необходимость условия (4.7) доказана в [6]. Если система (3.4) неустойчива и выполнено условие (4.7), то матрица F удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что матрица F уже приведена к виду с различными положительными диагональными элементами. Тогда стабилизирующую матрицу P в системе

(4.8) $\quad x^{\cdot\cdot} + Fx + Px = 0$

выберем следующим образом. Положим для $i < j$ $p_{ij} = f_{ij}$, для $i > j$ $p_{ij} = -f_{ij}$. При таком выборе кососимметричной матрицы P корни характеристического уравнения системы (4.8) будут чисто мнимыми и различными, т. е. система (4.8) будет устойчивой. Теорема доказана.

Задача 4.1. Определить условия, при которых неустойчивую систему

(4.9) $\quad x^{\cdot\cdot} + Dx^{\cdot} = 0$

можно стабилизировать гироскопическими силами, т. е. подобрать постоянную кососимметричную матрицу G так, чтобы система

(4.10) $\quad x^{\cdot\cdot} + Dx^{\cdot} + Gx^{\cdot} = 0$

была устойчивой.

В [4] показано, что гироскопическая стабилизация неустойчивых систем (4.9) невозможна при условии $\operatorname{sp} D < 0$.

Теорема 4.3. Если $\operatorname{sp} D > 0$, то неустойчивую систему (4.9) можно стабилизировать гироскопическими силами.

Эта теорема доказывается подобно теореме 4.2. Заметим, что условие $\operatorname{sp} D > 0$ не необходимо для гироскопической стабилизации неустойчивых систем (4.9) и уже при $n = 2$ существуют устойчивые системы (4.10), у которых $\operatorname{sp} D = 0$.

Автор благодарит В. В. Румянцева за советы и замечания к этой работе.

Поступила 11 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М., «Наука», 1971.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
3. *Zajac E. E.* The Kelvin-Tait-Chetaev theorem and extensions. J. Astronaut. Sci., 1964, vol. 11, No. 2.
4. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М., Гостехиздат, 1956.
5. *Агафонов С. А.* Об устойчивости неконсервативных систем. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1972, № 4.
6. *Лахаданов В. М.* О влиянии структуры сил на устойчивость движения. ПММ, 1974 г., т. 38, вып. 2.