Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В. П. Скрипник

(Москва)

Доказывается, что из устойчивости (асимптотической устойчивости) линейной системы (1) вытекает устойчивость (соответственно асимптотическая устойчивость) тривиального решения нелинейной системы (2), если отклонения аргументов и нелинейная добавка достаточно малы в соответствующем интегральном смысле.

При $l = 1,2,\ldots, q$ обозначим $f(t, \xi_l, \eta_l) = f(t, \xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_q, \eta_1, \eta_2,\ldots, \eta_q)$, где f, ξ_l, η_l — m-мерные векторы. Рассмотрим следующие две системы: линейную (1) и возмущенную [1] по отношению к (1), нелинейную систему (2)

$$y' = A(t)\,y, \qquad A(t) = \sum_{k=1}^{p} A_k(t) \tag{1}$$

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{p} A_k(t)\,x(\varphi_k(t)) + f(t, x'(\psi_l(t)), x(\chi_l(t))). \tag{2}$$

Здесь φ_k, ψ_l и χ_l — преобразования аргумента, $A_k(t)$ — квадратные матрицы, x и y — векторы m-го порядка.

Интегралы всюду понимаются в смысле Лебега. Производная понимается в следующем смысле. Если для некоторого постоянного вектора c при $t \in [a, b]$

$$v(t) = c + \int_a^t u(\tau)\,d\tau$$

то при $t \in [a, b]$ $u(t)$ будем называть производной $v(t)$ и обозначать $v'(t)$.

В дальнейшем будут использованы следующие обозначения: $\|\;\|$ — норма вектора или матрицы, которая равна сумме модулей элементов; $Y(t)$ — матричное решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $Y(t_0) = E$, где E — единичная матрица; $Z(\theta)$ — множество m-мерных вектор-функций, определенных при $t \leqslant \theta$, компоненты которых имеют не более чем счетные множества точек разрыва; $W(\theta)$ — множество m-мерных вектор-функций, определенных при $t \leqslant \theta$, компоненты которых непрерывны.

Пусть $z \in Z(a)$, $w \in W(a)$. Решением системы (2), когда $t \in [a, b]$, соответствующим начальным вектор-функциям $z(t)$ и $w(t)$, называется вектор-функция $x(t)$, удовлетворяющая системе (2), когда $t \in [a, b]$, и условиям $x'(t) = z(t)$, $x(t) = w(t)$ при $t \leqslant a$. Отметим, что здесь не требуется выполнения так называемого условия связи.

Задача состоит в определении условий устойчивости тривиального решения системы (2), если тривиальное решение системы (1) устойчиво.

Совокупность следующих условий для системы (2) назовем условиями ω.

1) Элементы матриц $A_k(t)$ определены при $t \in [t_0, \infty)$ и имеют не более чем счетные множества точек разрыва

2) $\| A_k(t) \| \leqslant a_k$ при $t \in [t_0, \infty)$.

3) Вектор-функция $f(t, \xi_l, \eta_l)$ определена при $t \in [t_0, \infty)$, $\|\eta_l\| \leqslant R$ и любых ξ_l, где $R > 0$.

4) Для каждой компоненты вектор-функции $f(t, \xi_l, \eta_l)$ существует не более чем счетное множество значений t, при которых она терпит разрыв.

5) Имеют место неравенства

$$\|f(t, \xi_l'', \eta_l'') - f(t, \xi_l', \eta_l')\| \leqslant \sum_{l=1}^{q} G_l \|\xi_l'' - \xi_l'\| + \sum_{l=1}^{q} H_l \|\eta_l'' - \eta_l'\|$$

$$\|f(t, \xi_l, \eta_l)\| \leqslant \sum_{l=1}^{q} g_l(t) \|\xi_l\| + \sum_{l=1}^{q} h_l(t) \|\eta_l\|$$

где $g_l(t)$ и $h_l(t)$ — интегрируемые функции на любом конечном отрезке $[t_0, T]$ (можно считать, что $g_l(t) \leqslant G_l$, $h_l(t) \leqslant H_l$), причем

$$\sum_{l=1}^{q} G_l < 1, \quad \int_{t_0}^{\infty} g_l(\tau)\, d\tau < \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} h_l(\tau)\, d\tau < \infty$$

6) Функции $\varphi_k(t)$, $\psi_l(t)$ и $\chi_l(t)$ определены при $t \in [t_0, \infty)$, удовлетворяют неравенствам $\varphi_k(t)$, $\psi_l(t)$, $\chi_l(t) \leqslant t$ и имеют не более чем счетные множества точек разрыва.

7) Существует $\tau_0 \geqslant t_0$ такое, что при $t \geqslant \tau_0$ будет $\varphi_k(t) \geqslant t_0$.

8) Функции $\Delta_k(t) = t - \varphi_k(t)$ интегрируемы на любом конечном отрезке $[t_0, T]$, причем

$$\int_{t_0}^{\infty} \Delta_k(\tau)\, d\tau < \infty$$

9) Для каждой функции $\psi_l(t)$ любой конечный отрезок $[t_0, T]$ можно представить в виде конечной суммы отрезков, на каждом из которых функция либо строго возрастает, либо строго убывает, либо постоянна.

В качестве множеств начальных вектор-функций возьмем множества $Z(t_0)$ и $W(t_0)$. Тривиальное решение системы (2) называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что решение системы (2), соответствующее любым начальным вектор-функциям $z \in Z(t_0)$, $w \in W(t_0)$ таким, что $\| z(t) \| < \delta$, $\| w(t) \| < \delta$ при $t \geqslant t_0$, удовлетворяет неравенствам $\| x'(t) \| < \varepsilon$, $\| x(t) \| < \varepsilon$. Если $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, то тривиальное решение системы (2) называется частично асимптотически устойчивым. Если же $\lim_{t\to\infty} x'(t) = 0$ и $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, то тривиальное решение системы (2) называется асимптотически устойчивым.

Теорема 1. Предположим, что: 1) для системы (2) выполняются условия ω; 2) матрица $A(t)$ периодическая или такая, что

$$(3)\qquad \int_{t_1}^{t} \operatorname{sp} A(\tau)\,d\tau \geqslant \alpha > -\infty$$

Тогда из устойчивости тривиального решения системы (1) следует устойчивость тривиального решения системы (2).

Доказательство. Обозначим $F(t, \xi_l, \eta_l) = f(t, \xi_l, \zeta_l)$, где

$$\zeta_l = \begin{cases} \eta_l, & \|\eta_l\| \leqslant R \\ \dfrac{R}{\|\eta_l\|}\eta_l, & \|\eta_l\| > R \end{cases}$$

Вектор-функция $F(t, \xi_l, \eta_l)$ удовлетворяет следующим условиям. Она определена при $t \in [t_0, \infty)$ и любых ξ_l и η_l; для каждой ее компоненты существует не более чем счетное множество значений t, при которых она терпит разрыв; при любых ξ_l, η_l, ξ_l', η_l', ξ_l'', η_l'' имеют место неравенства

$$\|F(t, \xi_l, \eta_l\| \leqslant \sum_{l=1}^{q} g_l(t)\|\xi_l\| + \sum_{l=1}^{q} h_l(t)\|\eta_l\|$$

$$\|F(t, \xi_l'', \eta_l'') - F(t, \xi_l', \eta_l')\| \leqslant \sum_{l=1}^{q} G_l\|\xi_l'' - \xi_l'\| + 2\sum_{l=1}^{q} H_l\|\eta_l'' - \eta_l'\|$$

Рассмотрим систему

$$(4)\qquad x'(t) = \sum_{k=1}^{p} A_k(t)\,x(\varphi_k(t)) + F(t, x'(\psi_l(t)), x(\chi_l(t)))$$

Возьмем любые множества $Z(\theta_0)$ и $W(\theta_0)$, где $\theta_0 \geqslant t_0$, и любые ограниченные вектор-функции $z \in Z(\theta_0)$ и $w \in W(\theta_0)$. Обозначим

$$\mu = \max\{1 + d + (a + H)(\theta_1 - \theta_0),\ a + H\}$$

$$\beta = \sup_{t \leqslant \theta_0}\|z(t)\| + \sup_{t \leqslant \theta_0}\|w(t)\|$$

$$d = \sum_{l=1}^{q} G_l, \qquad H = \sum_{l=1}^{q} H_l, \qquad a = \sum_{k=1}^{p} a_k$$

Возьмем d_0, удовлетворяющее неравенству $d < d_0 < 1$. Пусть θ_1 такая, что

$$\theta_1 - \theta_0 = (d_0 - d)/(a + 2H)$$

При помощи последовательных приближений

$$u_n(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{p} A_k(t)\,v_{n-1}(\varphi_k(t)) + F(t, u_{n-1}(\psi_l(t)), v_{n-1}(\chi_l(t))), & t \in (\theta_0, \theta_1] \\ z(t), & t \leqslant \theta_0 \end{cases}$$

$$v_{n-1}(t) = \begin{cases} \omega(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{t} u_{n-1}(\tau)\,d\tau, & t \in (\theta_0, \theta_1] \\ w(t), & t \leqslant \theta_0 \end{cases}$$

$$u_0(t) = \begin{cases} z(\theta_0), & t \in (\theta_0, \theta_1] \\ z(t), & t \leqslant \theta_0 \end{cases}$$

где компоненты вектор-функций $u_n(t)$ имеют при $t \in [\theta_0, \theta_1]$ не более чем счётные множества точек разрыва, нетрудно показать, что существует решение $x(t)$ системы (4), когда $t \in [\theta_0, \theta_1]$, соответствующее $z(t)$ и $w(t)$. Это решение единственно, так как, предположив противное, получим, что $d_0 \geqslant 1$. При $t \in [\theta_0, \theta_1]$ справедливы неравенства

$$(5) \qquad \|x'(t)\| \leqslant \beta + \frac{\mu\beta}{1-d_0}, \quad \|x(t)\| \leqslant \beta + \left(\beta + \frac{\mu\beta}{1-d_0}\right)(\theta_1 - \theta_0)$$

Пусть $z \in Z(t_0)$ и $w \in W(t_0)$. В силу доказанного существует единственное решение $x(t)$ системы (4), когда $t \in [t_0, t_1]$, где

$$t_1 - t_0 = (d_0 - d)/a + 2H$$

соответствующее начальным вектор-функциям $z(t)$ и $w(t)$. Это решение при $t \in [t_0, t_1]$ удовлетворяет оценкам (5). Считая вектор-функции $x'(t)$ и $x(t)$ начальными, продолжим решение единственным образом на отрезок $[t_1, t_2]$, где

$$t_2 - t_1 = (d_0 - d)/a + 2H$$

причем при $t \in [t_1, t_2]$ это продолжение удовлетворяет оценкам типа (5) и т. д. Отсюда следует, что существует единственное, бесконечно продолжимое решение $x(t)$ системы (4), соответствующее начальным вектор-функциям $z(t)$ и $w(t)$. Каковы бы ни были числа $T > t_0$ и $\varepsilon > 0$, найдётся такое $\delta > 0$, что при $t \in [t_0, T]$ будет $\|x'(t)\| < \varepsilon$, $\|x(t)\| < \varepsilon$ для любого решения $x(t)$ системы (4), соответствующего начальным вектор-функциям, $z \in Z(t_0)$ и $w \in W(t_0)$, таким, что $\|z(t)\| < \delta$, $\|w(t)\| < \delta$.

В случае, когда выполнено условие (3), матрица $Y^{-1}(t)$ ограничена при $t \in [t_0, \infty)$. Поэтому в данном случае величина $\|Y(t)\,Y^{-1}(\tau)\|$ ограничена при $t \in [t_0, \infty)$, $\tau \in [t_0, t]$. В случае, когда матрица $A(t)$ периодическая, то [2] $Y(t) = P(t)\,e^{Bt}$, где $P(t)$ — периодическая, B — постоянная, а e^{Bt} — ограниченная матрицы. В силу равенства $Y(t)\,Y^{-1}(\tau) = P(t)\,e^{B(t-\tau)}\,P^{-1}(\tau)$ величина $\|Y(t)\,Y^{-1}(\tau)\|$ ограничена при $t \in [t_0, \infty)$, $\tau \in [t_0, t]$. Поэтому в любом случае можно указать такое число μ_0, что при $t \in [t_0, \infty)$, $\tau \in [t_0, t]$ будет $\|Y(t)\,Y^{-1}(\tau)\| \leqslant \mu_0$.

Пусть $T_0 \geqslant \tau_0$ такое, что

$$\mu_0 \sum_{k=1}^{p} \int_{T_0}^{\infty} \left(M\Delta_k(\tau) + \mu_0 \frac{a+H}{1-d} \sum_{l=1}^{q} \int_{T_0}^{\infty} g_l(\tau)\,d\tau + \mu_0 \sum_{l=1}^{q} \int_{T_0}^{\infty} h_l(\tau)\,d\tau \leqslant \theta < 1\right.$$

$$M = a^2 + ad\frac{a+H}{1-d} + aH$$

Возьмём любое $\delta > 0$. Пусть $z \in Z(t_0)$ и $w \in W(t_0)$ такие, что $\|z(t)\| < \delta$ и $\|w(t)\| < \delta$, и пусть $x(t)$ — соответствующее им решение системы (4). Возьмём любое $T > T_0$. Обозначим

$$\delta_1 = \sup_{t \leqslant T_0} \|x'(t)\|, \quad \lambda_1 = \sup_{t \in [T_0, T]} \|x'(t)\|, \quad \delta_2 = \sup_{t \leqslant T_0} \|x(t)\|, \quad \lambda_2 = \sup_{t \in [T_0, T]} \|x(t)\|$$

Из равенства (4) следует, что при $t \in [T_0, T]$

$$\|x'(t)\| \leqslant a(\delta_2 + \lambda_2) + d(\delta_1 + \lambda_1) + H(\delta_2 + \lambda_2)$$

Отсюда получаем, что

(6) $$\lambda_1 \leqslant \frac{(a+H)(\delta_2+\lambda_2)+d\delta_1}{1-d}$$

Из равенств

$$x(\varphi_k(t)) - x(t) = \int_t^{\varphi_k(t)} \sum_{k=1}^{p} A_k(\tau)\, x(\varphi_k(\tau))\, d\tau + \int_t^{\varphi_k(t)} F(\tau, x'(\psi_l(\tau)), x(\chi_l(\tau)))\, d\tau$$

справедливых при $t \geqslant T_0$, учитывая (6), при $t \in [T_0; T]$ получим

$$\|x(\varphi_k(t)) - x(t)\| \leqslant a\Delta_k(t)(\lambda_2+\delta_2) + d\Delta_k(t)(\lambda_1+\delta_1) +$$
$$+ H\Delta_k(t)(\lambda_2+\delta_2) \leqslant a\Delta_k(t)\lambda_2 + a\Delta_k(t)\delta_2 + d\Delta_k(t)\frac{(a+H)\lambda_2}{1-d} +$$
$$+ d\Delta_k(t)\frac{(a+H)\delta_2+d\delta_1}{1-d} + d\Delta_k(t)\delta_1 + H\Delta_k(t)\lambda_2 + H\Delta_k(t)\delta_2$$

Учитывая последние неравенства, при $t \in [T_0, T]$ получим следующие оценки:

(7) $$\|A_k(t)[x(\varphi_k(t)) - x(t)]\| \leqslant M\Delta_k(t) + L_1(\delta_1, \delta_2)\Delta_k(t)$$

$$L_1(\delta_1, \delta_2) = a^2\delta_2 + ad\frac{(a+H)\delta_2+d\delta_1}{1-d} + ad\delta_1 + aH\delta_2$$

Решение $x(t)$ при $t \geqslant t_0$ удовлетворяет следующей системе интегральных уравнений:

(8) $$x(t) = y(t) + \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(\tau)\sum_{k=1}^{p} A_k(\tau)[x(\varphi_k(\tau)) - x(\tau)]\, d\tau +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(\tau) F(\tau, x'(\psi_l(\tau)), x(\chi_l(\tau)))\, d\tau$$

где $y(t)$ — решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = w(t_0)$. В равенстве (8) разобьем отрезок интегрирования на $[t_0, T_0]$ и $[T_0, t]$. Тогда, учитывая неравенства (6) и (7), при $t \in [T_0, T]$ получим следующее неравенство:

$$\|x(t)\| \leqslant \delta_0 + L_2(\delta_1, \delta_2) + \lambda_2\theta, \qquad \delta_0 = \sup_{t \geqslant t_0}\|y(t)\|$$

$$L_2(\delta_1, \delta_2) = \mu_0(T_0 - t_0)[2ab_2 + d\delta_1 + H\delta_2] + \mu_0 L_1(\delta_1, \delta_2) \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{p}\int_{T_0}^{\infty} \Delta_k(\tau)\, d\tau + \mu_0\left[\delta_1 + \frac{(a+H)\delta_2+d\delta_1}{1-d}\right]\sum_{l=1}^{q}\int_{T_0}^{\infty} g_l(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \mu_0\delta_2\sum_{l=1}^{q}\int_{T_0}^{\infty} h_l(\tau)\, d\tau$$

Отсюда

$$\lambda_2 \leqslant \gamma, \qquad \gamma = \frac{\delta_0 + L_2(\delta_1, \delta_2)}{1-\theta}$$

Последнее неравенство не зависит от T. Поэтому при $t \geqslant T_0$ вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет следующему неравенству:

(9) $$\|x(t)\| \leqslant \gamma$$

Из неравенств (6) и (9) следует, что при $t \geqslant T_0$ будет

$$\|x'(t)\| \leqslant \frac{(a+H)(\delta_2+\gamma)+d\delta_1}{1-d}.$$

Так как числа δ_0, δ_1 и δ_2 можно сделать сколь угодно малыми для всех $z \in Z(t_0)$ и $w \in W(t_0)$ таких, что $\|z(t)\| < \delta$ и $\|w(t)\| < \delta$, если δ достаточно мало, то тривиальное решение системы (4) устойчиво. Поэтому устойчиво тривиальное решение системы (2). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Предположим, что: 1) выполняются условия ω; 2) матрица $A(t)$ периодическая. Тогда из асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1) следует частичная асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (2).

Доказательство. Из того, что тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво, следует на основании теоремы 1, что тривиальное решение системы (2) устойчиво.

Пусть r удовлетворяет неравенству $0 < r < R$. Найдётся $\delta > 0$ такое, что если только начальные вектор-функции $z \in Z(t_0)$ и $w \in W(t_0)$ удовлетворяют неравенствам $\|z(t)\| < \delta$, $\|w(t)\| < \delta$, то соответствующее им решение $x(t)$ системы (2) при $t \in [t_0, \infty)$ удовлетворяет неравенствам $\|x'(t)\| < r$, $\|x(t)\| < r$. Будем рассматривать только такие решения.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Пусть $T_0 \geqslant \tau_0$ такое, что

$$\mu_0 r \sum_{k=1}^{p} a(a+d+H)\int_{T_0}^{\infty}\Delta_k(\tau)\,d\tau + \mu_0 r \sum_{l=1}^{q}\left(\int_{T_0}^{\infty} g_l(\tau)\,d\tau + \int_{T_0}^{\infty} h_l(\tau)\,d\tau\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mu_0 = \sup_{t\in[t_0,\infty),\ \tau\in[t_0,t]} \|Y(t)\,Y^{-1}(\tau)\|$$

Пусть $T \geqslant T_0$ такое, что при $t \geqslant T_0$ будет

$$\|y(t)\| + 2ar\|Y(t)\|\int_{t_0}^{T_0}\|Y^{-1}(\tau)\|\,d\tau + r(d+H)\|Y(t)\|\int_{t_0}^{T_0}\|Y^{-1}(\tau)\|\,d\tau < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $y(t)$ — решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = w(t_0)$. Воспользуемся справедливым при $t \geqslant t_0$ равенством (8), в котором вместо F фигурирует функция f от тех же аргументов. Учитывая, что при $t \geqslant T_0$

$$\|A_k(t)\,(x(\varphi_k(t)) - x(t))\| \leqslant ar\,(a+d+H)\Delta_k(t)$$

получим следующее неравенство:

$$\|x(t)\| \leqslant \|y(t)\| + 2ar\|Y(t)\|\int_{t_0}^{T_0}\|Y^{-1}(\tau)\|\,d\tau + \mu_0 r\sum_{k=1}^{p} a(a+d+H)\times$$

$$\times\int_{T_0}^{t}\Delta_k(\tau)\,d\tau + r(d+H)\|Y(t)\|\int_{t_0}^{T_0}\|Y^{-1}(\tau)\|\,d\tau +$$

$$+\mu_0 r\left(\sum_{l=1}^{q}\int_{T_0}^{t} g_l(\tau)\,d\tau + \sum_{l=1}^{q}\int_{T_0}^{t} h_l(\tau)\,d\tau\right)$$

которое справедливо при $t \geqslant T_0$. Поэтому при $t \geqslant T$ будет $\|x(t)\| < \varepsilon$. А это означает, что $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Предположим, что: 1) выполняются условия теоремы 2; 2) $\lim \varphi_k(t) = \infty$, $\lim \psi_l(t) = \infty$, $\lim \chi_l(t) = \infty$ при $t \to \infty$. Тогда из асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1) следует асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (2).

Доказательство. Пусть r удовлетворяет неравенству $0 < r < R$. Возьмем $\delta > 0$ такое, что если только начальные вектор-функции $z \in Z(t_0)$ и $w \in W(t_0)$ удовлетворяют неравенствам $\|z(t)\| < \delta$, $\|w(t)\| < \delta$, то соответствующее им решение $x(t)$ системы (2) при $t \geqslant t_0$ удовлетворяет неравенствам $\|x'(t)\| < r$, $\|x(t)\| < r$ и, кроме того, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Будем рассматривать только такие решения и пусть $x(t)$ — одно из них. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Возьмем $T_0 \geqslant t_0$ такое, что при $t \geqslant T_0$ будет

$$\sum_{k=1}^{p} a_k \|x(\varphi_k(t))\| + \sum_{l=1}^{q} H_l \|x(\chi_l(t))\| < \varepsilon$$

Существует такое $T(T_0) \geqslant T_0$, что при $t \geqslant T(T_0)$ будет $\psi_l(t) \geqslant T_0$. Для любого $\sigma \geqslant t_0$ обозначим $\Delta(\sigma) = \sup_{t\geqslant\sigma} \|x'(t)\|$. Очевидно, функция $\Delta(\sigma)$ — невозрастающая. Так как она ограничена снизу, то существует $\Delta_\infty = \lim_{t\to\infty} \Delta(\sigma)$.

Из равенства (2) при $t \geqslant T(T_0)$ получим

$$\|x'(t)\| \leqslant \sum_{l=1}^{q} G_l \|x'(\psi_l(t))\| + \sum_{k=1}^{p} a_k \|x(\varphi_k(t))\| + \sum_{l=1}^{q} H_l \|x(\chi_l(t))\| <$$
$$< d\Delta(T_0) + \varepsilon$$

Отсюда

$$\Delta(T(T_0)) < d\Delta(T_0) + \varepsilon$$

Переходя к пределу при $T_0 \to \infty$, получим

$$\Delta_\infty \leqslant d\Delta_\infty + \varepsilon, \qquad \Delta_\infty \leqslant \varepsilon/(1-d)$$

Так как ε произвольно, то $\Delta_\infty = 0$. А это означает, что $\lim_{t\to\infty} x'(t) = 0$. Теорема 3 доказана.

Если $d < 1/2$, то в условиях ω достаточно требовать, чтобы вектор-функция $f(t, \xi_l, \eta_l)$ была определена только при $\|\xi_l\| \leqslant R$.

Результаты статьи обобщаются на случай бесконечного счетного числа преобразований аргумента.

Наряду с системой (1) рассмотрим систему (2), в которой $p = \infty$ и $l = 1, 2, 3\ldots$ Совокупность следующих условий для этой системы назовем условиями ω_1.

1) Выполняются условия 1) — 4) и 6) — 9) из условий ω, причем

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} \Delta_k(\tau)\, d\tau < \infty$$

2) Имеют место неравенства

$$\|f(t, \xi_l'', \eta_l'') - f(t, \xi_l', \eta_l')\| \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} G_l \|\xi_l'' - \xi_l'\| + \sum_{l=1}^{\infty} H_l \|\eta_l'' - \eta_l'\|$$

$$\|f(t, \xi_l, \eta_l)\| \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} g_l(t) \|\xi_l\| + \sum_{l=1}^{\infty} h_l(t) \|\eta_l\|$$

где $g_l(t)$ и $h_l(t)$ — интегрируемые функции на любом конечном отрезке $[t_0, T]$ (можно считать, что $g_l(t) \leqslant G_l$, $h_l(t) \leqslant H_l$), причем

$$\sum_{l=1}^{\infty} G_l < 1, \quad \sum_{l=1}^{\infty} H_l < \infty, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} g_l(\tau)\, d\tau < \infty, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} h_l(\tau)\, d\tau < \infty.$$

Для этого случая будут иметь место теоремы 1—3, если условия ω заменить условиями ω_1.

Поступила 3 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
2. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Изд-во иностр. лит., М., 1954.
3. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., «Наука», 1971.