Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ПРИ РЕЗОНАНСЕ

А. Л. Куницын

(Москва)

Исследуется устойчивость нулевого решения нелинейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и голоморфными правыми частями. Рассматривается критический случай, когда характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет лишь комплексно-сопряженные корни, по модулю равные единице, а между характеристическими показателями и частотой невозмущенного движения существуют определенные целочисленные соотношения (резонанс). Формулируются условия, при которых вопрос об устойчивости решается первыми нелинейными формами разложения правых частей уравнений возмущенного движения. Для наиболее важных типов резонанса получены необходимые и достаточные условия устойчивости по формам четного порядка. Достаточность доказывается существованием знакоопределенного интеграла, а необходимость — построением функции Четаева.

Полученные результаты распространяются, в частности, и на устойчивость периодических движений гамильтоновых систем. Частные случаи этой задачи рассматривались в работах [1-3]. Общий подход к решению этой задачи для негамильтоновых систем второго порядка был развит в [4].

1. Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения

$$dx_* / dt = X_* (x_*, t) \tag{1.1}$$

$$X_*(x_*, t) = A(t) x_* + \sum_{l=m\geqslant 2}^{\infty} X_*^{(l)}(x_*, t)$$

где x_* — $2n$-мерный вектор, а X_* (x_*, t) — периодическая по t, аналитическая вектор-функция вещественного периода ω указанного вида.

Пусть матрица A (t) такова, что все корни характеристического уравнения — комплексные и по модулю равны единице. Тогда, как известно, [5] задача об устойчивости тривиального решения неавтономной системы (1.1) сводится к критическому случаю устойчивости n пар чисто мнимых корней для автономной системы, если между характеристическими показателями $\pm \lambda_s$ $(\lambda_s^2 < 0,\ s = 1, \ldots, n)$ и числом $2\pi i/\omega$ не существует никаких целочисленных соотношений вида

$$\langle P\Lambda\rangle = \frac{2\pi i}{\omega} p, \quad i = \sqrt{-1} \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.2}$$

$$P = (p_1, \ldots, p_n), \quad |P| = p_1 + \ldots + p_n \geqslant 3, \quad p_s \geqslant 0$$

$$\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha, \lambda_{\alpha+1}, \ldots, \lambda_n)$$

$$\lambda_j i > 0, \quad j = 1, \ldots, \alpha, \quad \lambda_s i < 0, \quad s = \alpha + 1, \ldots, n$$

где P — n-мерный вектор с целочисленными компонентами.

Исследуем задачу об устойчивости тривиального решения системы (1.1) при выполнении резонансных соотношений (1.2). При этом рассмотрим случай, когда вопрос об устойчивости решается формами m-го порядка, представляющими наинизшие нелинейные члены разложения вектор-функции $X_*(x_*, t)$. Как будет ясно из дальнейшего, в этом случае должно быть $|P| = m + 1$. Будем рассматривать только четные значения m и, кроме того, предположим, что вектор P, удовлетворяющий (1,2), единственный. Тем самым исключаются, например, целые и полуцелые значения λ_s, а также случаи сложного резонанса, когда одни и те же частоты встречаются в разных резонансных соотношениях.

Как известно [5], с помощью линейного преобразования, не нарушающего задачи об устойчивости, систему (1.1) можно записать в виде

$$(1.3)\qquad x^\cdot = \lambda x + \sum_{l=m\geqslant 2}^{\infty} X^{(l)}(x, y, t), \quad y^\cdot = -\lambda y + \sum_{l=m\geqslant 2}^{\infty} Y^{(l)}(x, y, t)$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n), \quad \lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

Здесь x, y — комплексно-сопряженные векторы, λ — диагональная матрица, $X^{(l)}(x, y, t)$ и $Y^{(l)}(x, y, t)$ — комплексно-сопряженные вектор-функции, периодические по t с периодом ω, компоненты которых $X_s^{(l)}$ и $Y_s^{(l)}$ представляются формами l-го порядка, так что

$$X_s^{(l)} = \sum_{|k_s|+|l_s|=l} R_{k_s,l_s}(t)\, x_1^{k_{s1}} \ldots x_n^{k_{sn}} y_1^{l_{s1}} \ldots y_n^{l_{sn}}$$

$$R_{k_s,l_s}(t) \equiv R_{k_s,l_s}(t + \omega), \quad s = 1, 2, \ldots, n$$

$$k_s = (k_{s1}, \ldots, k_{sn}), \quad l_s = (l_{s1}, \ldots, l_{sn}), \quad k_{sj}, l_{sj} \geqslant 0$$

$$|k_s| = k_{s1} + \ldots + k_{sn}, \quad |l_s| = l_{s1} + \ldots + l_{sn}$$

где k_s, l_s — всевозможные целочисленные векторы.

Преобразуем систему (1.3) посредством замены

$$(1.4)\qquad x_s = [u_s - \sum_m U_{k_s,l_s}(t)\, u_1^{k_s} \ldots u_n^{k_{sn}} v_1^{l_{s1}} \ldots v_n^{l_{sn}}] \exp(\lambda_s t)$$

$$y_s = [v_s - \sum_m V_{k_s,l_s}(t)\, v_1^{k_{s1}} \ldots v_n^{k_{sn}} u^{l_{s1}} \ldots u_n^{l_{sn}}] \exp(-\lambda_s t)$$

$$s = 1, 2, \ldots, n$$

в которой комплексно-сопряженные функции $U_{k_s, l_s}(t)$ и $V_{k_s, l_s}(t)$ постараемся подобрать такими, чтобы они были ограниченными по t, а в преобразованных уравнениях формы m-го порядка имели бы постоянные коэффициенты. Первая группа уравнений в комплексно-сопряженных переменных u_s и v_s примет вид

$$(1.5)\qquad u_s^\cdot = \sum_m [\dot U_{k_s,l_s} + R_{k_s,l_s}(t) \exp(\varkappa_s t)]\, u_1^{k_{s1}} \ldots u_n^{k_{sn}} v_1^{l_{s1}} \ldots v_n^{l_{sn}} + \ldots$$

$$\varkappa_s = \sum_{j=1}^{n} (k_{sj} - l_{sj}) \lambda_j - \lambda_s, \quad s = 1, 2, \ldots, n$$

где невыписанные члены имеют не ниже, чем $m + 1$ порядок малости.

Выберем функции $U_{k_s,l_s}(t)$ из уравнений

(1.6) $$\dot U_{k_s,l_s} + R_{k_s,l_s}(t)\exp(\varkappa_s t) = g_{k_s,l_s},$$

где g_{k_s,l_s} — некоторые постоянные, которые будем определять из требования ограниченности $U_{k_s,l_s}(t)$. Раскладывая $R_{k_s,l_s}(t)$ в ряд Фурье, имеем

$$R_{k_s,l_s}(t)\exp(\varkappa_s t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_{k_s,l_s}^{(n)} \exp\left(\frac{2\pi n i}{\omega} + \varkappa_s\right) t$$

Очевидно, чтобы U_{k_s,l_s} вышли ограниченными, когда $\varkappa_s$ не удовлетворяет условию

(1.7) $$\varkappa_s = \frac{2\pi i}{\omega} p, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

необходимо положить $g_{k_s,l_s} = 0$. Сами $U_{k_s,l_s}(t)$ представятся в виде рядов

$$U_{k_s,l_s}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_{k_s,l_s}^{(n)}}{\varkappa_s + 2\pi n i/\omega} \exp\left[\left(\varkappa_s + \frac{2\pi n i}{\omega}\right) t\right] + C_{k_s,l_s}$$

которые, очевидно, будут сходящимися, поскольку для каждой пары векторов (k_s, l_s) величина $\varkappa_s$ остается неизменной. Таким образом, можно уничтожить все нерезонансные члены в формах m-го порядка.

Пусть теперь (1.7) удовлетворяется при некотором $p = p_*$. Тогда, полагая $g_{k_s,l_s} = b_{k_s,l_s}^{(p_*)}$, получим из (1.6)

$$U_{k_s,l_s}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{b_{k_s,l_s}^{(n)}}{(n + p_*)2\pi n i/\omega} \exp\left[(n + p_*)\frac{2\pi n i}{\omega} t\right] + C_{k_s,l_s}$$

где $n + p_* \neq 0$ и, следовательно, в этом случае все U_{k_s,l_s} выйдут периодическими периода ω.

Сравнивая (1.2) и (1.7), можно убедиться, что при сделанных предположениях относительно векторов P и Λ соотношения (1.2) удовлетворяются единственными векторами k_s и l_s, а именно:

$$\begin{array}{llll} \text{при } s = 1, \ldots, \alpha: & k_{sj} = 0, \; l_{sj} = p_j, \; l_{ss} = p_s - 1, & j = 1, \ldots, \alpha \\ & k_{sj} = p_j, \; l_{sj} = 0, & j = \alpha + 1, \ldots, n \\ \text{при } s = \alpha + 1, \ldots, n: & k_{sj} = p_j, \; l_{sj} = 0, & j = 1, \ldots, \alpha \\ & k_{sj} = 0, \; l_{sj} = p_j, \; l_{ss} = p_s - 1, & j = \alpha + 1, \ldots, n \end{array}$$

Соответствующие указанным векторам k_s и l_s постоянные коэффициенты g_{k_s,l_s}, очевидно, равны

$$g_{k_s,l_s} = b_{k_s,l_s}^{(p_*)} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} R_{k_s,l_s}(t)\exp\left(-\frac{2\pi p i}{\omega} t\right) dt$$

и поскольку для каждого $s = 1, \ldots, n$ существует единственная пара резонансных векторов k_s, l_s, то в невырожденном случае ($g_{k_s,l_s} \neq 0$) в каждом уравнении будет только по одному отличному от нуля комплексному коэффициенту g_{k_s,l_s}.

Полагая

$$g_{k_s,l_s} = a_s - ib_s, \quad s = 1, \ldots, \alpha, \quad g_{k_s,l_s} = a_s + ib_s, \quad s = \alpha + 1, \ldots, n$$

приведем первую группу комплексно-сопряженных уравнений к виду

(1.8) $$v_s u_s^{\cdot} = (a_s - ib_s) v_1^{p_1} \ldots v_\alpha^{p_\alpha} u_{\alpha+1}^{p_{\alpha+1}} \ldots u_n^{p_n} + \Phi_s(u, v, t), \; s = 1, \ldots, \alpha$$

$$v_s u_s^{\cdot} = (a_s + ib_s) u_1^{p_1} \ldots u_\alpha^{p_\alpha} v_{\alpha+1}^{p_{\alpha+1}} \ldots v_n^{p_n} + \Phi_s(u, v, t), \; s = \alpha + 1, \ldots, n$$

где функции $\Phi_s(u, v, t)$ являются ограниченными в области

$$\sum_{s=1}^{n} u_s v_s \leqslant h, \quad h > 0, \quad t \in [t_0, \infty]$$

и имеют не ниже, чем $m + 2$ порядок относительно u_s и v_s.

Полагая теперь

$$u_s = r_s \exp(-i\theta_s), \quad v_s = r_s \exp(i\theta_s), \qquad s = \alpha + 1, \ldots, n$$

$$u_s = r_s \exp(i\theta_s), \quad v_s = r_s \exp(-i\theta_s), \qquad s = 1, \ldots, n$$

и присоединяя к уравнениям (1.8) не выписанную, сопряженную им группу уравнений, приведем полную систему уравнений возмущенного движения к следующему единообразному виду, независимо от числа $\alpha = 1, \ldots, n$, характеризующего резонансные векторы P и Λ:

(1.9) $$r_s r_s^{\cdot} = Q_s(\theta) \prod_{j=1}^{n} r_j^{p_j} + R_s(r, \theta, t)$$

$$s = 1, \ldots, n$$

$$r_s^2 \theta_s^{\cdot} = \frac{\partial Q_s}{\partial \theta} \prod_{j=1}^{n} r_j^{p_j} + \Theta_s(r, \theta, t)$$

Здесь

$$Q_s(\theta) = a_s \cos\theta + b_s \sin\theta$$

$$\theta = p_1\theta_1 + \ldots + p_n\theta_n, \quad r = (r_1^2 + \ldots + r_n^2)^{1/2}$$

а функции $R_s(r, \theta, t)$ и $\Theta(r, \theta, t)$, являясь 2π-периодическими по θ и почти периодическими по t, имеют относительно r не ниже, чем $m + 2$ порядок малости.

Систему уравнений, получающуюся из (1.9) при $R_s = \Theta_s \equiv 0$, будем в дальнейшем называть модельной.

2. Исследование устойчивости тривиального решения системы (1.9) проведем в трех принципиально различных случаях]

(2.1) $$n = 1, \quad (m + 1)\lambda = \frac{2\pi i}{\omega} p$$

$$n = 2, \quad p_1\lambda_1 \pm p_2\lambda_2 = \frac{2\pi i}{\omega} p, \quad p_1 + p_2 = m + 1$$

$$n = 3, \quad p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 \pm p_3\lambda_3 = \frac{2\pi i}{\omega} p, \quad p_1 + p_2 + p_3 = m + 1$$

где $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а $p_s > 0$ — целые числа.

Рассмотрим случай $n = 1$. Система (1.9) может быть приведена к виду

$$rr^{\cdot} = \sqrt{a^2+b^2}\, r^{m+1} \cos[\psi - (m+1)\theta] + \ldots \tag{2.2}$$
$$r^2\theta^{\cdot} = \sqrt{a^2+b^2}\, r^{m+1} \sin[\psi - (m+1)\theta] + \ldots$$
$$\sin\psi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\psi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Модельная система имеет $2(m + 1)$ особых направлений, определяемых уравнениями

$$\theta_q = (\psi + q\pi)/(m+1), \quad q = 1, 2, \ldots, 2(m+1)$$

Можно проверить, что половина из этих направлений соответствует неустойчивым частным решениям (неустойчивый луч), а положение равновесия представляет седловую особую точку.

Теорема 2.1. При $a^2 + b^2 \neq 0$ тривиальное решение системы (2.2) неустойчиво.

Доказательство можно провести с помощью функции Ляпунова

$$V = r^{m+1} \cos[\psi - (m+1)\theta]$$

производная которой в силу (2.2) будет

$$V^{\cdot} = (m+1)\sqrt{a^2+b^2}\, r^{2m} + r^{2m+1}\, \Phi(r, \theta, t)$$

где $\Phi(r, \theta, t)$ — 2π-периодическая по θ и почти периодическая по t, а следовательно, ограниченная во всякой области $r < h$ функция. Очевидно, при

$$\psi - {}^1/_2\pi < (m+1)\,\theta < \psi + {}^3/_2\,\pi$$

имеем $VV^{\cdot} > 0$, что удовлетворяет теореме Ляпунова о неустойчивости [6], так как $V^{\cdot}$ — определенно-положительная функция во всей окрестности начала координат при достаточно малом r.

Отметим, что частный случай рассмотренного исследовался в [1-5], где изучались только гамильтоновы системы.

Исследуем влияние этого резонанса в системе произвольного порядка, имеющей $n + k$ пар чисто мнимых характеристических показателей, из которых первые n пар не удовлетворяют ни одному из соотношений (1.2), где опять $|P| = m + 1$, а m (четное) — степень наинизшей из нелинейных форм, которыми начинаются разложения правых частей исходных дифференциальных уравнений. Остальные k пар характеристических показателей удовлетворяют только резонансным соотношениям вида

$$\lambda_j^*(m+1) = \frac{2\pi i}{\omega} p, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \; j = 1, 2, \ldots, k \tag{2.3}$$

Тогда исходную систему уравнений можно представить в виде

$$x^{\cdot} = \lambda x + X(x, y, \xi, \eta, t), \quad \xi^{\cdot} = \lambda^*\xi + \Xi(x, y, \xi, \eta, t) \tag{2.4}$$
$$y^{\cdot} = -\lambda y + Y(x, y, \xi, \eta, t), \quad \eta^{\cdot} = -\lambda^*\eta + H(x, y, \xi, \eta, t)$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n), \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$$
$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k), \quad \lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \quad \lambda^* = \{\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*\}$$

Здесь X, Y и Ξ, H — комплексно-сопряженные вектор-функции, периодические по t, разложения которых по x, y, ξ, η начинаются с членов m-го порядка.

С помощью нелинейного преобразования (1.4) систему (2.4) можно привести к виду

$$
\begin{aligned}
(2.5)\qquad & \rho_s\rho_s^{\boldsymbol{\cdot}} = \Psi_s, \qquad \rho_s^2\varphi_s^{\boldsymbol{\cdot}} = \Phi_s \\
& r_j r_j^{\boldsymbol{\cdot}} = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}\, r^{m+1} \cos[\psi_j - (m+1)\theta_j] + R_j \\
& r_j^2\theta_j^{\boldsymbol{\cdot}} = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}\, r^{m+1} \sin[\psi_j - (m+1)\theta_j] + \Theta_j \\
& r = (r_1^2 + \ldots + r_k^2)^{1/2}, \ \rho = (\rho_1^2 + \ldots + \rho_n^2)^{1/2}, \ j = 1,\ldots, k, \ s = 1,\ldots, n
\end{aligned}
$$

где функции Ψ_s, Φ_s, R_j, Θ_j являются ограниченными относительно $\varphi_1,\ldots$ $\ldots, \varphi_n, \theta_1,\ldots, \theta_k$ и t, а их разложения по r и ρ начинаются членами не ниже, чем $m+2$-го порядка. Для полученной системы оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема 2.2. Если выполняется хотя бы одно неравенство $a_j^2 + b_j^2 \neq$ $\neq 0$, $j = 1,\ldots, k$, то нулевое решение системы (2.5), а следовательно (2.4), неустойчиво.

Доказательство может быть дано с помощью теоремы Г. В. Каменкова [7] о неустойчивости в случае $n + k$ нулевых корней характеристического уравнения.

Пусть $X_j^{(m)}$ и $Y_j^{(m)}$ — формы m-го порядка, которыми начинаются разложения вектор-функций X и Y системы (2.4). Составим формы

$$
\begin{aligned}
& F_j = x_j Y_j^{(m)} - y_j X_j^{(m)} \equiv \sqrt{a_j^2 + b_j^2}\, r^{m+1} \sin[\psi - (m+1)\theta_j] \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, k \\
& G_j = x_j X_j^{(m)} + y_j Y_j^{(m)} \equiv \sqrt{a_j^2 + b_j^2}\, r^{m+1} \cos[\psi - (m+1)\theta_j]
\end{aligned}
$$

Согласно теореме Каменкова, тривиальное решение системы (2.4) будет неустойчивым независимо от членов выше m-го порядка, если хотя бы при одном значении θ_j^*, являющемся корнем уравнения $F_j(\theta_j) = 0$, форма $G_j(\theta_j^*) > 0$.

Пусть хотя бы для одной пары a_j, b_j имеем $a_j^2 + b_j^2 \neq 0$. Тогда, полагая $\theta_j^* = (m+1)^{-1}\psi$, очевидно, удовлетворим всем условиям теоремы Каменкова.

Доказанная теорема позволяет сделать следующий вывод: наличие в системе хотя бы одного резонанса вида (2.3), как правило (за исключением полного вырождения), приводит к неустойчивости всей системы. В практически важном случае $m = 2$ при конструировании системы следует избегать ситуации, когда среди характеристических показателей имеется хотя бы один, представляющий целую кратность от одной трети частоты невозмущенного периодического движения.

Рассмотрим теперь случаи $n = 2$, $n = 3$ из (2.1). В обоих этих случаях модельная система, получающаяся из (1.9) отбрасыванием функций R_s и Θ_s, имеет тот же вид, что и в случае внутреннего резонанса нечетного порядка для автономных систем, в наиболее общей постановке рассмотренного в [8,9]. Поэтому здесь сохраняются все выводы об устойчивости, сделанные в этих работах.

Приведем их без доказательства.

Теорема 2.3. При резонансе $n = 2$ необходимое и достаточное условие устойчивости модельной системы имеет вид

$$a_1 / a_2 = b_1 / b_2 < 0$$

Достаточность доказывается с помощью существования знакоопределенного интеграла $a_2 r_1^2 - a_1 r_2^2 = \text{const}$, а необходимость — с помощью теоремы Четаева, где функцию Четаева можно взять в виде

$$V = r_1^{p_1} r_2^{p_2} (\cos\theta + \varkappa \sin\theta)$$

Теорема 2.4. При резонансе в случае $n = 3$ необходимые и достаточные условия устойчивости модельной системы принимают следующий вид:

$$\beta_j \beta_s > 0, \quad j, s = 1, 2, 3$$

$$\beta_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad \beta_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad \beta_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Достаточность опять доказывается с помощью знакоопределенного интеграла $\beta_1 r_1^2 + \beta_2 r_2^2 + \beta_3 r_3^2 = \text{const}$, а необходимость — с помощью функции Четаева

$$V = r_1^2 r_2^2 r_3^2 (\cos\theta + \varkappa \sin\theta)$$

В рассмотренных трех случаях резонанса выявляется тенденция уменьшения случаев неустойчивости с увеличением числа частот, участвующих в резонансе: если в случае $n = 1$ устойчивость возможна лишь при полном вырождении $(a^2 + b^2 = 0)$, то при $n = 2$ уже возможен один случай устойчивости, а при $n = 3$ устойчивость модельной системы сохраняется в целой области значений ее параметров.

Останавливаясь на вопросе связи задачи об устойчивости полной системы с задачей об устойчивости модельной системы, отметим, что если из устойчивости модельной системы нельзя сделать никаких заключений об устойчивости полной системы, то неустойчивость модельной системы обязательно влечет за собой неустойчивость полной системы. Для автономных систем это обстоятельство было строго доказано [1]. Вследствие ограниченности по времени форм выше m-го порядка, фигурирующих в (1.8), и полного совпадения модельных систем для автономного случая и для случая периодических движений, результаты о полной неустойчивости автономной системы распространяются и на рассмотренные здесь случаи резонанса при $n = 2$, $n = 3$.

3. В заключение рассмотрим гамильтоновы системы

$$\dot{x}_s^* = \frac{\partial H^*}{\partial y_s^*}, \quad \dot{y}_s^* = -\frac{\partial H^*}{\partial x_s^*}, \quad s = 1, 2, \ldots, n$$

где H^* — аналитическая относительно x_s^*, y_s^* и ω — периодическая по времени t функция Гамильтона. Тогда при сделанных выше предположениях относительно корней характеристического уравнения с помощью линейного ω-периодического по t преобразования переменных x_s^*, y_s^*

[1] Нурпеисов С. Об устойчивости в критическом случае n пар чисто мнимых корней при наличии внутреннего резонанса. Кандидатская диссертация. 1972, Алма-Ата.

в новые x_s, y_s опять получим канонические уравнения

$$\dot{x_s} = \frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad \dot{y_s} = -\frac{\partial H}{\partial x_s}, \quad H = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s x_s y_s + \sum_{l=m+1}^{\infty} H^{(l)}(x, y, t)$$

где x_s и y_s — комплексно-сопряженные переменные, а $H^{(l)}$ — формы l-го порядка относительно x_s, y_s с периодическими коэффициентами. Как легко убедиться, каноническое преобразование полученных уравнений, аналогичное (1.4), можно задать посредством производящей функции

$$S = \sum_{s=1}^{n} \Big[x_s v_s + \sum_{|k_s|+|l_s|=m+1} \Phi_{k_s, l_s}(t)\, x_1^{k_{s1}} \ldots x_n^{k_{sn}} v_1^{l_{s1}} \ldots v_n^{l_{sn}}\Big] \exp(-\lambda_s t)$$

Следовательно, уравнения (1.8) опять будут иметь каноническую форму, если исходные уравнения были каноническими. Если потребовать, чтобы уравнения (1.8) имели вид

$$\dot{u_s} = \partial K / \partial v_s, \quad \dot{v_s} = -\partial K / \partial u_s, \qquad s = 1, 2, \ldots, n$$

то при резонансе в случае $n = 2$ придем к условию $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, а при $n = 3$ — к условию $\beta_s = 0$, $s = 1, 2, 3$. Интересно, что при $n = 1$, какова бы ни была исходная система, соответствующая ей модельная система всегда получается канонической с гамильтонианом

$$K = \frac{1}{m+1} [(a + ib) u^{m+1} + (a - ib) v^{m+1}]$$

Таким образом в случаях $n = 1$, $n = 2$ условия устойчивости для канонических систем вытекают частным образом из теорем 2.1 и 2.3.

Случай $n = 3$ для канонических систем требует специального рассмотрения. Для автономных канонических систем этот случай резонанса был исследован в [9], а затем в [10], где, в частности, было показано, что неустойчивость модельной системы обязательно влечет за собой неустойчивость полной системы. Необходимые и достаточные условия устойчивости модельной системы в этом случае даются следующей теоремой:

Теорема 3.1. Необходимым и достаточным условием устойчивости тривиального решения модельной системы при резонансе в случае $n = 3$ является наличие перемены знака в ряду чисел a_1, a_2, a_3 или b_1, b_2, b_3. Достаточность может быть доказана с помощью знакоопределенного интеграла

$$\alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 + \alpha_3 r_2^3 = \text{const}, \quad \alpha_j > 0, \quad j = 1, 2, 3$$

а необходимость — с помощью функции Четаева

$$V = r_1^{p_1} r_2^{p_2} r_3^{p_3} \cos\theta$$

Автор благодарит участников семинара, руководимого В. В. Румянцевым, за обсуждение работы.

Поступила 11 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
2. *Levi-Cività T.* Sopra alcuni criteri da instabilità Ann. di Mat. Pure et Appl., 1901, ser. 3, v. 5.
3. *Мустахишев К. М.* К вопросу об устойчивости гамильтоновых систем. Труды Ун-та дружбы народов, 1968, т. 27, вып. 5.
4. *Маркеев А. П.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
5. *Каменков Г. В.* Избр. труды, т. 2, М., «Наука», 1971.
6. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собрание сочинений, т. 2, М., изд-во АН СССР, 1956.
7. *Каменков Г. В.* Избр. труды, т. 1, М., «Наука», 1971.
8. *Куницын, А. Л.* Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. Диф. уравнения, 1971, т. 7, вып. 9.
9. *Куницын А. Л.* Об устойчивости в критическом случае трех пар чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
10. *Хагин Л. Г.* Об устойчивости гамильтоновых систем при наличии резонансов. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.