

## О КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ОЦЕНКАХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Ю. М.-Л. Костюковский, А. И. Нефелов

(Москва)

Предлагаются количественные оценки неопределенности прогнозирования движения управляемой системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями.

1. Движение управляемой системы задано уравнением

$$(1.1) \quad dx/dt = F(t, x, u(t)), \quad t \in I, \quad I = \{t : t_0 \leq t < t_*\}$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $u = (u_1, \dots, u_r)$  — векторы в действительных  $n$ - и  $r$ -мерных пространствах  $R_x^n$  и  $R_u^r$  соответственно,  $t$  — время,  $t_0$  — число,  $t_*$  — или число, или символ  $\infty$ .

В пространстве  $R_x^n$  определена норма  $\|x\| = \max_i |x_i|$ .

Вектор  $x = x(t)$ ,  $t \in I$  характеризует состояние управляемой системы,  $u = u(t)$ ,  $t \in I$  — входное воздействие, график которого  $\omega = \{(t, u) : u = u(t), t \in I\}$  принадлежит допустимому множеству  $\Omega = \{\omega\}$ ,  $\omega [t_0, t]$  — сужение  $\omega$  на  $[t_0, t] \cap I$ .

Пусть решение системы (1.1), берущее начало на заданном открытом множестве  $V_0 \subset R_x^n$ , существует при всех  $t \in I$ , какое бы  $\omega \in \Omega$  ни было выбрано, причем  $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, \omega [t_0, t])$ ,  $t \in I$  — любое такое решение, где

$$(1.2) \quad x(t_0) = x_0 \in V_0$$

Пусть  $S_\delta(x_0) = \{b_0 : \|b_0 - x_0\| \leq 1/2 \delta\}$ ,  $\delta > 0$  — шар, который характеризует область допустимых начальных состояний системы (1.1), если учесть возможные ошибки измерений начального состояния управляемой системы. В момент  $t \in I$  рассмотрим множество  $S_{\rho_t}$  состояний системы (1.1) на всевозможных ее движениях (графиках решений в  $I \times R_x^n$ ), исходящих из  $S_\delta(x_0)$  при заданном  $\omega \in \Omega$ . Иначе говоря,  $S_{\rho_t} = \Phi_t(S_\delta(x_0))$  — образ шара  $S_\delta(x_0)$ , где  $\Phi_t$  — отображение из  $R_x^n$  в  $R_x^n$ , рассматриваемое как оператор перехода от  $x_0$  к  $x$ ,  $\Phi_t: x = \varphi\{\cdot\}$ ,  $x_0 \in V_0$  тогда как  $\rho_t > 0$  — диаметр множества  $S_{\rho_t}$ , а сокращение  $T\{\cdot\}$  используется здесь и в дальнейшем для обозначения функционала  $T(t, t_0, x_0, \omega [t_0, t])$ .

В качестве количественной меры локальной расходимости движений системы (1.1), берущих начало в сколь угодно малой окрестности заданной точки  $x(t_0) = x_0$ , рассмотрим величину

$$(1.3) \quad \lambda\{\cdot\} = \lim_{\delta \rightarrow 0} (|S_{\rho_t}| / |S_\delta(x_0)|)$$

где  $|S_{\rho_t}|$  и  $|S_\delta(x_0)|$  — объемы множеств  $S_{\rho_t}$  и  $S_\delta(x_0)$ .

С учетом равенства (1.5) из [1] соотношение (1.3) можно записать в виде

$$(1.4) \quad \lambda \{ \cdot \} = \exp L \{ \cdot \}$$

$$(1.5) \quad L \{ \cdot \} = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(\tau, \varphi(\tau, t_0, x_0, \omega[t_0, \tau]), u(\tau)) d\tau$$

Здесь  $L \{ \cdot \}$  — функционал на движениях системы (1.1), названный в [1] степенью лабильности системы (1.1),  $F(t, x, u(t))$ ,  $(t, x) \in A$  — непрерывно дифференцируемая функция  $t, x$  при всяком  $\omega \in \Omega$ , где

$$A = \{(t, x): x = \varphi \{ \cdot \}, t \in I, x_0 \in V_0, \omega \in \Omega\}$$

Численные значения степени лабильности системы (1.1), очевидно, могут быть получены в результате интегрирования системы уравнений с начальными условиями

$$(1.6) \quad \frac{d\varphi \{ \cdot \}}{dt} = F(t, \varphi \{ \cdot \}, u(t)), \quad \frac{dL \{ \cdot \}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(t, \varphi \{ \cdot \}, u(t)), \quad t \in I$$

$$\varphi \{ \cdot \}|_{t=t_0} = x_0, \quad L \{ \cdot \}|_{t=t_0} = 0$$

Множество упорядоченных пар  $(\varphi \{ \cdot \}, L \{ \cdot \})$ , с одной стороны, определяет движение системы (1.1), с другой — характеризует обусловленную принципиально неустранимыми ошибками начального состояния степень неопределенности прогнозирования движения управляемой системы с помощью системы дифференциальных уравнений (1.1).

Предполагается, что интегрирование системы (1.6) может быть осуществлено любым доступным способом (например, численно с помощью ЭВМ).

2. Часто о качестве функционирования управляемой системы судят, имея скалярную функцию  $y = y(t)$ ,  $t \in I$ , называемую выходом системы (1.1), связанную с вектором состояния  $x = x(t)$ ,  $t \in I$  конечным уравнением

$$(2.1) \quad y(t) = \Phi(t, x(t))$$

Допустим, что  $\Phi(t, x)$ ,  $(t, x) \in A$  — непрерывно дифференцируемая функция  $t, x$ .

Для оценки влияния неточностей задания  $x(t_0) = x_0$  на величину  $y = y(t)$ ,  $t \in I$  введем специальную количественную меру. Для этого сначала выполним следующие вспомогательные построения.

Рассмотрим шар  $S_\delta(x_0) = \{b_0 : \|b_0 - x_0\| \leq \delta\}$ ,  $\delta > 0$ , имитирующий ошибки начального состояния  $x(t_0) = x_0 \in V_0$ . Выберем положительное число  $\delta$  из условия  $S_\delta(x_0) \subset V_0$ . Пусть

$$(2.2) \quad O_t: y = \Phi(t, \varphi(t, t_0, x_0, \omega[t_0, t])), \quad x_0 \in V_0$$

— отображение из пространства  $R_x^n$  в одномерное пространство  $R_y^1 = \{y\}$ , а  $D_t$  — образ шара  $S_\delta(x_0)$  в пространстве  $R_y^1$ , индуцированный отображением  $O_t$ ,  $D_t = O_t(S_\delta(x_0))$ .

Очевидно, что (2.2) можно трактовать как  $n$ -мерную гиперповерхность в  $(n+1)$ -мерном пространстве  $R_x^n \times R_y^1 = \{(x, y)\}$ , а  $D_t$  — как часть этой гиперповерхности, соответствующую области  $S_\delta^2(x_0)$ . Площадь  $|D_t|$

этой гиперповерхности равна

$$(2.3) \quad |D_t| = \int_{S_\delta(x_0)} \sqrt{1 + \kappa^2 \{ \cdot \}} dx_{10} \dots dx_{n0}$$

$$(2.4) \quad \kappa \{ \cdot \} = \left( \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi(\cdot)}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_j \{ \cdot \}}{\partial x_{k0}} \right)^2 \right)^{1/2}$$

если величина  $\kappa \{ \cdot \}$  принимает положительные значения.

Для оценки влияния неточности задания начального состояния  $x(t_0) = x_0$  системы (1.1) на точность определения текущего значения ее выхода  $y = y(t)$ ,  $t \in I$  рассмотрим величину  $(|S_\delta(x_0)|$  — объем множества  $S_\delta(x_0)$ )

$$(2.5) \quad \sigma = \sigma(t, t_0, x_0, \omega[t_0, t]) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (|D_t| / |S_\delta(x_0)|)$$

Применяя теорему о среднем к (2.3), а затем подставляя полученное отсюда соотношение в (2.5), будем иметь  $\sigma = \sqrt{1 + \kappa^2}$ ,  $\kappa > 0$ , откуда

$$(2.6) \quad \kappa = \sqrt{\sigma^2 - 1}, \quad \sigma^2 > 1$$

Обозначим

$$(2.7) \quad l \{ \cdot \} = \ln \kappa \{ \cdot \}$$

Из (2.6), (2.7) следует эквивалентность следующих утверждений:

$$а) \sigma \{ \cdot \} \rightarrow \infty \Leftrightarrow l \{ \cdot \} \rightarrow \infty, \quad б) \sigma \{ \cdot \} \rightarrow 1 \Leftrightarrow l \{ \cdot \} \rightarrow -\infty$$

Поэтому для оценки точности определения выхода  $y = y(t)$ ,  $t \in I$  вместо количественной меры  $\sigma \{ \cdot \}$  можно использовать величину  $l \{ \cdot \}$ , определяемую согласно (2.4), (2.7). Назовем эту величину степенью лабильности выхода  $y$  системы (1.1).

Численные значения  $l \{ \cdot \}$  могут быть найдены по формулам (2.4), (2.7) с учетом того, что  $\Phi_i \{ \cdot \}$  и  $\partial \Phi_i \{ \cdot \} / \partial x_{j0}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , согласно теореме Пеано [2], удовлетворяют системе уравнений

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{d\Phi \{ \cdot \}}{dt} &= F(t, \Phi \{ \cdot \}, u(t)) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi \{ \cdot \}}{\partial x_0} &= \frac{\partial}{\partial x} F(t, \Phi \{ \cdot \}, u(t)) \frac{\partial \Phi \{ \cdot \}}{\partial x_0} \\ \Phi \{ \cdot \} |_{t=t_0} &= x_0, \quad (\partial \Phi \{ \cdot \} / \partial x_0) |_{t=t_0} = E_n, \quad t \in I \end{aligned}$$

Здесь  $\partial \Phi \{ \cdot \} / \partial x_0$  — матрица порядка  $n \times n$  частных производных  $\partial \Phi_i \{ \cdot \} / \partial x_{j0}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ;  $\partial F(\cdot) / \partial x$  — матрица порядка  $n \times n$  частных производных  $\partial F_i(\cdot) / \partial x_j$ , рассматриваемых на решении  $x(t) = \Phi \{ \cdot \}$ ,  $t \in I$ ,  $E_n$  — единичная матрица порядка  $n \times n$ .

Предполагается, что интегрирование системы (2.8) может быть осуществлено любым доступным способом (например, численно с помощью ЭВМ).

Величина  $l \{ \cdot \}$  (и  $L \{ \cdot \}$ ) при любом  $t \in I$  — непрерывная функция начального состояния  $x(t_0) = x_0 \in V_0$ . Следовательно, если  $V_0^*$  — компакт, принадлежащий  $V_0$ , то численными методами можно найти принадлежащие этому компакт начальными точки  $x_0^1$  и  $x_0^2$ , такие, что величина  $l \{ \cdot \}$  (или  $L \{ \cdot \}$ ), рассматриваемая в некоторый заданный момент времени  $\xi \in I$ , достигает соответственно своей точной нижней и точной верхней граней.

3. Прямолинейное горизонтальное движение самолета, стабилизированное необходимыми отклонениями руля высоты на постоянной высоте  $H = H_0$ , задано уравнениями [3]

$$(3.1) \quad m_0 dv_* / dt = R \cos(\alpha - \nu) = Q, \quad Y + R \sin(\alpha - \nu) = G_0$$

$$Q = C_x \frac{\rho_0 v^2}{2} S, \quad Y = C_y \frac{\rho_0 v^2}{2} S, \quad t \in I$$

Здесь  $v_* = v_*(t)$  — путевая скорость самолета (скорость относительно поверхности Земли) в момент времени  $t \in I = \{t: 0 \leq t < t_*\}$ ,  $R$  — сила тяги двигателей,  $Q$  — сила лобового сопротивления,  $Y$  — подъемная сила,  $\alpha$  — угол атаки самолета,  $\nu$  — угол между направлением силы тяги двигателей и осью корпуса самолета,  $m_0$  и  $G_0$  — соответственно масса и сила тяжести самолета,  $C_x$  и  $C_y$  — коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы, принимающие только положительные значения,  $\rho_0$  — плотность воздуха на высоте  $H_0$ ,  $S$  — площадь крыльев самолета,  $v$  — воздушная скорость или скорость полета самолета относительно атмосферного воздуха, массы которого могут перемещаться относительно поверхности Земли.

Путевая и воздушная скорость самолета связаны уравнением

$$(3.2) \quad v_* = v + w$$

где  $w$  — скорость ветра в горизонтальном направлении:  $w > 0$  при попутном ветре,  $w < 0$  при встречном ветре.

Существенное значение имеют особенности поведения самолета в неспокойной атмосфере, обусловленные резкими порывами ветра. Исследуя влияние одиночного горизонтального порыва ветра на прямолинейное горизонтальное движение самолета, примем

$$(3.3) \quad w = \begin{cases} a, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

где  $a$  — число, характеризующее интенсивность порыва ветра. Тогда из (3.2), (3.3) следует, что

$$(3.4) \quad dv_* / dt = dv / dt, \quad t \in I$$

Для турбореактивных двигателей при малых скоростях полета (например, на взлетно-посадочном режиме полета) можно принять [3]

$$(3.5) \quad R = h_0 - h_1 v$$

где  $h_0$  и  $h_1$  — положительные числа. Величина  $h_0$  является функцией угла поворота рычага управления силой тяги двигателей.

В области малых скоростей полета, где сжимаемостью воздуха можно пренебречь, коэффициенты  $C_x$  и  $C_y$  удовлетворяют уравнению [3]

$$(3.6) \quad C_x = C_{x0} + BC_y^2$$

где  $C_{x0}$  и  $B$  — положительные коэффициенты, практически не зависящие от числа Маха полета.

Рассматривая совместно уравнения (3.1) — (3.6) при условии, что при прямолинейном горизонтальном полете самолета составляющая силы тяги двигателей во втором уравнении системы (3.1) пренебрежимо мала и что угол  $(\alpha - \nu)$  между осью двигателя и касательной к траектории невелик, получим

$$(3.7) \quad dv / dt = c(s) - dv - ev^2 - f / v^2 \equiv P(s, v), \quad t \in I$$

$$c(s) = h_0 s / m_0, \quad d = h_1 / m_0, \quad e = \rho_0 C_{x0} S / 2m_0, \quad f = 2gBG_0 / \rho_0 S$$

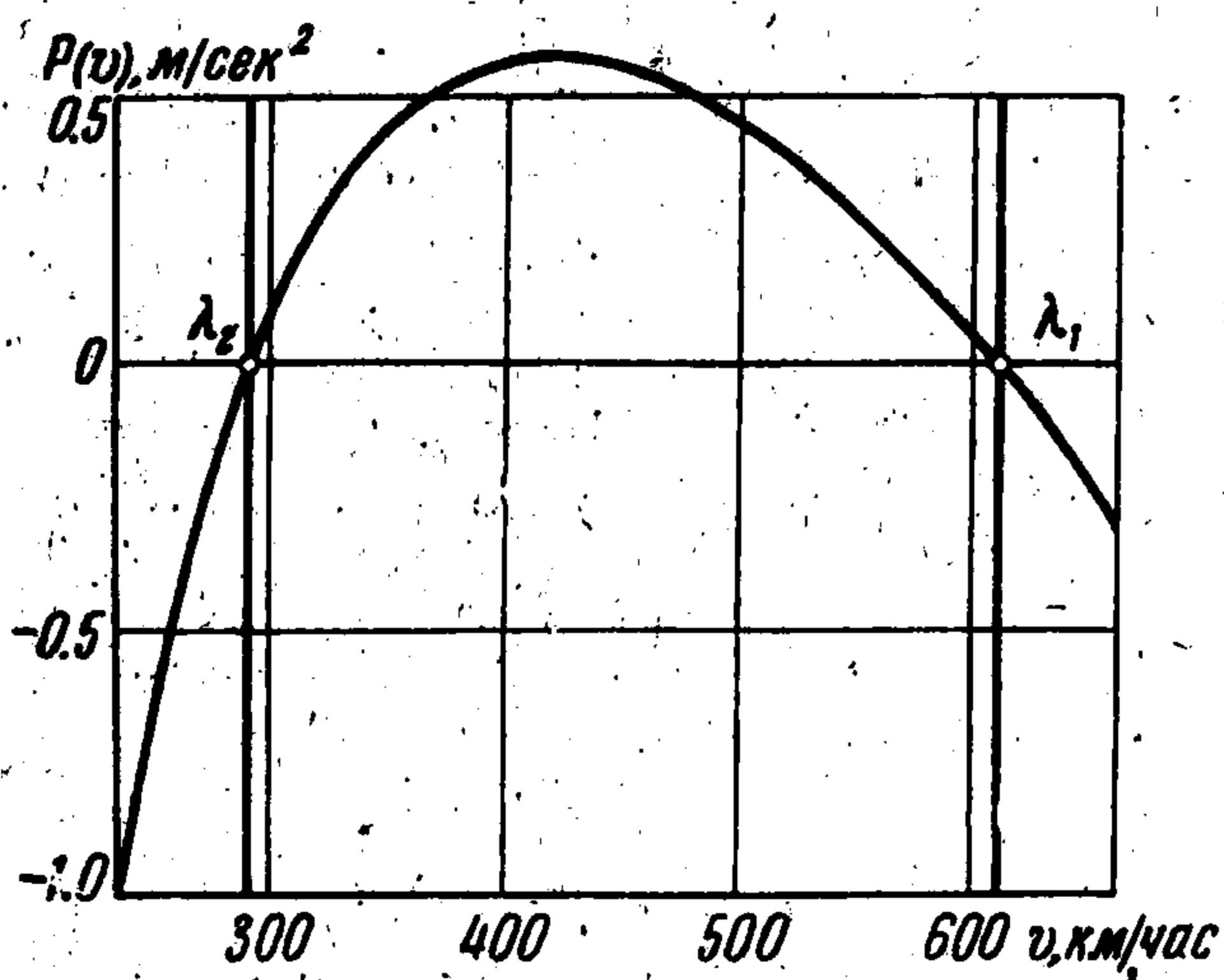
где  $g$  — ускорение силы тяжести.

Для каждого фиксированного положения  $s = s_\infty$  рычага управления силой тяги двигателей воздушная скорость  $v_\infty$  равномерного прямолинейного полета самолета может быть найдена из условия

$$(3.8) \quad P(s_\infty, v_\infty) = 0.$$

Таким образом, имеющие физический смысл положительные значения корней уравнения (3.8) зависят от величины  $s_\infty$ .

Рассматривая частный случай, когда  $h_1 = 0$  и  $s = s_\infty$ , Пенлеве [4] впервые показал, что уравнение (3.8) обычно имеет два положительных корня  $\lambda_1 = (v_\infty)_1$  и  $\lambda_2 = (v_\infty)_2$ , которые определяют два возможных значения скорости равномерного прямолинейного горизонтального полета самолета на заданной высоте  $H = H_0$ , обусловленных равновесием силы тяги двигателей и силы лобового сопротивления, и что это



Фиг. 1

равновесие может быть устойчивым и неустойчивым по Ляпунову (точки  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  на фиг. 1).

Предположим, что самолет, находившийся при всех  $t < 0$  в установившемся равномерном прямолинейном горизонтальном полете в спокойном воздухе, внезапно входит в область горизонтального воздушного потока, скорость которого определяется соотношением (3.3). В этом случае  $w = 0$  и  $v = v_*$  при всех  $t < 0$ , причем

$$(3.9) \quad v(-0) = \lim_{\mu \rightarrow 0, \mu < 0} v(\mu) = \lambda_i$$

а в качестве начального значения воздушной скорости самолета, как видно из (3.2), (3.3) и (3.9), следует принять

$$(3.10) \quad v(0) = \lambda_i - a = v_0$$

Из (3.10) следует, что возмущение начальной воздушной скорости самолета может быть вызвано не только порывом ветра, но и резким скачкообразным изменением положения  $z$  рычага управления силой тяги двигателей, которое в согласии с условием равновесия (3.8) приводит к изменению установившейся воздушной скорости  $\lambda_i = (v_\infty)_i$ .

Чтобы оценить чувствительность воздушной скорости  $v(t) = v(t, 0, v_0)$  прямолинейного горизонтального полета самолета к возмущениям его начальной скорости  $v(0) = v_0$ , определим степень лабильности уравнения (3.7) по формуле (1.5)

$$L(t, 0, v_0) = \int_0^t \left( -d - 2ev^2 + \frac{2f}{v^3} \right) d\tau$$

Величина  $L(t, 0, v_0)$  характеризует обусловленную возмущениями начальной воздушной скорости  $v(0) = v_0$  самолета степень неопределенности прогнозируемого с помощью уравнения (3.7) изменения во времени воздушной скорости самолета  $v(t) = v(t, 0, v_0)$ .

Численные значения  $L(t, 0, v_0)$  можно найти, решая задачу, аналогичную (1.6)

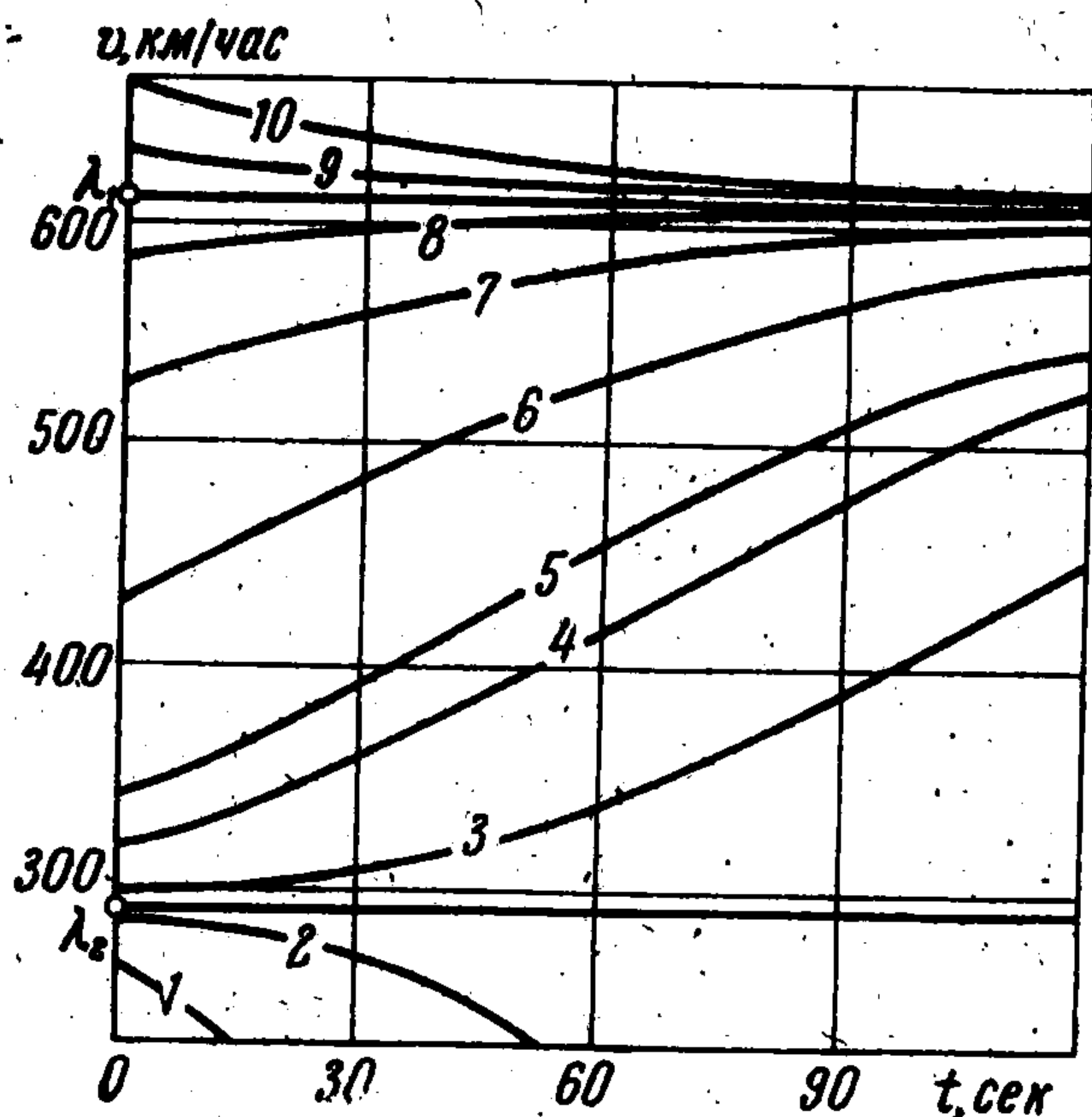
$$(3.11) \quad \begin{aligned} dv/dt &= c(s) - dv - ev^2 - f/v^2 \\ dL/dt &= -d - 2ev + 2f/v^3, \quad t \in I \\ v(0) &= v_0, \quad L(0, 0, v_0) = 0 \end{aligned}$$

На фиг. 2, 3 построены семейства кривых  $v = v(t, 0, v_0)$ ,  $L = L(t, 0, v_0)$ ,  $t \in I$ , полученные путем численного интегрирования на ЭВМ системы уравнений (3.11) для разных значений начальной воздушной скорости  $v(0) = v_0$  самолета и одного фиксированного положения  $s_\infty$  рычага управления силой тяги двигателей. Расчеты выполнены для гипотетического транспортного самолета с параметрами  $c(s_\infty) = 2.235 \text{ м/сек}^2$ ,  $d = 2 \cdot 10^{-3} \text{ 1/сек}$ ,  $e = 6.9 \cdot 10^{-5} \text{ 1/м}$ ,  $f = 1.445 \cdot 10^4 \text{ м}^3/\text{сек}^4$ , соответствующими взлетно-посадочному режиму прямолинейного горизонтального полета.

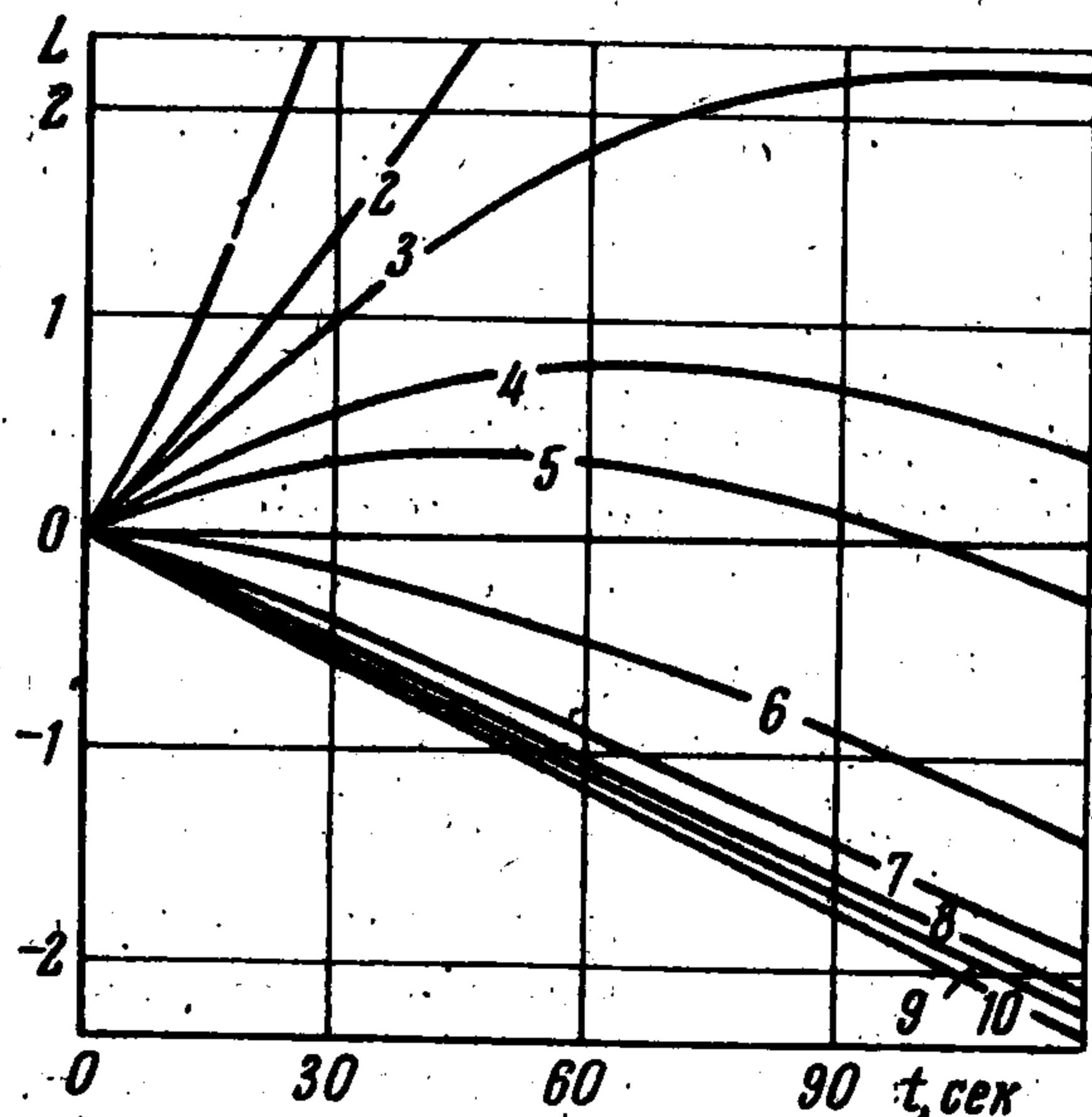
Анализ приведенных на фиг. 3 кривых изменения степени лабильности  $L = L(t, 0, v_0)$  показывает: чем меньше начальная воздушная скорость  $v(0) = v_0$  самолета

(фиг. 2); тем выше значения степени лабильности  $L = L(t, 0, v_0)$ , какое бы  $t \in I$  ни было выбрано (фиг. 3), а это, в свою очередь, означает большую неопределенность прогнозируемого с помощью уравнения (3.7) текущего значения воздушной скорости самолета из-за возмущений его начальной воздушной скорости  $v(0) = v_0$ . Следовательно, особенно большую расходимость движений уравнения (3.7), как видно из (3.2), (3.3), (3.10) и фиг. 3, должны вызывать резкие порывы попутного ветра.

Если известно, как изменяется величина степени лабильности  $L = L(t, 0, v_0)$  уравнения (3.7) на некотором выделенном движении  $v = v(t, 0, v_0)$ ,  $t \in I$ , то, очевидно,



Фиг. 2



Фиг. 3

можно ответить и на вопрос, как ведут себя движения, соседние по отношению к этому движению. Например, кривая 5 на фиг. 3, характеризующая изменение во времени степени лабильности уравнения (3.7), показывает, что на фиг. 2 соседние по отношению к кривой 5 движения сначала удаляются от этой кривой (на промежутке времени, где степень лабильности принимает положительные значения), а затем приближаются к ней (на промежутке времени, где степень лабильности отрицательна), тогда как абсолютная величина степени лабильности, рассматриваемая в данный момент времени, характеризует интенсивность протекания всех этих процессов.

Авторы признательны участникам семинара МГУ по качественной теории дифференциальных уравнений за обсуждение работы.

Поступила 8 X 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Костюковский Ю. М.-Л. Об одной идее Н. Г. Четаева. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
2. Hartman Ph. Ordinary differential equations New-York — London — Sydney, J. Wiley and Sons, 1964. (Рус. перев.: М., «Мир», 1970).
3. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. Изд. 2. М., «Машиностроение», 1969.
4. Painlevé P. Etude sur le regime normal d'un aéroplane. Techn. Aeronaut., 1911, t. 1, p. 3—11.