Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 62—50

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОБ УКЛОНЕНИИ ОТ ВСТРЕЧИ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

А. А. Чикрий

(Киев)

Рассматривается задача об уклонении конфликтно-управляемого движения от заданного множества, поставленная в работах [1,2]. Исследуется случай нелинейной системы дифференциальных уравнений, задающих динамику, и терминального множества сложной структуры. Получены достаточные условия уклонения. В качестве приложений рассматриваются задача об уклонении в дифференциальных играх с фазовыми ограничениями и задача убегания от многих преследователей. Полученные результаты иллюстрируются примерами.

1. Пусть закон движения объекта задается уравнением

$$z^{\cdot} = f(z, u, v), \quad z \in E^n \tag{1.1}$$

Здесь управляющие параметры u и v выбираются из множеств U и V, принадлежащих E^n. Выделено терминальное множество M.

Игра ведется противниками P и E, которые воздействуют на систему (1.1) с помощью параметров u и v. Игрок P способствует выходу траектории (1.1) на множество M, игрок E противодействует этому.

Параметры игры удовлетворяют следующим требованиям.

1°. Функция $f(z, u, v)$ непрерывна по аргументам и непрерывно дифференцируема по z.

2°. Множества U и V компактны.

3°. Множество $f(z, U, v)$ выпукло при любых z и v, $v \in V$.

4°. Существует такая константа C, что

$$|(z, f(z, u, v))| \leqslant C(1 + \|z\|^2)$$

5°. Множество M задается следующим образом:

$$M = \bigcup_{i=1}^{r+q} M_i \tag{1.2}$$

$$M_i = \left\{ z: \begin{array}{l} \varphi_{ij}(z) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, m(i) \\ \varphi_{ij}(z) \leqslant 0, \ j = m(i) + 1, \ m(i) + 2, \ldots l(i) \end{array} \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

$$M_i = \{z: \varphi_i(z, p) \leqslant 0, \ \forall p \in E^n\}, \quad i = r + 1, \ r + 2, \ldots, r + q$$

Здесь $\varphi_{ij}(z)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_i(z, p) = (z, p) - W_{M_i}(p)$, $W_{M_i}(p)$ — опорная функция выпуклого замкнутого множества M_i.

Напомним определение ε-стратегий [3], которые будут использоваться в дальнейшем.

Определение 1. Будем говорить, что задана ε-стратегия игрока E (Γ_E), если для каждой точки $z \in E^n$ определено число $\varepsilon(z)$, $\varepsilon(z) > 0$, и функция $\Gamma_E(t; z)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(z)$, удовлетворяющая следующим условиям: $v(t) = \Gamma_E(t; z)$ есть измеримая функция от t, принимающая значения во множестве V.

Определение 2. Будем говорить, что задана ε-стратегия игрока P (Γ_P), если для каждой точки $z \in E^n$ определена функция $\Gamma_P(t; \varepsilon, v(\cdot), z)$, ставящая в соответствие точке z, числу $\varepsilon > 0$ и функции $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, измеримую для $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ функцию $u(t) = \Gamma_P(t; \varepsilon, v(\cdot), z)$, принимающую значения в U.

Определение 3. Будем говорить, что на полуоткрытом или замкнутом интервале $[0, t_0)$ или $[0, t_0]$ определена траектория $z(t)$, начинающаяся в точке z_0, если $z(t)$ — абсолютно непрерывная функция t, $z(0) = z_0$ и существует такое множество $T \subset [0, t_0)$ (соответственно $T \subset [0, t_0]$), что

а) $0 \in T$ и если $\tau \in T$ и $\varepsilon(z(\tau)) + \tau < t_0$ ($\tau + \varepsilon(z(\tau)) \leqslant t_0$ для $[0, t_0]$), то $\tau + \varepsilon(z(\tau)) \in T$ и интервал $(\tau, \tau + \varepsilon(z(\tau)))$ не содержит точек из T;

б) множество $T \cup \{t_0\}$ замкнуто;

в) если обозначить $\tau_0 = \sup\{\tau: \tau \in T\}$, то на каждом интервале $[\tau, \tau']$, $\tau' = \tau + \varepsilon(z(\tau)) < t_0$ или на интервале $[\tau_0, t_0)$ ($[\tau_0, t_0]$) функция $z(t)$ почти всюду удовлетворяет уравнению $z^{\boldsymbol\cdot} = f(z, u(t), v(t))$,
$v(t) = \Gamma_E(t - \tau; z(\tau))$, $u(t) = \Gamma_P(t - \tau; \varepsilon(z(\tau)), v(\cdot), z(\tau))$;

г) в случае замкнутого интервала $[0, t_0]$, если $\tau_0 = t_0$, то $t_0 \in T$.

Задание начальной точки z_0 и стратегий Γ_P и Γ_E однозначно определяет траекторию $z(t) \equiv z(t; z_0, \Gamma_P, \Gamma_E)$ на всем полуинтервале $[0, \infty)$ (см. [3, 4]).

Будем говорить, что в игре (1.1), (1.2) возможно уклонение от встречи с множеством M из точки z_0, если существует стратегия Γ_E такая, что для любой стратегии Γ_P траектория $z(t) \equiv z(t; z_0, \Gamma_P, \Gamma_E)$ не попадет на множество M при $0 \leqslant t < \infty$.

2. В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

$$P_i(z) = \{p: \|p\| = 1,\ \varphi_i(z, p) \geqslant 0\}, \quad i = r+1, r+2, \ldots, r+q$$

Производные по времени от функций $\varphi_i(z, p)$, $\varphi_{ij}(z)$ в силу системы (1.1) при фиксированных p, u, v

$$\varphi_i^{(k)}(z, p) \equiv \frac{d^k}{dt^k}\varphi_i(z, p) = (\nabla\varphi_i^{(k-1)}(z, p), f(z, u, v))$$

$$\nabla\varphi_i^{(0)}(z, p) = p, \quad i = r+1, r+2, \ldots, r+q, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\varphi_{ij}^{(k)}(z) \equiv \frac{d^k}{dt^k}\varphi_{ij}(z) = (\nabla\varphi_{ij}^{(k-1)}(z),\ f(z, u, v))$$

$$\nabla\varphi_{ij}^{(0)}(z) = \nabla\varphi_{ij}(z), \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad j = 1, 2, \ldots, l(i), \quad k = 1, 2, \ldots$$

S_i — открытое множество, содержащее M_i

$$S_i^* = S_i \setminus M_i, \quad S^* = \bigcup_{i=1}^{r+q} S_i^*, \quad S = S^* \setminus M \tag{2.1}$$

$$I = \{1, 2, \ldots, r+q\}, \quad I_1 = \{1, 2, \ldots, r\}, \quad I_2 = \{r+1, r+2, \ldots, r+q\}$$

Для $z \in S$ положим

$$I(z) = \{i\colon i \in I, z \in S_i^*\}, I_1(z) = I(z) \cap I_1, I_2(z) = I(z) \cap I_2$$

3. Сформулируем условия, каждое последующее из которых предполагает выполнение предыдущих.

Условие 1. Функция $f(z, u, v)$ дифференцируема по z до $k_* - 1$ порядка, а каждая из функций $\varphi_{ij}(z)$ непрерывно дифференцируема до порядка k_* включительно.

Условие 2. Если $z \in S$ и $i \in I_2(z)$, то существует вектор $p \in P_i(z)$ и номер $k_i = k_i(z) \leqslant k_*$ такой, что функции $\varphi_i^{(\nu)}(z, p)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k_i - 1)$ не зависят от u и v, причем $\varphi_i^{(\nu)}(z, p) \geqslant 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k_i - 1)$, а

$$\varphi_i^{(k_i)}(z, p) = (\nabla\varphi_i^{(k_i-1)}(z, p), f(z, u, v))$$

В случае $z \in S$, $i \in I_1(z)$ либо а) существуют номера $\gamma = \gamma(i)$ $(1 \leqslant \gamma(i) \leqslant l(i))$ и $k_i^1 = k_i^1(z, \gamma) \leqslant k_*$ такие, что $\varphi_{i\gamma}(z) > 0$ функции $\varphi_{i\gamma}^{(\nu)}(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k_i^1 - 1)$ не зависят от u и v, причем $\varphi_{i\gamma}^{(\nu)}(z) \geqslant 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k_i^1 - 1)$, а

$$\varphi_{ij}^{k_i^1}(z) = (\nabla\varphi_{i\gamma}^{(k_i^1-1)}(z), f(z, u, v))$$

либо б) $\varphi_{ij}(z) < 0$ для всех j, $1 \leqslant j \leqslant l(i)$, но существуют номера $\mu = \mu(i)$ $(1 \leqslant \mu(i) \leqslant m(i))$ и $k_i^2 = k_i^2(z, \mu) \leqslant k_*$ такие, что функции $\varphi_{i\mu}^{(\nu)}(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k_i^2 - 1)$ не зависят от u и v, причем $\varphi_{i\mu}^{(\nu)}(z) \leqslant 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k_i^2 - 1)$, а

$$\varphi_{i\mu}^{k_i^2}(z) = (\nabla\varphi_{i\mu}^{(k_i^2-1)}(z), f(z, u, v))$$

Случаи а) и б) в условии 2 в дальнейшем будем обозначать через 2а и 2б соответственно.

Условие 3. Система неравенств

$$\min_{u\in U} (\nabla\varphi_i^{(k_i-1)}(z, p), f(z, u, v)) \geqslant \sigma(z), \quad i \in I_2(z) \tag{3.1}$$

$$\min_{u\in U} (\nabla\varphi_{i\gamma}^{(k_i^1-1)}(z), f(z, u, v)) \geqslant \sigma(z), \quad i \in I_1(z) \text{ (2а)}$$

$$\max_{u\in U} (\nabla\varphi_{i\mu}^{(k_i^2-1)}(z), f(z, u, v)) \leqslant -\sigma(z), \quad i \in I_1(z) \text{ (2б)}$$

где $\sigma(z)$ — некоторая непрерывная строго положительная в любой ограниченной области функция, разрешима относительно v, $v \in V$, в каждой точке $z \in S$.

Пусть выполнены условия 1—3. Для точки $z_0 \in S$ и $i \in I(z_0)$ зафиксируем $p^\circ \in P_i(z_0)$, k_i, k_i^1, k_i^2, $\gamma(i)$, $\mu(i)$ и $v_0 = v(z_0)$, удовлетворяющие (3.1). Рассмотрим функции

$$\chi_i^{z_0}(z) = \min_{u \in U}(\nabla\varphi_{i\gamma}^{(k_i^1-1)}(z), f(z, u, v_0)), \quad i \in I_1(z_0) \quad (2а)$$

$$\varkappa_i^{z_0}(z) = \max_{u \in U}(\nabla\varphi_{i\mu}^{(k_i^2-1)}(z), f(z, u, v_0)), \quad i \in I_1(z_0) \quad (2б)$$

$$\psi_i^{z_0}(z) = \min_{u \in U}(\nabla\varphi_i^{(k_i-1)}(z, p^\circ), f(z, u, v_0)), \quad i \in I_2(z_0)$$

Если z_0 изменяется в некотором множестве Z, $Z \subset S$, а i для каждого z_0 пробегает значения из $I(z_0)$, то получим семейство непрерывных функций, которое обозначим через

$$(3.2) \qquad \{\lambda_i^{z_0}(z)\}_{z_0 \in Z,\ i \in I(z_0)}$$

Условие 4. Семейство функций (3.2), где Z — ограниченное множество, является равностепенно непрерывным на множестве Z.

4. *Теорема об уклонении от встречи*. Пусть в дифференциальной игре (1.1), (1.2) существуют такой номер k_* и множество S, что выполнены условия 1—4. Тогда из любой точки z_0, $z_0 \bar{\in} M$, возможно уклонение от встречи с терминальным множеством.

Доказательство. Пусть $z_0 \in S$. Для $i \in I_1(z_0)$ в силу условий 2,3 либо существуют номера $\gamma = \gamma(i)$, k_i^1 и $v_0 = v(z_0) \in V$ такие, что

$$\min_{u \in U}(\nabla\varphi_{i\gamma}^{(k_i^1-1)}(z_0), f(z_0, u, v_0)) \geqslant \sigma(z_0) > 0$$

либо существуют номера $\mu = \mu(i)$, k_i^2 и $v_0 = v(z_0) \in V$ такие, что

$$\max_{u \in U}(\nabla\varphi_{i\mu}^{(k_i^2-1)}(z_0), f(z_0, u, v_0)) \leqslant -\sigma(z_0) < 0$$

В первом случае выберем окрестность Ω_{r_i} $(r_i > 0)$ точки z_0 настолько малой, чтобы по непрерывности выполнялось неравенство

$$(4.1) \qquad \min_{u \in U}(\nabla\varphi_{i\gamma}^{(k_i^1-1)}(z), f(z, u, v_0)) \geqslant 0$$

во втором случае — неравенство

$$(4.2) \qquad \max_{u \in U}(\nabla\varphi_{i\mu}^{(k_i^2-1)}(z) f(z, u, v_0)) \leqslant 0$$

и

$$\Omega_{r_i} \cap (\bigcup_{i \in I(z_0)} M_i) = \varnothing$$

Для $i \in I_2(z_0)$ в силу условий 2,3 существуют вектор $p \in P_i(z_0)$, номер k_i и $v_0 = v(z_0) \in V$ такие, что $\min\limits_{u \in U}(\nabla\varphi_i^{(k_i-1)}(z_0, p), f(z_0, u, v_0)) \geqslant \sigma(z_0) > 0$.

Выберем окрестность Ω_{r_i} точки z_0 так, чтобы по непрерывности выполнялось неравенство

$$(4.3) \qquad \min_{u \in U}(\nabla\varphi_i^{(k_i-1)}(z, p), f(z, u, v_0)) \geqslant 0$$

и

$$\Omega_{r_i} \cap \left(\bigcup_{i \in I(z_0)} M_i \right) = \varnothing$$

Положим

$$r_0 = \min_{i \in I(z_0)} r_i$$

Из предположений о множествах U и V, функции $f(z, u, v)$ и леммы Гронуолла [5] следует, что существует такое $\tau_0 > 0$, что траектория, начинающаяся в точке z_0 с произвольным измеримым управлением $u(t)$ и $v(t) = v_0$, не выйдет из окрестности Ω_{r_0} в течение времени τ_0.

Построим стратегию уклонения Γ_E^*. Для этого положим $\varepsilon(z_0) = \tau_0$ и $v(t) = v_0$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$. Тогда, согласно стратегии Γ_P, определится управление $u(t)$, и систему (1.1) можно проинтегрировать на отрезке $[0, \tau_0]$, получив траекторию $z(t)$.

Пусть $z_0 \overline{\in} S$. Выберем окрестность Ω_{r_0} точки z_0 такой, чтобы $M \cap \Omega_{r_0} = \varnothing$. Тогда существует такое $\tau_0 > 0$, что траектория, начинающаяся в точке z_0 с произвольными измеримыми управлениями $u(t)$ и $v(t)$, не выйдет из окрестности Ω_{r_0} в течение времени τ_0. Положим $\varepsilon(z_0) = \tau_0$ и, выбрав $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, измеримой со значениями в V, определим стратегию Γ_E^*. Тогда, согласно стратегии Γ_P, определится управление $u(t)$, и систему (1.1) можно проинтегрировать на отрезке $[0, \tau_0]$, получив траекторию $z(t)$.

Покажем, что паре стратегий (Γ_P, Γ_E^*) и начальной точке z_0 $(z_0 \overline{\in} M)$ соответствует траектория системы (1.1), не пересекающая множество M в конечный момент времени. Для этого установим оценки для изменения функций $\varphi_{ij}(z)$ и $\varphi_i(z, p)$ вдоль траектории $z(t)$, соответствующей паре стратегий (Γ_P, Γ_E^*). Для $z_0 \in S$ и $i \in I(z_0)$ функции $\varphi_{i\gamma}(z)$, $i \in I_1(z_0)$ (2а), $\varphi_{i\mu}(z)$, $i \in I_1(z_0)$, (2б), $\varphi_i(z, p)$, $i \in I_2(z_0)$, согласно формуле Тейлора с остаточным членом в виде определенного интеграла [6], представимы вдоль траектории $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, в виде

$$\varphi_{i\gamma}(z(t)) = \sum_{j=0}^{k_i^1-1} \frac{t^j}{j!} \varphi_{i\gamma}^{(j)}(z_0) + \tag{4.4}$$
$$+ \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k_i^1-1}}{(k_i^1-1)!} \left(\nabla \varphi_{i\gamma}^{(k_i^1-1)}(z(\tau)), f(z(\tau), u(\tau), v_0)\right) d\tau$$

(два других представления аналогичны (4.4)).

Согласно определению стратегии Γ_E^* $z(\tau) \in \Omega_{r_0}$ для $\tau \leqslant \tau_0$.

Используя неравенства (4.1)—(4.3), условие 2, из представлений типа (4.4) получим

$$\varphi_{i\gamma}(z(t)) \geqslant \varphi_{i\gamma}(z_0) > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_0, \quad i \in I_1(z_0) \quad \text{(2а)} \tag{4.5}$$
$$\varphi_{i\mu}(z(t)) \leqslant \varphi_{i\mu}(z_0) < 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_0, \quad i \in I_1(z_0) \quad \text{(2б)}$$
$$\varphi_i(z(t), p) > \varphi_i(z_0, p) \geqslant 0, \quad 0 < t \leqslant \tau_0, \quad i \in I_2(z_0)$$

Таким образом, для $z_0 \in S$ и для каждого $i \in I(z_0)$ функции $\varphi_{i\gamma}(z)$, $\varphi_i(z, p)$ монотонно возрастают, а функции $\varphi_{i\mu}(z)$ монотонно убывают вдоль траектории $z(t)$ в течение некоторого времени. Отсюда следует, что траектория $z(t)$ не пересечет множество $\bigcup\limits_{i \in I(z_0)} M_i$ на отрезке времени $[0, \tau_0]$. А поскольку по построению стратегии Γ_E^* $z(t)$ не пересекает и $\bigcup\limits_{i \in I(z_0)} M_i$ в течение времени τ_0, то $z(t)$ не пересекает M на интервале $[0, \tau_0]$.

Для $z_0 \in S$ из определения стратегии Γ_E^* также следует, что на некотором отрезке $[0, \tau_0]$ $z(t)$ не пересечет M. Следовательно, если $\tau, \tau' \in T$, $\tau' = \tau + \varepsilon(z(\tau))$, то на отрезке $[\tau, \tau']$ траектория $z(t)$ не пересекает M.

Покажем, что в любом ограниченном подмножестве Z множества S можно выбрать $\varepsilon(z) \geqslant \tau > 0$, где постоянная τ зависит лишь от множества Z. Обозначим $\bar{Z}$ — замыкание множества Z, $\min\limits_{z \in \bar{Z}} \sigma(z) = \Delta$.

Согласно условию 4, семейство функций (3.2) равностепенно непрерывно на Z, т. е. для $\Delta > 0$ существует такое $\delta_1 > 0$, что

$$|\lambda_i^{z_0}(z_1) - \lambda_i^{z_0}(z_2)| \leqslant \Delta,$$

для всех z_1, z_2 из Z таких, что $\|z_1 - z_2\| \leqslant \delta_1$ и всех $z_0 \in Z$ и $i \in I(z_0)$.

Таким образом, для любой точки $z_0 \in Z$ каждая из функций $\lambda_i^{z_0}(z)$, $i \in I(z_0)$, неотрицательна либо неположительна в окрестности этой точки радиуса не меньше δ_1.

Кроме того, существует такое $\delta_2 > 0$, что для любой точки $z_0 \in Z$ ее окрестность Ω_{δ_2} не пересекается с множеством $\bigcup\limits_{i \in I(z_0)} M_i$.

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Так как траектория $z(t)$ удовлетворяет в Z условию Липшица с постоянной L, то можно для любой точки $z \in Z$ выбрать

$$\varepsilon(z) \geqslant \delta / L = \tau > 0$$

Допустим теперь, что траектория $z(t)$, исходящая из точки $z_0 \in M$ и соответствующая паре стратегий (Γ_P, Γ_E^*), в некоторый конечный момент времени t_* впервые пересечет границу M, т. е. для некоторого i либо $\varphi_{ij}(z(t_*)) = 0$ для любого $j = 1, 2, \ldots, m(i)$ и $\varphi_{ij}(z(t_*)) \leqslant 0$ для любого $j = m(i) + 1, m(i) + 2, \ldots, m(i) + l(i)$, либо $\varphi_i(z(t_*), p) \leqslant 0$ для любого $p \in E^n$. Но тогда существует такое $\vartheta > 0$, что $z(t)$ принадлежит некоторому ограниченному подмножеству Z множества S при всех t, $t_* - \vartheta \leqslant t < t_*$, причем в силу сказанного точка t_* должна быть предельной для точек из T, соответствующих траектории. Поскольку можно выбрать $\varepsilon(z) \geqslant \tau$ в множестве Z, то существует такой момент $t_1 \in T$, $t_* - \vartheta \leqslant t_1 < t_*$, что $t_* = t_1 + \beta$, где $\beta \leqslant \varepsilon(z(t_1))$. Поскольку $z(t_1) \in S$, то для каждого $i \in I(z(t_1))$ в силу (4.5) и по непрерывности выполнено одно из соотношений

$$\varphi_{i\gamma}(z(t)) \geqslant \varphi_{i\gamma}(z(t_1)) > 0, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \varepsilon(z(t_1))$$

$$\varphi_{i\mu}(z(t)) \leqslant \varphi_{i\mu}(z(t_1)) < 0, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \varepsilon(z(t_1))$$

$$\varphi_i(z(t), p) > \varphi_i(z(t_1), p) \geqslant 0, \quad t_1 < t \leqslant t_1 + \varepsilon(z(t_1))$$

По определению стратегии Γ_E^* траектория $z(t)$ на интервале $[t_1, t_1 + \varepsilon(z(t_1))]$ не пересекает множество $\bigcup_{i \in I(z(t_1))} M_i$, поэтому пришли к противоречию. Теорема доказана

5. Остановимся на случае линейной системы (1.1), $I_1 = \phi$, $q = 1$, который включает в себя случай, рассмотренный в работах [1,2], и сравним результаты на примерах.

Пример. В евклидовом пространстве E^n, $n \geqslant 2$, движения двух точек x и y, где x — преследователь, y — убегающий, задаются уравнениями

$$x^{(r)} + a_1 x^{(r-1)} + \ldots + a_{r-1} x^{\cdot} + a_r x = u$$
$$y^{(s)} + b_1 y^{s-1} + \ldots + b_{s-1} y^{\cdot} + b_s y = v$$
$$M = \{(x, y)\colon x = y\},\ s \leqslant n - 1,\ u \in U \in E^n,\ v \in V \in E^n,\ \dim V = n$$

Здесь $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ — производные порядка i, a_i, b_j — линейные отображения пространства E^n в себя, U и V — выпуклые компактные множества.

Если выполнено одно из двух условий: 1) $s < r$, 2) при $s = r$ существует такой вектор ω, что $W_{V+\omega}(p) - W_U(p) > 0\ \forall\ p \in E^n$, то возможно убегание.

Эти условия совпадают с условиями работы [2] при $n \geqslant s + 1$.

В контрольном примере Л. С. Понтрягина ($n \geqslant 3$) и задаче «мальчик и крокодил» ($n \geqslant 2$), представляющими собой частные случаи рассмотренного примера, достаточные условия убегания совпадают с условиями работ [1,7].

6. В качестве приложения рассмотрим задачу уклонения при наличии фазовых ограничений [8–13].

Пусть вектор состояния z системы (1.1) стеснен ограничением — он не должен покидать множество G, терминальное множество M выпукло и замкнуто

(6.1) $$G = \{z\colon \varphi_i(z) < 0,\ i = 1, 2, \ldots, r\}$$

(6.2) $$M = \{z\colon (z, p) \leqslant W_M(p)\ \ \forall\ p \in E^n\}$$

Здесь $\varphi_i(z)$ — непрерывно дифференцируемые функции.

Игрок E пытается уклонить траекторию системы (1.1) от встречи с M, не нарушая фазовых ограничений (6.1), цель игрока P — препятствовать противнику. Предполагается, что $M \cap G \neq \varnothing$.

Положив

(6.3) $$M_i = \{z\colon -\varphi_i(z) \leqslant 0\}, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$
$$M = M_{r+1}, \qquad M_0^* = \bigcup_{i=1}^{r+1} M_i$$

получим, что задача уклонения системы (1.1) от множества M при ограничениях (6.1) свелась к задаче уклонения системы (1.1) от множества M_0 без ограничений. Последняя задача представляет частный случай задачи уклонения в игре (1.1), (1.2) при $q = 1$, $m(i) = 0$, $l(i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Предположим, что множество G замкнуто

(6.4) $$G = \{z\colon \varphi_i(z) \leqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, r\}$$

и неравенства (6.4) удовлетворяют условию Слейтера.

Положив вместо (6.3)

$$M_i = \{z\colon -\varphi_i(z) < 0\}, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

получим, что задача уклонения системы (1.1) от M при ограничениях (6.4) свелась к задаче уклонения системы (1.1) от множества M_0 без ограничений, которое не является замкнутым. В этом случае вместо (2.1) следует положить

$$S_i{}^* = \{z\colon \varphi_i(z) = 0\}, \quad i = 1, 2, \ldots, r; \quad S = (S_* \cup \partial G) \setminus M_0$$

где S_* — открытое множество, содержащее M_0. Теорема об уклонении от встречи для этого случая доказывается при условиях 1—4 без существенных изменений.

Предложенный подход позволяет получить достаточные условия уклонения в задачах типа «игры с линией смерти», «крыса, загнанная в угол», «патрулирование коридора» [14].

Пример. Закон движения преследующего и убегающего объектов задаются уравнениями

$$x^{\cdot\cdot} = u, \quad y^{\cdot} = v, \quad \| u \| \leqslant 1, \quad \| v \| \leqslant 1, \quad M = \{(x, \ y)\colon \ x = y\}$$

где x, y — векторы евклидова пространства, размерности $n \geqslant 2$, причем убегающий стеснен ограничением $(a, y) > 0$, a — постоянный вектор. Здесь $(a, y) = 0$ — «гиперплоскость смерти». Проводя соответствующие выкладки, получим, что уклонение возможно из любых начальных положений $(x, \ y)$, таких что $x \neq y$, $(a, y) > 0$, причем $k_* = 1$.

7. Рассмотрим задачу убегания от нескольких преследователей.

Пусть движение каждого из N преследователей описывается системой уравнений (7.1), а убегающий движется согласно системе (7.2)

$$x_i^{\cdot} = f_i(x_i, u_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N; \quad x_i \in E^{r_i}, \quad u_i \in U_i \subset E^{r_i} \tag{7.1}$$

$$y^{\cdot} = g(y, v), \quad y \in E^{r_0}, \quad v \in V \subset E^{r_0} \tag{7.2}$$

Здесь u_i, v — управляющие параметры игроков.

Обозначив $z = (x_1, x_2, \ldots, x_N, y)$, на прямом произведении

$$E^{r_1} \times E^{r_2} \times \ldots \times E^{r_N} \times E^{r_0}$$

выделим терминальное множество M

$$M = \bigcup_{i=1}^{N} M_i, \quad M_i = \{z : \{x_i = y\}_1{}^e\} \tag{7.3}$$

где $\{x_i\}_1{}^e = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ie})$, $\{y\}_1{}^e = (y_1, \ldots, y_e)$, $e \leqslant \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant N} r_i$ — первые e координат соответствующих векторов.

Будем предполагать для системы (7.1), (7.2) выполненными условия, аналогичные условиям 1° — 4°, обеспечивающие существование, единственность и продолжимость решения (7.1), (7.2).

Опорная функция множества M_i имеет вид $W_{M_i}(p) = 0$, если $\{p_i = -p_0\}_1{}^e$, $\{p_i\}_{e+1}^{r_i} = 0$, $\{p_0\}_{e+1}^{r_0} = 0$, $p_j = 0\,(j \neq i)$, $W_{M_i}(p) = \infty$, если хотя бы одно из указанных условий не выполнено.

Здесь $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N, p_0) \in E^{r_1} \times E^{r_2} \times \ldots \times E^{r_N} \times E^{r_0}$.

Видно, что задача уклонения системы (7.1), (7.2) от множества M вида (7.3) укладывается в ранее предложенную схему.

Пример. Закон движения преследователей и убегающего задаются уравнениями

$$\ddot{x}_1 = u_1 \quad \ddot{x}_2 = u_2, \quad \dot{y} = v \quad \|u_1\| \leqslant \alpha, \quad \|u_2\| \leqslant \beta, \quad \|v\| \leqslant 1, \quad \alpha, \beta > 1$$

$$M = M_1 \cup M_2, \quad M_1 = \{(x_1, y): x_1 = y\}, \quad M_2 = \{(x_2, y): x_2 = y\}$$

где x_1, x_2, y — векторы евклидова пространства размерности $n \geqslant 2$.

Можно проверить, что уклонение возможно, причем $k_* = 1$, из любых положений, таких что $x_1 \neq y$, $x_2 \neq y$.

Автор благодарит Б. Н. Пшеничного за обсуждение результатов.

Поступила 28 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф.* Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх. Дифференциальные уравнения, 1971, № 3.
2. *Понтрягин Л. С.* Линейная дифференциальная игра убегания. Тр. МИ АН СССР им. Стеклова, 1971, т. 112.
3. *Pchenitchny B. N.* ε- strategies in differential games. In Topics in differential games. New-York — London — Amsterdam, 1973.
4. *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестн. МГУ. Сер. матем, механ., астрон., физ., хим., 1959, № 2.
5. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
6. *Картан А.* Дифференциальное исчисление, М., «Мир», 1971.
7. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А.* Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 6.
8. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
9. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения I, II. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1973, № 2, 3.
10. *Пшеничный Б. Н., Дзюбенко Г. Ц.* О дифференциальных играх с двумя терминальными множествами. В сб. Математические методы исследования и оптимизация систем, № 5, Киев, 1970.
11. *Куржанский А. Б.* Дифференциальные игры сближения при ограниченных фазовых координатах. Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 3.
12. *Никольский М. С.* Дифференциальные игры с фазовыми ограничениями. В сб.: Теория оптимальных решений, № 4. Киев, 1969.
13. *Friedman A.* Differential games with restricted phase coordinates. J. differential Equations, 1970, vol. 8, No. 1.
14. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.