

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ
ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗОМ

А. В. Великотный, Б. И. Сметанин

(Ростов-на-Дону)

При исследовании задачи об установившихся колебаниях плоскости с разрезом конечной длины используется асимптотический метод, позволивший получить решение в виде простых формул для больших значений некоторого характерного безразмерного параметра. Расчетные формулы приводятся для определения функции, характеризующей перемещения точек берегов разреза, и критического значения напряжений. Дается численное исследование полученных результатов.

Рассматривается плоская задача теории упругости об установившихся колебаниях плоскости с разрезом длиной $2a$. К берегам разреза, при $|x| \leq a, y = 0$ приложена нормальная нагрузка $\sigma_y = -q_0 + q_1 \cos(\omega t)$ ($q_0 > q_1 > 0, t$ — время). Ранее эта задача исследовалась в [1]. Ниже для решения применяется асимптотический метод, развитый в [2]. Этот метод позволяет получить решение рассматриваемой задачи в виде простых формул для больших значений параметра $\lambda = (G/\rho)^{1/2}(\omega a)^{-1}$ (ρ — плотность, G — модуль сдвига плоскости).

Функцию $u_y(x, 0), |x| \leq a$, характеризующую перемещения точек берегов разреза, будем искать в следующем виде:

$$(1) \quad u_y = (1 - \nu) G^{-1} q_0 \sqrt{a^2 - x^2} + \text{Re} \{ \gamma(x) e^{-i\omega t} \}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, первое слагаемое, соответствующее случаю $q_1 = 0$, представляет собой известное решение задачи Гриффитса для плоскости с разрезом длиной $2a$, к берегам которого приложена нормальная нагрузка $\sigma_y = -q_0$.

Для определения функции $\gamma(x)$ с помощью методов операционного исчисления может быть получено следующее интегральное уравнение (ядро $Q(h)$ понимается в смысле обобщенных функций):

$$(2) \quad \int_{-1}^1 \varphi(z) Q\left(\frac{z-r}{\lambda}\right) dz = \pi \frac{(1-\nu) q_1 \lambda}{G}, \quad |r| < 1$$

$$(3) \quad r = x/a, \quad \varphi(r) = \gamma'(x)$$

$$(4) \quad Q(h) = \int_0^\infty L(u) \sin(uh) du \quad \left(h = \frac{z-r}{\lambda} \right)$$

$$(5) \quad L(u) = \frac{(2u^2 - 1)^2 - 4u^2 \sqrt{u^2 - 1} \sqrt{u^2 - \varepsilon^2}}{2(\varepsilon^2 - 1)u \sqrt{u^2 - \varepsilon^2}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}}$$

Используя интегральное представление и рекуррентные формулы для функции Ганкеля $H_k^{(2)}(z)$ [3], ядро (4) можно представить в следующем виде:

$$(6) \quad Q(h) = \frac{\pi i}{\varepsilon^2 - 1} \left\{ \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} - \varepsilon^3 + \varepsilon \right) H_1^{(2)}(\varepsilon h) - \frac{2}{h^2} H_1^{(2)}(h) - \frac{1}{h} \left[\varepsilon^2 H_0^{(2)}(\varepsilon h) - H_0^{(2)}(h) \right] - \frac{1}{4} \int H_0^{(2)}(\varepsilon h) dh \right\}$$

Из (6), с учетом разложений в ряд цилиндрических функций [3], найдем ($c_* = C - \ln 2, C$ — постоянная Эйлера [3])

$$(7) \quad Q(h) = \frac{1}{h} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n h^{2n+1} + \ln|h| \sum_{n=0}^{\infty} d_n h^{2n+1}$$

$$b_0 = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left[\varepsilon^4 \left(-\frac{3}{4} \ln \varepsilon - \frac{3}{4} c_* + \frac{5}{16} \right) + \varepsilon^2 \left(\ln \varepsilon + c_* - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{4} c_* - \frac{1}{2} \ln \varepsilon + \frac{11}{16} + \pi i \left(-\frac{3}{8} \varepsilon^4 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{3}{8} \right) \right]$$

$$b_1 = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left[\varepsilon^6 \left(\frac{5}{48} \ln \varepsilon + \frac{5}{48} c_* - \frac{73}{576} \right) + \varepsilon^4 \left(-\frac{1}{8} \ln \varepsilon - \frac{1}{8} c_* + \frac{5}{32} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{24} \ln \varepsilon + \frac{1}{24} c_* - \frac{1}{18} \right) + \frac{1}{48} c_* - \frac{17}{576} + \pi i \left(\frac{5}{96} \varepsilon^6 - \frac{1}{16} \varepsilon^4 + \frac{1}{48} \varepsilon^2 + \frac{1}{96} \right) \right]$$

$$d_0 = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left(-\frac{3}{4} \varepsilon^4 + \varepsilon^2 - \frac{3}{4} \right),$$

$$d_1 = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left(\frac{5}{48} \varepsilon^6 - \frac{1}{8} \varepsilon^4 + \frac{1}{24} \varepsilon^2 + \frac{1}{48} \right) \text{ и т. д.}$$

Внесем $Q(h)$ в форме (7) в (2), после преобразований получим

$$(8) \quad \int_{-1}^1 \frac{\varphi(z)}{z-r} dz = \pi f(r), \quad |r| < 1$$

$$f(r) = \frac{(1-\nu)q_1}{G} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n+2}} \int_{-1}^1 \varphi(z) (z-r)^{2n+1} \times \\ \times \left[b_n + d_n \ln \frac{|z-r|}{\lambda} \right] dz$$

Применяя формулу обращения к сингулярному интегральному уравнению (8), получим интегральное уравнение второго рода относительно функции $\varphi(r)$

$$(9) \quad \varphi(r) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-r^2}} \left[P + \frac{(1-\nu)\pi q_1}{G} r + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n+2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-r} dz \int_{-1}^1 \varphi(\tau) (\tau-z)^{2n+1} \left(b_n + d_n \ln \frac{|\tau-z|}{\lambda} \right) d\tau \right]$$

$$(10) \quad P = \int_{-1}^1 \varphi(r) dr$$

Легко убедиться с учетом формул (1), (3) и очевидного условия $u_y(\pm a, 0) = 0$, что P равно нулю. Решение уравнения (9) будем искать в следующем виде:

$$(11) \quad \varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{nm}(r) \lambda^{-2n} \ln^m \lambda$$

Внося $\varphi(r)$ в форме (11) в левую и правую части уравнения (9) и приравнявая выражения при одинаковых степенях λ и $\ln \lambda$ в обеих частях полученного таким путем соотношения, придем для определения функций $\varphi_{nm}(r)$ к бесконечной системе интегральных уравнений

$$(12) \quad \varphi_{00}(r) = \frac{(1-\nu)q_1}{G} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$\varphi_{10}(r) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-r^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-r} dz \int_{-1}^1 \varphi_{00}(\tau) (\tau-z) [b_0 + d_0 \ln |\tau-z|] d\tau$$

$$\varphi_{11}(r) = -\frac{d_0}{\pi^2 \sqrt{1-r^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-r} dz \int_{-1}^1 \varphi_{00}(\tau) (\tau-z) d\tau \text{ и т. д.}$$

Опуская промежуточные выкладки по формулам (12), приводим выражение, определяющее функцию $\varphi(r)$ (вычисления были проведены при $\nu = 0.3$)

$$(13) \quad \varphi(r) = \frac{(1-\nu)q_1}{G} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} [\Omega_1(r) + i\Omega_2(r)]$$

$$\Omega_1(r) = 1 - \lambda^{-2} (0.3679 r^2 - 0.8175 - 0.3679 \ln \lambda) - \lambda^{-4} (-0.03129 r^4 + 0.3014 r^2 - 0.1337 - \ln \lambda (-0.1877 r^2 + 0.5131) - 0.1353 \ln^2 \lambda) + O(\lambda^{-6} \ln^3 \lambda)$$

$$\Omega_2(r) = -0.5778 \lambda^{-2} - \lambda^{-4} (-0.2949 r^2 - 0.8060 + 0.4251 \ln \lambda) + O(\lambda^{-6} \ln^3 \lambda)$$

Из (13) и (3) получим

$$(14) \quad \gamma'(x) = \frac{(1-\nu)q_1x}{G\sqrt{a^2-x^2}} \left[\Omega_1\left(\frac{x}{a}\right) + i\Omega_2\left(\frac{x}{a}\right) \right]$$

Связь между длиной трещины и нагрузкой, приложенной к берегам разреза, определим по формуле [1]

$$(15) \quad K_I = K_{Ic}$$

$$(16) \quad K_I = \lim_{x \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x-a)} \sigma_y(x, 0) =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{G\sqrt{2\pi(a-x)}}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} u_y(x, 0)$$

Здесь K_{Ic} — критический коэффициент интенсивности напряжений. Внося u_y в виде (1) с учетом (14) в (16), получим

$$(17) \quad K_I = \sqrt{a\pi} q_0 \{1 - \kappa [\Omega_1(1) \cos \omega t + \Omega_2(1) \sin \omega t]\}$$

Подставляя максимальное значение K_I в (15), найдем

$$(18) \quad q_0 (1 + \kappa \Omega_*) = K_{Ic} (a\pi)^{-1/2}$$

$$\kappa = q_1 / q_0, \quad \Omega_* = [\Omega_1^2(1) + \Omega_2^2(1)]^{1/2}$$

Из (1) и (14) определим функцию $u_y(x, 0)$ при $|x| \leq a$

$$(19) \quad u_y(x, 0) = (1-\nu)q_0G^{-1} \sqrt{a^2-x^2} (1-\kappa) \times \\ \times \left[\Omega_3\left(\frac{x}{a}\right) \cos \omega t + \Omega_4\left(\frac{x}{a}\right) \sin \omega t \right]$$

$$\Omega_3(r) = 1 - \lambda^{-2} (0.1226 r^2 - 0.5723 - 0.3679 \ln \lambda) - \lambda^{-4} (-0.006258 r^4 + 0.09212 + 0.06258 \ln \lambda) r^2 + 0.05052 - 0.3879 \ln \lambda - 0.1353 \ln^2 \lambda + O(\lambda^{-6} \ln^3 \lambda)$$

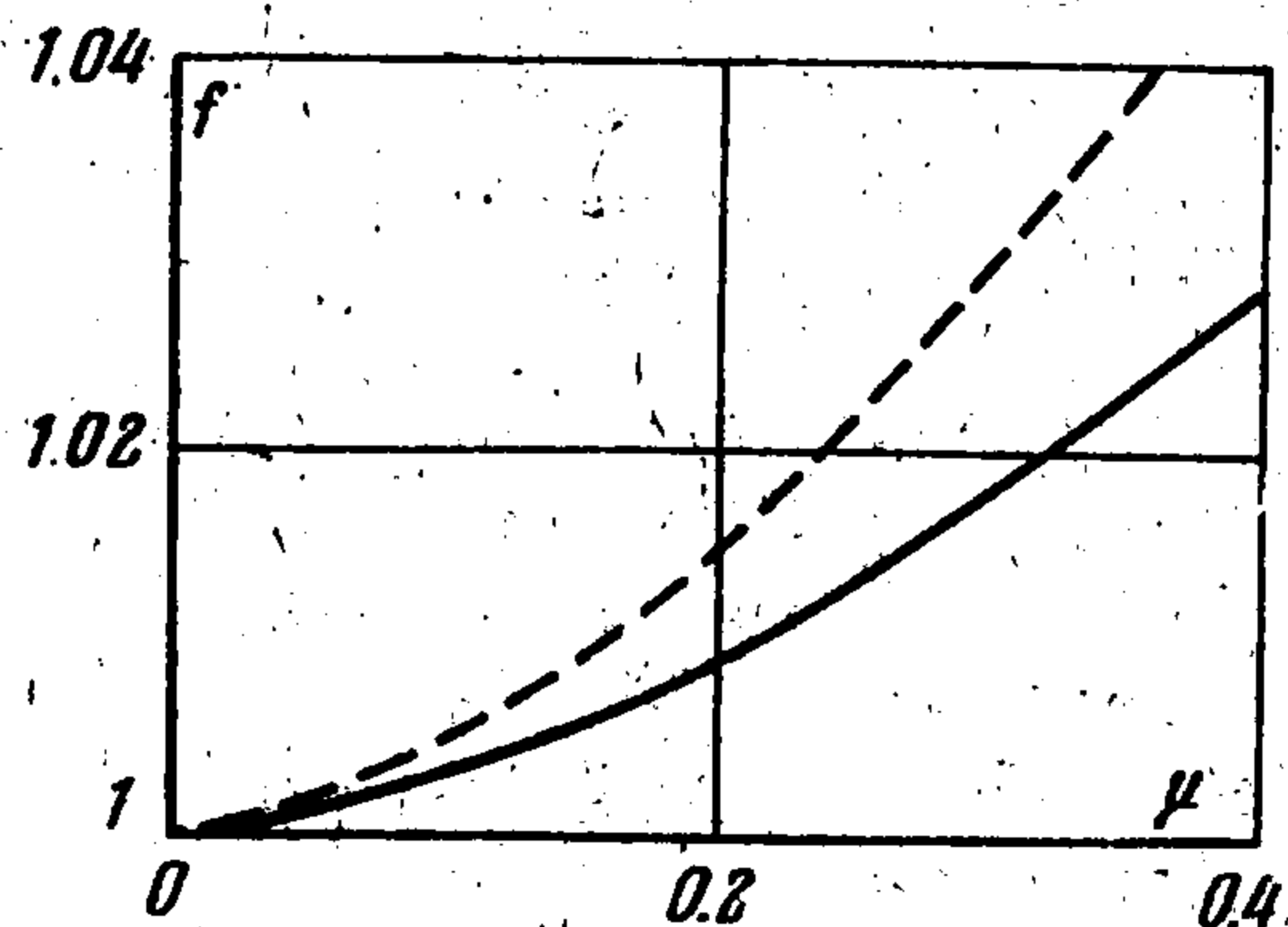
$$\Omega_4(r) = -0.5778 \lambda^{-2} - \lambda^{-4} (-0.09830 r^2 + 0.6093 + 0.4251 \ln \lambda) + O(\lambda^{-6} \ln^3 \lambda)$$

Функцию, характеризующую максимальные перемещения точек берегов разреза $u_*(x)$, получим из (19)

$$(20) \quad u_*(x) = (1-\nu)q_0G^{-1} \sqrt{a^2-x^2} \{1 + \kappa [\Omega_3^2(x/a) + \Omega_4^2(x/a)]^{1/2}\}$$

При $\omega \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$) из (18) и (20) получаем решение соответствующей статической задачи.

Как показали расчеты, полученные формулы (17) — (20) можно практически использовать при $2 \leq \lambda < \infty$. Приведенные на фиг. 1—3 сплошные кривые соответствуют значению $\kappa = 0.25$, штихорвые соответствуют значению $\kappa = 0.5$. На фиг. 1

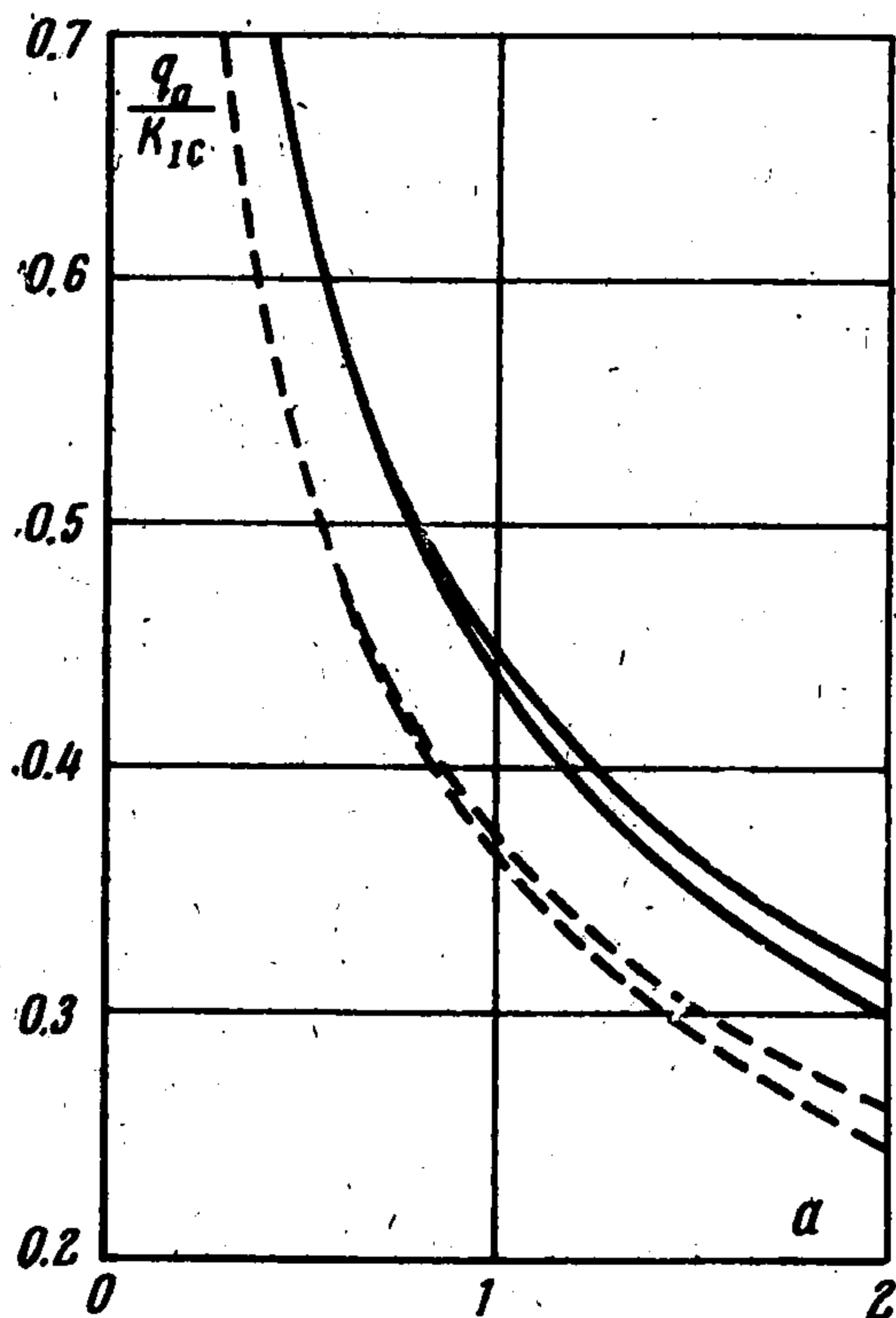


Фиг. 1

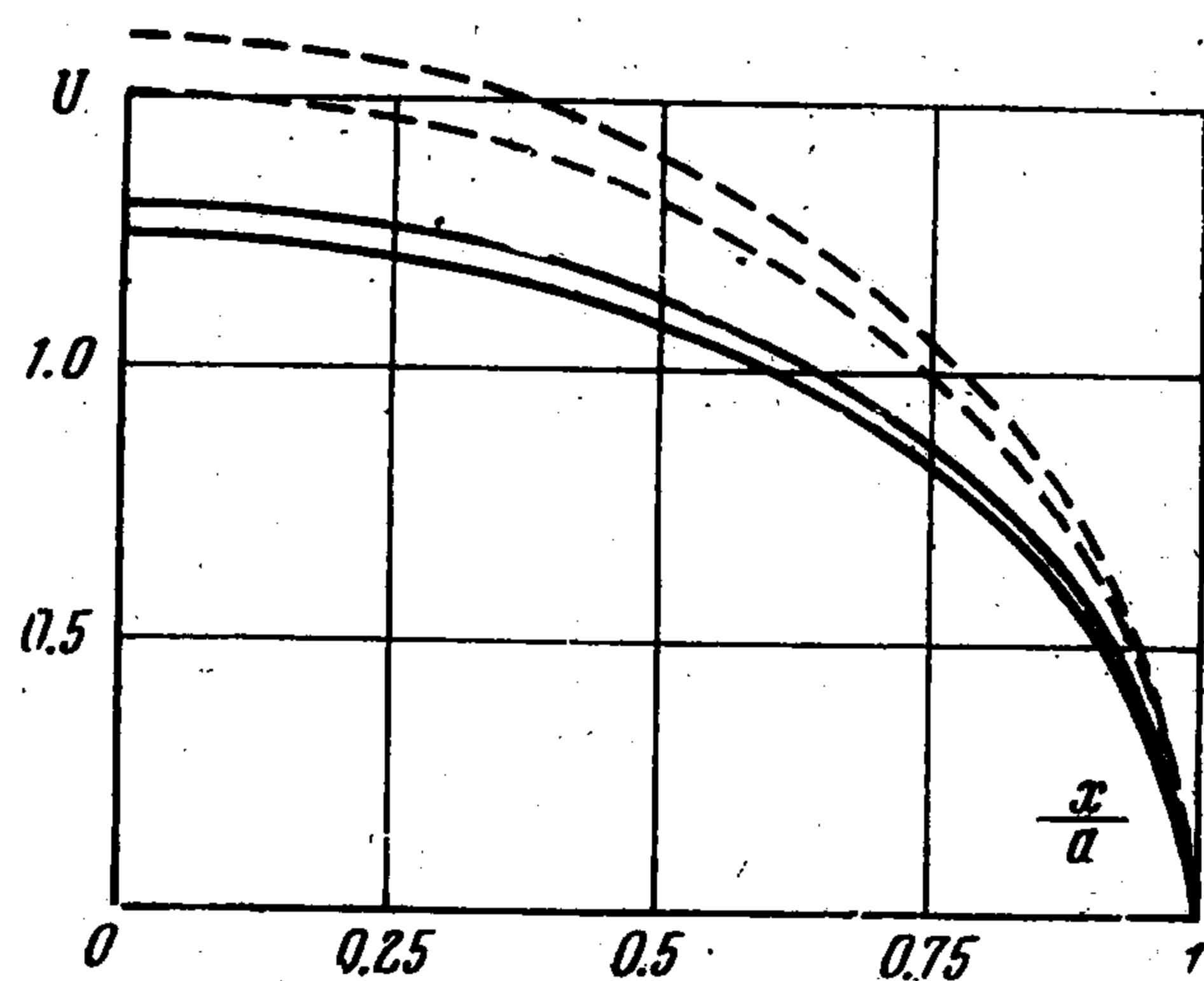
приведен график функции

$$f(\mu) = \frac{1 + \Omega_* \kappa}{1 + \kappa} = \frac{K_{Ic}}{q_0 (1 + \kappa) \sqrt{a\pi}} \quad \left(\mu = \frac{\omega a}{c_1}, \quad c_1 = \left(\frac{G}{\rho} \right)^{1/2} \right)$$

На фиг. 2 приведена зависимость величины q_0 / K_{Ic} от полудлины разреза a . Значения величины a даны в см, значения q_0 / K_{Ic} даны в $(см)^{-1/2}$. Верхняя сплошная и верхняя штриховая кривые соответствуют статическому случаю $\omega = 0$. Остальные



Фиг. 2



Фиг. 3

кривые соответствуют частоте $8 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$. При $a < 0.5$ все сплошные и штриховые кривые практически совпадают с соответствующими кривыми при $\omega = 0$. На фиг. 3 приведена зависимость функции $U = [(1 - \nu) q_0 G^{-1} a]^{-1} u_*(x)$ для $\mu = 0$ (нижняя сплошная и нижняя штриховая кривые) и $\mu = 0,5$ (остальные кривые). При вычислениях было принято: $c_1 = 3,2 \cdot 10^3 \text{ м/сек}$.

Поступила 26 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Динамическая задача для плоскости с разрезом. Докл. АН СССР, 1969, т. 185, № 3.
2. Александров В. М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.

Технический редактор Э. Ф. Бунова

Сдано в набор 25/XI-1974 г. Т-02034
Зак. 1407. Формат бумаги 70×103^{1/16}

Подписано к печати 27/I-1975 г.
Усл. печ. л. 16,8

Тираж 2835 экз.
Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 16,3

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10