адиабата имеет вид, приведенный на фиг. 2. Кривая $p_2(v_2)$ расположена ниже адиабаты Гюгонио. Начиная с точки B_1, давление p_2 отрицательно, а при $p_1 < -q(\gamma - 1)$ вся ветвь BD_1 расположена ниже оси $p = 0$ и не имеет физического смысла. Секущая, проведенная из точки $O\ (v_1, p_1 - q)$, так же как и в случае $q > 0$, позволяет определить поток массы через поверхность разрыва.

В точках C и D пересечения прямой, проходящей через точку O и параллельной касательной к адиабате Гюгонио в точке O_1, нормальная скорость перед разрывом u_{n1} равна скорости звука c_1. Выше точки C скорость $u_{n1} > c_1$, ниже — $u_{n1} < c_1$. В точке C выполняются следующие соотношения:

$$\frac{u_{n2}^2}{v_2^2} = \frac{c_1^2}{v_1^2} = \frac{\gamma p_1}{v_1} < \frac{\gamma p_2}{v_2} = \frac{c_2^2}{v_2^2}$$

Отсюда следует, что $u_{n2} < c_2$, а так как на этом участке dm^2 / dp_2 в нуль нигде не обращается, то это неравенство выполнено для всей ветви AC_1. Аналогично, на участке BD_1 скорость $u_{n2} > c_2$. Для значений q, удовлетворяющих неравенству (4), условия эволюционности выполняются на участке адиабаты CC_1. При выполнении неравенства $2p_1 + q(\gamma - 1) < 0$ функция $p_2(v_2)$ монотонно возрастает от $-\infty$ при $v_2 = v_1 / \varkappa$ до $p_2 = -(p_1 - q) / \varkappa$ при v_2, стремящемся к ∞ (фиг. 3). Таким образом, вся кривая $p_2(v_2)$ расположена ниже оси $p = 0$ и не имеет физического смысла.

Поступила 4 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Изд. 2. М., «Наука», 1973.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
3. *Тарапов И. Е.* Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред. В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 17. Изд-во Харьковск. ун-та, 1973.

УДК 532.5

ПРОДОЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

О. Г. Тайц

(Брянск)

Рассматривается продольное обтекание осесимметричного тела, когда часть обтекаемой поверхности неизвестна, а вместо этого здесь задается распределение касательных скоростей. Поток считается безвихревым, жидкость идеальной и несжимаемой. В критических точках поверхность может вести себя как шар, конус или острие. Выводится интегро-дифференциальное уравнение для нахождения формы свободной поверхности для произвольного задания скорости. В случае кавитационного обтекания предлагается метод решения этого уравнения с помощью неопределенных коэффициентов. Приводится аналитическая и графическая зависимость числа кавитации от угла раствора конуса и его относительной длины. Теория удовлетворительно подтверждается экспериментальными данными.

1. Постановка задачи. Пусть продольный безвихревой поток идеальной несжимаемой жидкости обтекает тонкое осесимметричное тело, уравнение поверхности которого $\rho = R(z)$ дается следующим образом:

$$(1.1)\qquad R(z)=\begin{cases} r_-(z), & -1<z<b\\ r(z)\text{ из условия } v_\tau = v_\tau(z), & b<z<c\\ r_+(z) & c<z<1\end{cases}$$

Участок (b, c), который задается распределением касательных скоростей $v_\tau(z)$, — свободная граница; участки $(-1, b)$ и $(c, 1)$ — участки твердой границы.

Задача сводится к нахождению уравнения свободной границы $r(z)$.

Будем считать, что обтекаемая поверхность удовлетворяет условиям:

1) функции $R^2(z)$ и $dR^2(z)/dz$ непрерывны и $R(-1) = R(1) = 0$;

2) функция $d^2R^2(z)/dz^2$ кусочно-непрерывна, с разрывами первого рода в точках b и c;

3) $R^2(z) < \varepsilon$, $\left|\frac{d^k}{dz^k}R^2(z)\right| < \varepsilon$, $k = 1,2,3$ (условия тонкости).

Условия, при которых уравнение свободной границы $r(z)$ удовлетворяет этим ограничениям, получены в работе [1] (кроме неравенства для третьей производной, которое здесь введено для упрощения некоторых выражений).

При достаточно малом ε потенциал продольного обтекания такого тела (скорость невозмущенного потока равна единице) дается приближенной формулой [2]

$$(1.2)\qquad \varphi(z,\rho) = z + \int_{-1}^{1} P(\zeta)\frac{z-\zeta}{[(z-\zeta)^2+\rho^2]^{3/2}}\,d\zeta + \Gamma(z,\rho)$$

$$(1.3)\qquad P(\zeta) = \frac{1}{4}R^2(\zeta)[1-\gamma(\zeta)],\quad \gamma(\zeta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_i^3}{[(\zeta-c_i)^2+R^2(\zeta)]^{3/2}}$$

Здесь ρ_1 и ρ_2 — радиусы кривизны поверхности в критических точках. Функции Γ и γ учитывают влияние закруглений в критических точках.

Проинтегрируем равенство (1.2) по частям, положим $\rho = r(z)$, продифференцируем по z и снова проинтегрируем по частям

$$(1.4)\qquad \int_{-1}^{1} P''(\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-z)^2+p}} - \frac{1}{2}\frac{p'}{p}\int_{-1}^{1}P'(\zeta)\frac{p}{[(\zeta-z)^2+p]^{3/2}}\,d\zeta + {} + [\varphi'(z)-1] = \Gamma'(z)$$

Здесь $p = r^2(z)$, $\varphi(z) = \varphi(z, r, (z))$, $\Gamma(z) = \Gamma(z, r, (z))$

Заметим, что функции $\Gamma(z)$ и $\gamma(\zeta)$ всюду, кроме критических точек, имеют порядок ε^3, и поэтому ими почти всегда можно пренебречь (интегралы имеют порядок ε). Влияние этих функций скажется лишь при обтекании со свободной границей шаров, когда нужно определить точку отрыва потока. Отсюда вытекает, что в промежутке (b, c) можно считать $P(\zeta) = {}^1/_4\, p(\zeta)$, что существенно упрощает вычисления.

Таким образом, уравнение свободной поверхности $\rho = r(z)$ с помощью равенства $r(z) = \sqrt{p(z)}$ определяется из нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.4), где функция $\varphi'(z)$ будет определена ниже.

2. Основное уравнение. Для упрощения уравнения (1.4) определим порядок малости каждого слагаемого в его левой части.

Первое слагаемое с помощью соотношений

$$(2.1)\qquad i(z) = \int_{-1}^{b} P_-''(\zeta)[(\zeta-z)^2+p]^{-1/2}d\zeta + \int_{c}^{1}P_+''(\zeta)[(\zeta-z)^2+p]^{-1/2}d\zeta$$

$$(2.2)\qquad \lambda(z) = P''(b)\ln\frac{|b-z|+\sqrt{(b-z)^2+p}}{2} + {} + P''(c)\ln\frac{c-z+\sqrt{(c-z)^2+p}}{2}$$

$$\ln\frac{x+\sqrt{x^2+p}}{2}=\begin{cases}\ln\frac{p}{4}-\ln\frac{|x|+\sqrt{x^2+p}}{2}, & x<0\\ \ln\frac{x+\sqrt{x^2+p}}{2}, & x>0\end{cases}$$

может быть переписано в виде

$$\int_{-1}^{1}\frac{P''(\zeta)\,d\zeta}{\sqrt{(\zeta-z)^2+p}}=-P''(z)\ln\frac{p}{4}+i(z)+\lambda(z)-$$
$$-\int_b^c P'''(\zeta)\operatorname{sgn}(\zeta-z)\ln\frac{|\zeta-z|+\sqrt{(\zeta-z)^2+p}}{2}\,d\zeta \tag{2.3}$$

Второе слагаемое (1.4), в условиях тонкого тела может быть записано в виде [2]

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}P'(\zeta)\frac{p\,d\zeta}{[(\zeta-z)^2+p]^{3/2}}=P'(z)\,[1+O(p\ln p)]$$

Остается рассмотреть последнее слагаемое

$$\varphi'(z)==v_\tau\sqrt{1+r'^2}=v_\tau+{}^1/_2v_\tau r'^2$$

Таким образом, основное соотношение (1.4) может быть записано в виде суммы с четким разделением слагаемых по порядку малости (с точностью до $p^2\ln p$ (величиной p под радикалом в правой части (2.3) пренебрегаем)

$$-P''(z)\ln\frac{p(z)}{4}-\int_b^c P'''(\zeta)\operatorname{sgn}(\zeta-z)\ln|\zeta-z|\,d\zeta+$$
$$+i(z)+\lambda(z)-\frac{P'(z)\,p'(z)}{p(z)}+\frac{1}{8}v_\tau\frac{p'^2(z)}{p(z)}+v_\tau-1=\Gamma'(z)$$

Это основное равенство позволяет найти уравнение свободной границы $r(z)==\sqrt{p(z)}$ при условии, что касательная скорость здесь равна v_τ. Здесь $P(z)==1/_4\,p(z)\,[1-\gamma)(z)]$, а функции $i(z)$, $\lambda(z)$, $\Gamma(z)$, $\gamma(z)$ определяются формулами (1.4), (2.1) и (2.2).

3. Кавитационное обтекание. Будем считать скорость на свободной границе постоянной $v_\tau=\sqrt{1+Q}$ (Q — число кавитации), так что при малых Q будем иметь $v_\tau=1+{}^1/_2\,Q$. Пренебрегая влиянием критических точек ($\Gamma=0$, $\gamma=0$), получим

$$-p''(z)\ln\frac{p(z)}{4}-\int_b^c p'''(\zeta)\operatorname{sgn}(\zeta-z)\ln|\zeta-z|\,d\zeta+$$
$$+\bar{i}(z)+\bar{\lambda}(z)-\frac{1}{2}\frac{p'^2}{p}+2Q=0 \tag{3.1}$$

$$\bar{i}(z)=\int_{-1}^{b}p_-''(\zeta)\,[(\zeta-z)^2+p]^{-1/2}d\zeta+\int_c^1 p_+''(\zeta)\,[(\zeta-z)^2+p]^{-1/2}d\zeta$$

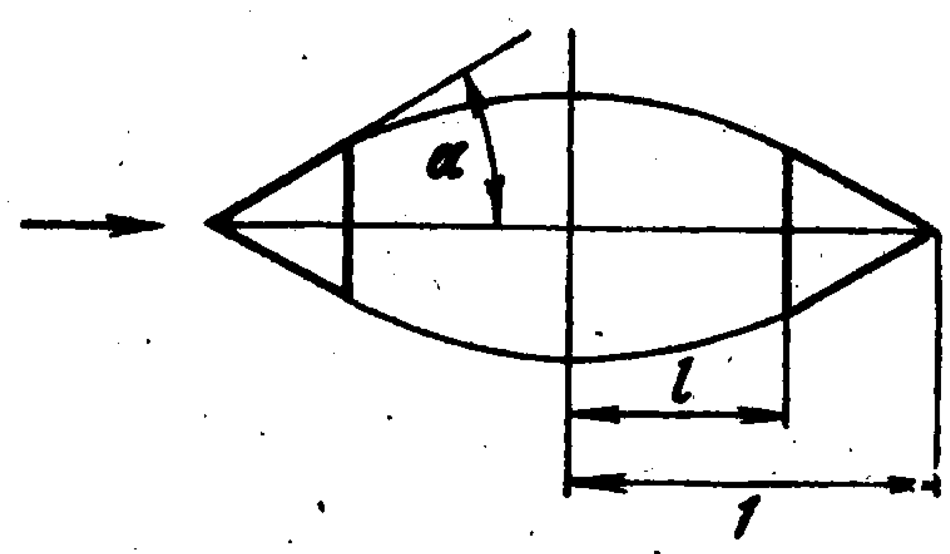
$$\bar{\lambda}(z)=p''(b)\ln\frac{|b-z|+\sqrt{(b-z)^2+p}}{2}+p''(c)\ln\frac{c-z+\sqrt{(c-z)^2+p}}{2}$$

Соотношение (3.1) позволяет найти форму свободной поверхности при струйном обтекании.

Если считать $|\ln p|\gg1$, так что в разложении (2.3) можно пренебречь функцией $\lambda(z)$ и определенным интегралом, то придем к уравнению, полученному в работе [3].

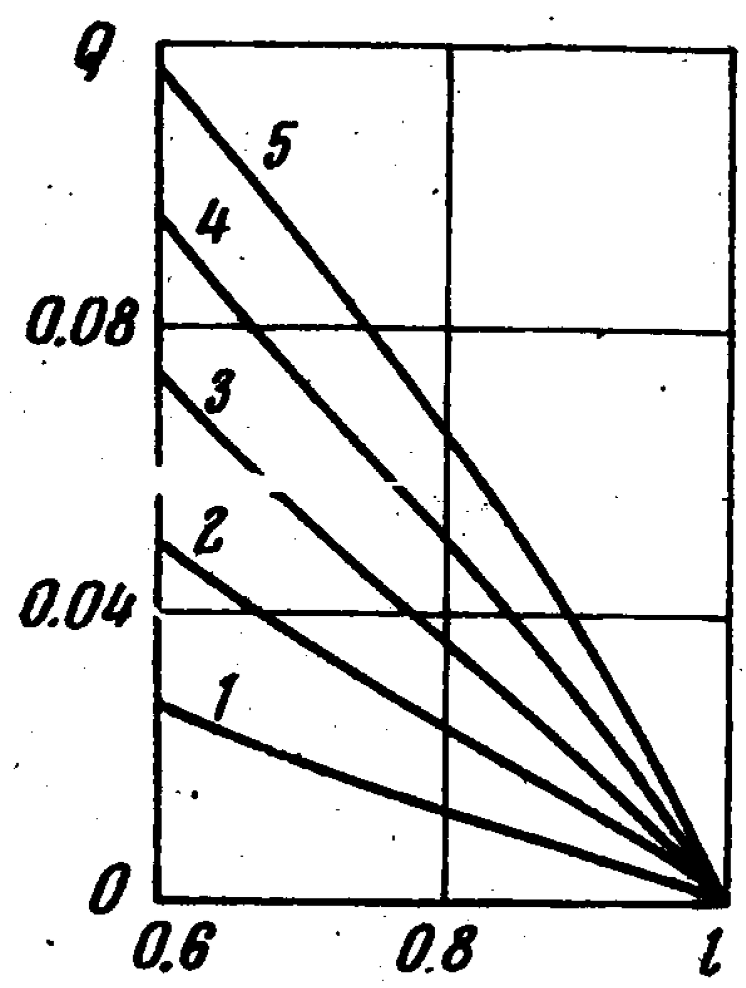
Решение уравнения (3.1) может быть получено способом неопределенных коэффициентов. Положим $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ и потребуем, чтобы основное уравнение (3.1) выполнялось в узлах $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$. Получим систему $n + 1$ уравнений с $n + 1$ неизвестными числами $a_0, a_1, \ldots, a_n$, нахождение которых позволит определить уравнение каверны $r(z) = \sqrt{p(z)}$.

Решение существенно упрощается для течения Рябушинского (случай симметрии относительно плоскости $z = 0$), когда в разложении остаются только четные степени z. Здесь можно использовать выражение



$$p(z) = p(l) + \frac{p'(l)}{2l}(z^2 - l^2) + \sum_{k=2}^{n} b_k (z^2 - l^2)^k$$

которое обеспечивает заданное значение функции $p(z)$ и ее производной в точках схода и входа струй ($z = \pm l$).



Для иллюстрации предложенной теории рассмотрено кавитационное обтекание конусов по схеме Рябушинского. В качестве свободного параметра взято число кавитации Q и найдена его зависимость от полудлины каверны l и тангенса угла полураствора конуса $k = \operatorname{tg} \alpha$. Для вычисления Q использовано уравнение (3.1) при $z = 0$. Результаты расчета представлены на фигуре. Сплошным кривым 1—5 соответствуют следующие значения k: 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3.

Если величина l близка к единице, что соответствует длинной (по сравнению с конусом) каверне, то можно рекомендовать формулу

$$Q = k^2 b \ln \frac{0.4}{k^2 b}, \quad b = \frac{1 - l}{l}, \quad k \leqslant 0.3$$

При $k = 0.268$ (угол раствора 30°) числа кавитации, подсчитанные по этой формуле, лишь на 4% отличаются от экспериментальных данных [4] (при условии, что длина реальной каверны равна $1 + l$).

Поступила 2 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тайц О. Г.* Обтекание тонкого осесимметричного тела с заданным распределением скоростей на части поверхности. Ж. прикл. механ. и техн. физ., 1968, № 1.
2. *Тайц О. Г.* Движение тонкого осесимметричного тела в несжимаемой жидкости под углом атаки. Вестн. ЛГУ, 1965, № 13.
3. *Якимов Ю. Л.* Об осесимметричном срывном обтекании тела вращения при малых числах кавитации. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
4. *Эпштейн Л. А., Блюмин В. И., Федюшин П. А.* Экспериментальное определение уноса газа и длины каверны за конусами. Тр. ЦАГИ, 1968, вып. 1100.