

лизации наименьшее [4]. Для тора это соответствует тому, что главные оси с наибольшим и наименьшим моментами инерции должны быть параллельны плоскости тора.

Автор благодарит В. И. Зубова и Е. П. Чурова за обсуждение работы.

Поступила 22 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1968.
2. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.—Л., Физматгиз, 1963.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
4. Смирнова Е. П. Стабилизация свободного вращения асимметрического волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.

УДК 538.4

УДАРНАЯ АДИАБАТА В НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ НЕПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Г. А. Шапошникова

(Москва)

Исследуются соотношения на разрывах в намагничивающихся непроводящих средах в магнитном поле. Магнитная проницаемость предполагается произвольной функцией магнитного поля, вообще говоря, различной с разных сторон от поверхности разрыва. Отмечается, что вклад членов, связанных с намагничиванием, в соотношения на разрыве существен и в том случае, когда магнитные проницаемости с обеих сторон от разрыва постоянные и не равные одна другой величины. Показано, что поведение ударной адиабаты существенно зависит от знака разностей магнитных проницаемостей до и после разрыва.

Соотношения на разрывах в механике сплошной среды с учетом электромагнитного поля, эффектов поляризации и намагничивания в общем виде выписаны в монографии [1]. Соотношения на разрывах в приближении феррогидродинамики и электрогидродинамики приведены в работах [2, 3].

В случае, когда магнитная проницаемость μ зависит только от магнитного поля, $\mu = \mu(H)$, так что, вообще говоря, функция μ_2 за разрывом не равна функции μ_1 перед разрывом, система соотношений на разрыве имеет вид

$$(1) \quad \{\rho u_n\} = 0, \quad \{p_0\} + m^2 \{v\} + \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_0^H \mu H dH \right\} = \frac{B_n^2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\mu} \right\}, \quad m = \rho u_n$$

$$m \{u_\tau\} = \frac{B_n}{4\pi} \{H_\tau\}, \quad B = \mu H, \quad p_0 = f(\rho, T)$$

$$m \left\{ \frac{v^2}{2} \right\} + \{w_0\} = 0, \quad \{H_\tau\} = 0, \quad \{B_n\} = 0, \quad \{a\} = a_2 - a_1$$

Здесь p_0, w_0 — давление и энтальпия в отсутствие магнитного поля; ρ, v, T — плотность, удельный объем и температура; u_τ, u_n — касательная и нормальная составляющие скорости среды в системе координат, в которой разрыв покоится. Индексами 1 и 2 обозначены параметры среды перед и за разрывом соответственно.

Из четвертого и восьмого уравнений (1) следует, что скачок касательной составляющей скорости равен нулю.

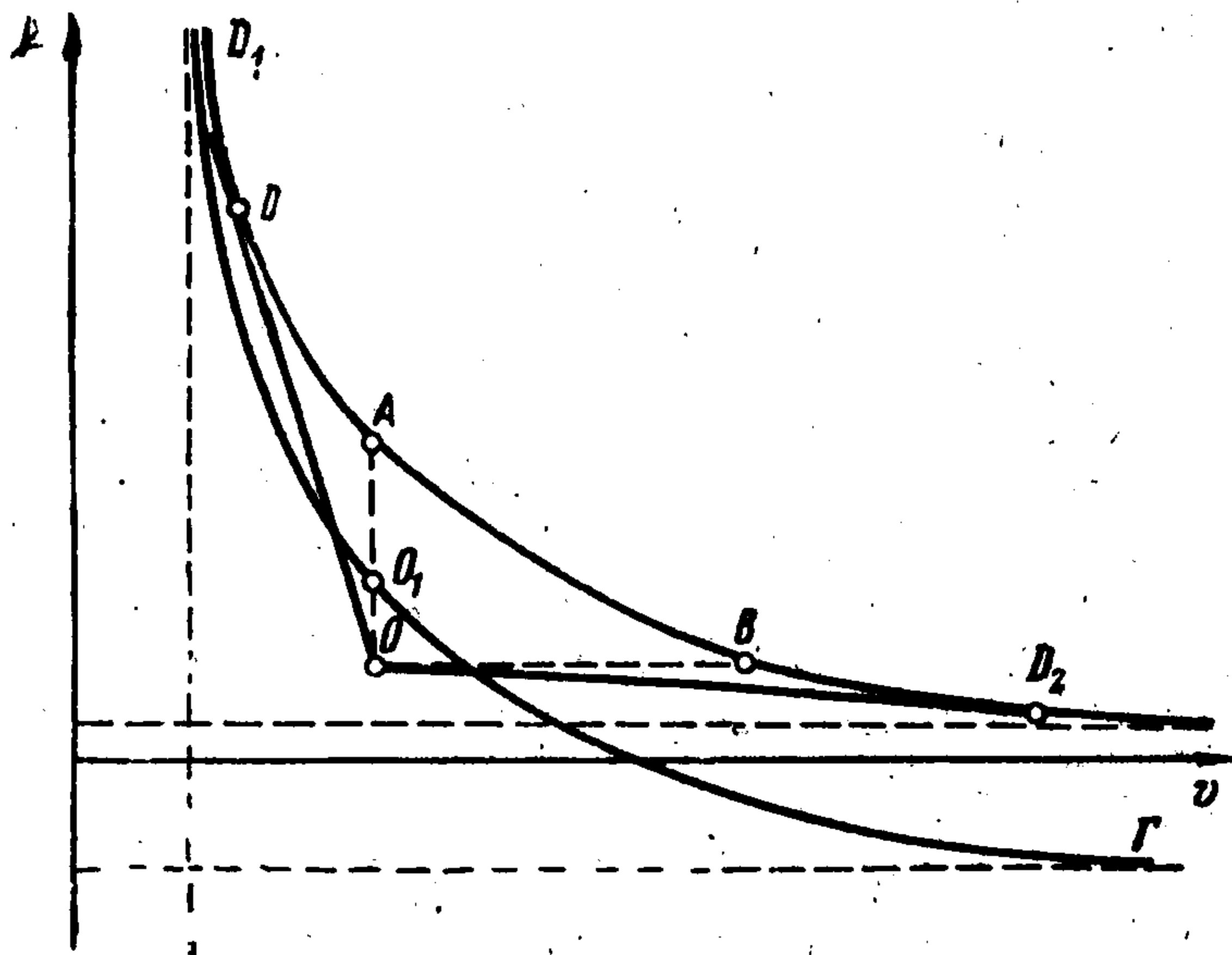
Из восьмого и девятого уравнений (1) можно определить магнитное поле за разрывом по заданному полю перед разрывом: В частном случае, когда магнитные проницаемости до и после разрыва постоянные, но не равные между собой величины, имеем $H_{\tau 2} = H_{\tau 1}$; $H_{n 2} = (\mu_1 / \mu_2) H_{n 1}$. Будем называть ударную волну волной размагничивания (намагничивания), если $\mu_2 < \mu_1$ ($\mu_2 > \mu_1$). Отметим, что магнитное поле за разрывом может быть найдено независимо от других параметров и в случае произвольной зависимости магнитной проницаемости от магнитного поля, плотности и температуры при распространении ударной волны размагничивания, в которой за разрывом магнитная проницаемость становится равной единице. При этом $H_{\tau 2} = H_{\tau 1}$, $H_{n 2} = \mu_1(\rho_1, T_1, H_1) H_{n 1}$.

Из второго, седьмого и восьмого уравнений (1) следует (2)

$$w_{02} - w_{01} = \frac{v_1 + v_2}{2} (p_{02} - p_{01} + q)$$

$$m^2 = \frac{p_{02} - p_{01} + q}{v_1 - v_2}$$

$$q = \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^H \mu H dH - \frac{B_n^2}{4\pi\mu} \right\}$$



Фиг. 1

Величина q — известная функция параметров до разрыва; знак q зависит от вида функции $\mu(H)$. Например, в случае, когда ударная волна разделяет два различных вещества, каждое из которых характеризуется своей постоянной магнитной проницаемостью $\mu_1 = \text{const}$ и $\mu_2 = \text{const}$, величина $q = (\mu_2 - \mu_1) [H_{\tau 1}^2 + (\mu_2 / \mu_1) H_{n 1}^2] / 8\pi$, так что для волн намагничивания $q > 0$, для волн размагничивания $q < 0$. В случае, когда $\mu(H)$ представляет собой ступенчатую функцию с разрывом в точке $H = H^*$, величина

$$q = (\mu_2 - \mu_1) \left[H_{\tau 1}^2 + \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{n 1}^2 + \frac{|\mu_2 - \mu_1|}{\mu_2 - \mu_1} H^{*2} \right]$$

и $q > 0$ как при $\mu_2 > \mu_1$, так и при $\mu_2 < \mu_1$.

Будем считать, что среда описывается уравнением состояния идеального газа, энтальпия $w_0 = \gamma p_0 v / (\gamma - 1)$; уравнение (2) дает следующее выражение для ударной адиабаты в плоскости pv :

$$(3) \quad p_2 = \frac{\kappa p_1 v_1 - p_1 v_2}{\kappa v_2 - v_1} + \frac{q(v_1 + v_2)}{\kappa v_2 - v_1}, \quad \kappa = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

Для сред с магнитной проницаемостью, не зависящей от температуры, энтропия среды совпадает с энтропией s_0 в отсутствие магнитного поля. Можно показать, что для ударной адиабаты в намагничивающихся непроводящих средах, так же как и в обычной газовой динамике, одновременно выполняются следующие соотношения: $dm^2 / dp_2 = 0$, $ds_2 / dp_2 = 0$, $u_{n 2} = c_2$ (c_2 — скорость звука в отсутствие магнитного поля).

Построим ударную адиабату для случая $q > 0$ (фиг. 1). Проведем через точку $O_1(v_1, p_1)$ адиабату Гюгонно. Ударная адиабата для намагничивающихся сред, описываемая уравнением (3), — гипербола с асимптотами

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{\kappa}, \quad \frac{p_2}{p_1} = -\frac{1}{\kappa} + \frac{q}{\kappa p_1}$$

проходит через точку $A(v_1, p_1 + q(\gamma - 1))$ и расположена выше адиабаты Г. Из второго уравнения (2) следует, что взятый с обратным знаком тангенс угла наклона

секущей к адиабате, проведенной из точки O с координатами $v_1, p_1 - q$, равен квадрату плотности потока массы. В точке D касания этой секущей адиабаты нормальная составляющая скорости среды за разрывом u_{n2} равна скорости звука c_2 , так как в этой точке $dm^2 / dp_2 = 0$.

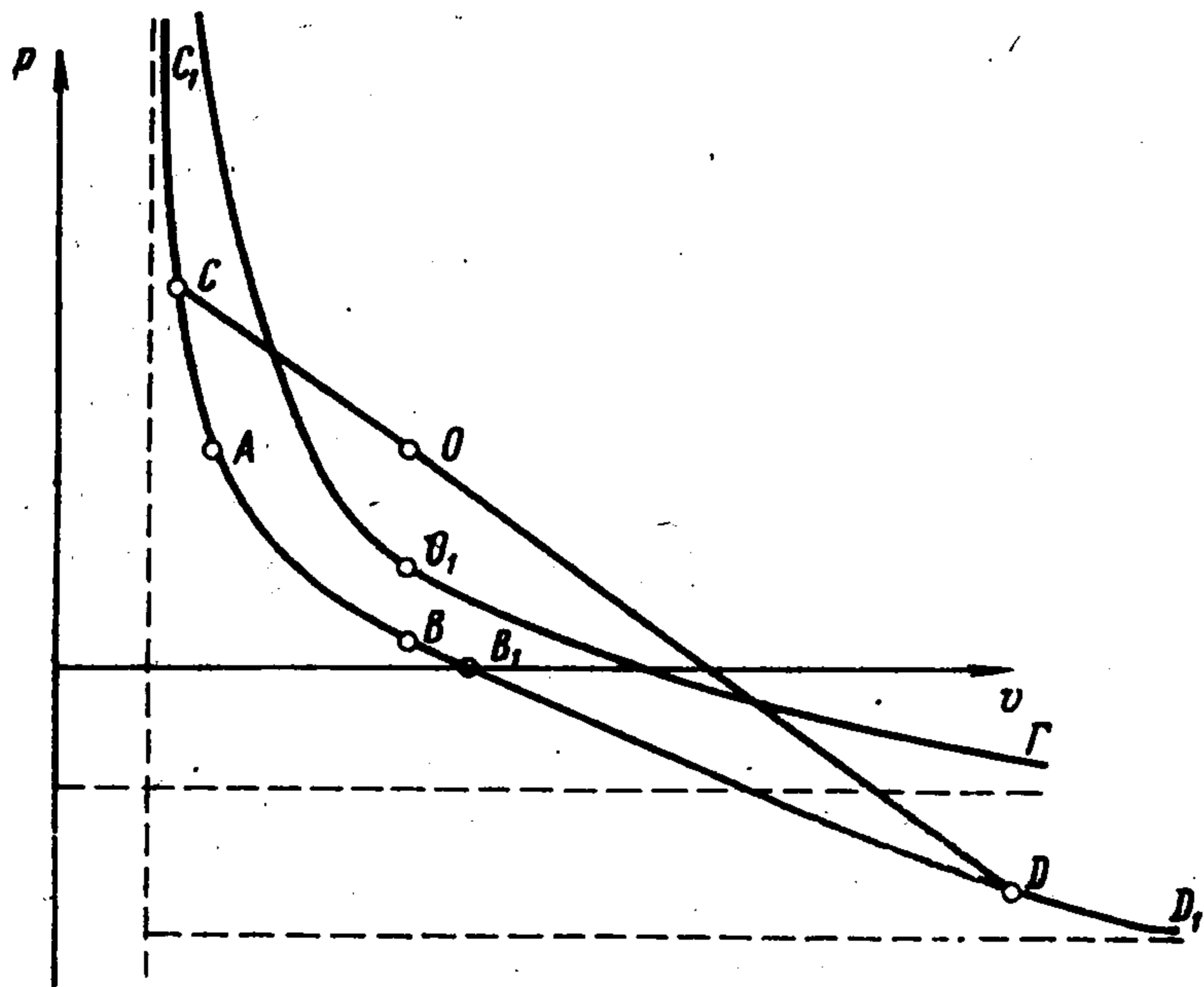
Покажем, что выше точки D скорость $u_{n2} < c_2$, а ниже — $u_{n2} > c_2$. Выясним знак производной

$$\frac{d(u_{n2}^2 - c_2^2)}{dv_2} = 2v_2 m^2 + v_2^2 \frac{dm_2^2}{dv_2} - \gamma v_2 \frac{dp_2}{dv_2} - \gamma p_2$$

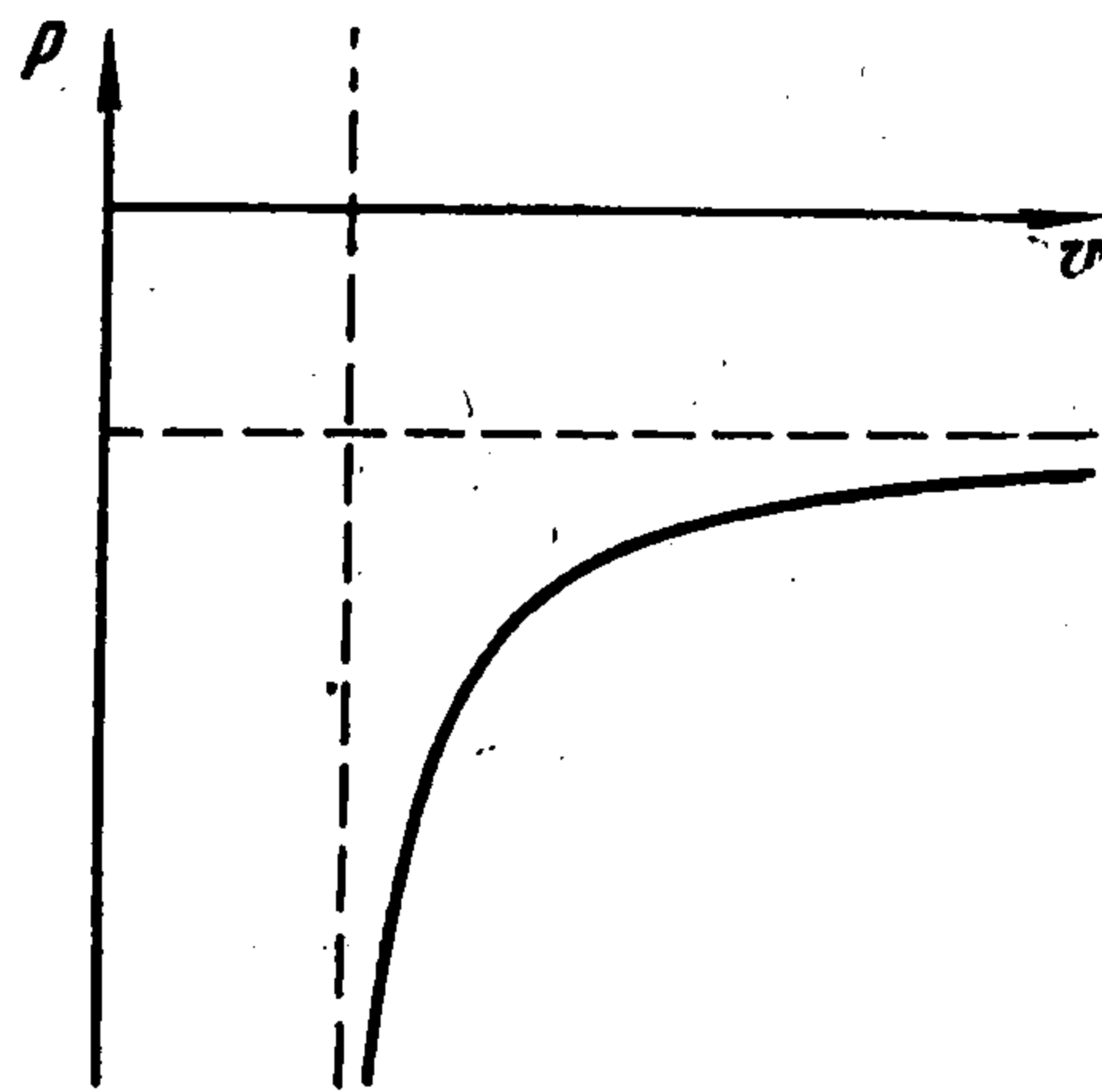
В окрестности точки D верны разложения $m^2 = c_2^2 / v_2^2 + o(v_2)$ и $dm^2 / dp_2 = o(v_2) dp_2 / dv_2$, при этом

$$d(u_{n2}^2 - c_2^2) / dv_2 = \gamma p_2 - (\gamma v_2 + o(v_2)) dp_2 / dv_2 + o(v_2)$$

В случае, когда $dp_2 / dv_2 < 0$, в окрестности точки D производная $d(u_{n2}^2 - c_2^2) / dp_2$ положительна, и следовательно, скорость $u_{n2} < c_2$ для $v_2 < v_D$ и $u_{n2} > c_2$ для $v_2 > v_D$. Эти неравенства сохраняются во всех точках кривой при $v_2 < v_1$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Участок кривой AB не имеет физического смысла, так как на нем $m^2 < 0$. При $p_1 - q \leq 0$ правая ветвь адиабаты опускается ниже оси $p = 0$, давление p_2 становится отрицательным, так что эта часть адиабаты также не имеет физического смысла. На участке AD_1 скорость $u_{n1} > c_1$ так как угол наклона секущей, проведенной из точки $O(v_1, p_1 - q)$ к адиабате, на этом участке всегда больше угла наклона касательной к адиабате Гюгонио в точке O_1 .

Таким образом, на участке DD_1 имеем $u_{n2} < c_2, u_{n1} > c_1$; на участке DA — скорость $u_{n2} > c_2, u_{n1} > c_1$; на участке BD_2 — скорость $u_{n2} > c_2, u_{n1} < c_1$; на участке D_2D_3 — скорость $u_{n2} > c_2, u_{n1} < c_1$. Для ударных волн в намагничивающихся непроводящих средах без дополнительных уравнений на поверхности разрыва, не вытекающих из законов сохранения, условиям эволюционности удовлетворяет только ветвь DD_1 .

Рассмотрим случай, когда $q < 0$. Производная

$$\frac{dp_2}{dv_2} = -v_1 \frac{2\gamma [2p_1 + q(\gamma - 1)]}{(\gamma - 1)^2 [kv_2 - v_1]^2}$$

может быть как положительной, так и отрицательной, в зависимости от этого вид кривых $p_2(v_2)$ будет существенно различен. При $p_1 = -q(\gamma - 1) / 2$ адиабата вырождается в прямую линию $p_2 = -p_1$. Для значений q , удовлетворяющих неравенству

$$(4) \quad 2p_1 + q(\gamma - 1) > 0$$

адиабата имеет вид, приведенный на фиг. 2. Кривая $p_2(v_2)$ расположена ниже адиабаты Гюгонио. Начиная с точки B_1 , давление p_2 отрицательно, а при $p_1 < -q(\gamma - 1)$ вся ветвь BD_1 расположена ниже оси $p = 0$ и не имеет физического смысла. Секущая, проведенная из точки $O(v_1, p_1 - q)$, так же как и в случае $q > 0$, позволяет определить поток массы через поверхность разрыва.

В точках C и D пересечения прямой, проходящей через точку O и параллельной касательной к адиабате Гюгонио в точке O_1 , нормальная скорость перед разрывом u_{n1} равна скорости звука c_1 . Выше точки C скорость $u_{n1} > c_1$, ниже — $u_{n1} < c_1$. В точке C выполняются следующие соотношения:

$$\frac{u_{n2}^2}{v_2^2} = \frac{c_1^2}{v_1^2} = \frac{\gamma p_1}{v_1} < \frac{\gamma p_2}{v_2} = \frac{c_2^2}{v_2^2}$$

Отсюда следует, что $u_{n2} < c_2$, а так как на этом участке dm^2/dp_2 в нуль нигде не обращается, то это неравенство выполнено для всей ветви AC_1 . Аналогично, на участке BD_1 скорость $u_{n2} > c_2$. Для значений q , удовлетворяющих неравенству (4), условия эволюционности выполняются на участке адиабаты CC_1 . При выполнении неравенства $2p_1 + q(\gamma - 1) < 0$ функция $p_2(v_2)$ монотонно возрастает от $-\infty$ при $v_2 = v_1/\kappa$ до $p_2 = -(p_1 - q)/\kappa$ при v_2 , стремящемся к ∞ (фиг. 3). Таким образом, вся кривая $p_2(v_2)$ расположена ниже оси $p = 0$ и не имеет физического смысла.

Поступила 4 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Изд. 2. М., «Наука», 1973.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
3. Тарапов И. Е. Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред. В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 17. Изд-во Харьковск. ун-та, 1973.

УДК 532.5

ПРОДОЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

О. Г. Тайц

(Брянск)

Рассматривается продольное обтекание осесимметричного тела, когда часть обтекаемой поверхности неизвестна, а вместо этого здесь задается распределение касательных скоростей. Поток считается безвихревым, жидкость идеальной и несжимаемой. В критических точках поверхность может вести себя как шар, конус или острие. Выводится интегро-дифференциальное уравнение для нахождения формы свободной поверхности для произвольного задания скорости. В случае кавитационного обтекания предлагается метод решения этого уравнения с помощью неопределенных коэффициентов. Приводится аналитическая и графическая зависимость числа кавитации от угла раствора конуса и его относительной длины. Теория удовлетворительно подтверждается экспериментальными данными.

1. Постановка задачи. Пусть продольный безвихревой поток идеальной несжимаемой жидкости обтекает тонкое осесимметричное тело, уравнение поверхности