УДК 531.36

О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ УСТОЙЧИВОСТИ С ДВУМЯ ФУНКЦИЯМИ ЛЯПУНОВА

Л. Хатвани

(Сегед, Венгрия)

С помощью функции Ляпунова со знакопостоянной производной анализируется вопрос об асимптотической устойчивости и о неустойчивости невозмущенного движения. Обобщаются две теоремы В. М. Матросова [1] для системы уравнений возмущенного движения, правые части которых неограниченно зависят от времени. Результаты сформулированы и относительно части переменных.

1. Пусть дана система уравнений возмущенного движения

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \qquad (\mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv 0) \tag{1.1}$$
$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n, \qquad \|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

где вектор-функция $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ определена и непрерывна на множестве

$$\Gamma = \{(t, \mathbf{x}) : t \geqq 0, \|\mathbf{x}\| < H\} \qquad (0 < H \leqq \infty)$$

и решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)$ при достаточно малых по норме начальных значениях $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0;\ t_0, \mathbf{x}_0)$ и $t_0 \geqq 0$ определены для $t \geqq t_0$.

Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$, $M \subset R^n$. Введем следующие обозначения:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \rho(\mathbf{x}, M) = \inf\{\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in M\}$$

Определение 1.1. [1]. Пусть $M \subset R^n$ и функция $U(t, \mathbf{x})$ определена и непрерывна на множестве

$$\Gamma' = \{(t, \mathbf{x}) : t \geqq 0, \|\mathbf{x}\| \leqq H'\} \qquad (0 < H' = \mathrm{const} < H)$$

Будем говорить, что определенно $U(t, \mathbf{x}) \neq 0$ на множестве $\{(t, \mathbf{x}) : (t, \mathbf{x}) \in \Gamma', \mathbf{x} \in M\}$, если для любых α_1, α_2 $(0 < \alpha_1 < \alpha_2 < H')$ существуют положительные числа $\beta_1(\alpha_1, \alpha_2) < \alpha_1$, $\beta_2(\alpha_1, \alpha_2)$ такие, что

$$|U(t, \mathbf{x})| \geqq \beta_2 \quad \text{при } (t, \mathbf{x}) \in \Gamma', \quad \alpha_1 \leqq \|\mathbf{x}\| \leqq \alpha_2$$
$$\rho(\mathbf{x}, M) \leqq \beta_1$$

Определение 1.2. Будем говорить, что непрерывная, неотрицательная на $[0, \infty)$ функция $\xi(t)$ принадлежит к классу F, если ее можно представить в виде $\xi(t) = \varphi(t) + \psi(t)$, где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны, неотрицательны; $\varphi(t)$ ограничена на $(0, \infty)$, а

$$\int_0^\infty \psi(t)\, dt < \infty$$

В дальнейшем обозначим через $V(t, \mathbf{x})$, $W(t, \mathbf{x})$ функции, непрерывные на множестве Γ вместе со своими частными производными по $x_1, \ldots, x_n, t$, а через $V^{\cdot}(t, \mathbf{x})$, $W^{\cdot}(t, \mathbf{x})$ производные этих функций по времени t в силу системы (1.1).

Теорема 1.1. Допустим, что функция

$$\xi(t) = \max\{|(\mathbf{x}, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}))| : \|\mathbf{x}\| \leqq H'\} \in F \tag{1.2}$$

и существуют функции $V(t, \mathbf{x})$, $W(t, \mathbf{x})$, обладающие на множестве Γ' следующими свойствами:

1) функция $V(t, \mathbf{x})$ определенно-положительна и допускает бесконечно малый высший предел;

2) существует функция $V_*(\mathbf{x})$, непрерывная при $\|\mathbf{x}\| \leqq H'$ и такая, что

$$V^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \leqq V_*(\mathbf{x}) \leqq 0$$

3) функция $W(t, \mathbf{x})$ ограничена, и определено $W^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \neq 0$ на множестве

$$E(V_* = 0) = \{(t, \mathbf{x}) : (t, \mathbf{x}) \in \Gamma', \ V_*(\mathbf{x}) = 0\}$$

Тогда невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво равномерно по $\mathbf{x}_0$.

Доказательство. При условиях (1) и 2) невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ устойчиво равномерно по t_0 [2], т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ следует $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при всяком $t \geqq t_0$ для всех $t_0 \geqq 0$. Из свойств асимптотической устойчивости и равномерной устойчивости следует асимптотическая устойчивость равномерная по $\mathbf{x}_0$ [2], поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить лишь свойство асимптотической устойчивости. Так как невозмущенное движение равномерно устойчиво, достаточно доказать, что для любых чисел
$\eta \ (0 < \eta < \varepsilon)$, $t_0 \geqq 0$, $\mathbf{x}_0 \ (\|\mathbf{x}_0\| < \delta(\varepsilon))$
найдется $T(\eta, t_0, \mathbf{x}_0)$ такое, что $\|\mathbf{x}(t_0 + T; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \delta(\eta)$.

Предположим, что это не так, т. е. существуют $\eta_* \ (0 < \eta_* < \varepsilon)$, $t_* \geqq 0$, $\mathbf{x}_* \ (\|\mathbf{x}_*\| < \delta(\varepsilon))$ такие, что

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_*, \mathbf{x}_*) \in H(\alpha, \varepsilon) = \{\mathbf{x} : \alpha = \delta(\eta_*) \leqq \|\mathbf{x}\| \leqq \varepsilon\}$$

при всяком $t \geqq t_*$. Тогда

а) по условию 3) существуют $\gamma > 0$, $\beta > 0$ такие, что

$$|W^{\cdot}(t, \mathbf{x})| \geqq \beta \quad \text{при } t \geqq 0, \ \mathbf{x} \in H(\alpha, \varepsilon) \cap \overline{S(\gamma)}$$

$$S(\gamma) = \{\mathbf{x} : \rho(\mathbf{x}, \{\mathbf{x} : V_*(\mathbf{x}) = 0\}) < \gamma\}$$

и на основании этого из $|W(t, \mathbf{x})| < K \ ((t, \mathbf{x}) \in \Gamma')$ следует, что точка $\mathbf{x}(t)$ не может постоянно оставаться в множестве $H(\alpha, \varepsilon) \cap \overline{S(\gamma)}$ в течение отрезка времени, равного $2K / \beta$;

б) $\nu = \max\{V_*(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in H(\alpha, \varepsilon) \setminus S(\gamma / 2)\} < 0$

следовательно, сумма длин отрезков времени, в течение которых точка $\mathbf{x}(t)$ остается в множестве $H(\alpha, \varepsilon) \setminus S(\gamma / 2)$, меньше $V(t_*, \mathbf{x}_*) / (-\nu)$.

В силу а) и б) существует последовательность чисел $0 \leqq t_1' < t_1'' < \ldots < t_k' < t_k'' < \ldots$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (t_k'' - t_k') < \infty \tag{1.3}$$

$$\rho(\mathbf{x}(t_k'), \{\mathbf{x} : V_*(\mathbf{x}) = 0\}) = \gamma/2, \quad \rho(\mathbf{x}(t_k''), \{\mathbf{x} : V_*(\mathbf{x}) = 0\}) = \gamma \tag{1.4}$$

При этом из условия (1.2) на основании (1.3) следует

$$\left| \|\mathbf{x}(t_k'')\|^2 - \|\mathbf{x}(t_k')\|^2 \right| \leqq \int_{t_k'}^{t_k''} \left| \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\|^2 \right| dt \leqq \tag{1.5}$$

$$\leqq 2 \int_{t_k'}^{t_k''} |(\mathbf{x}(t), \mathbf{X}(t, \mathbf{x}(t)))| \, dt \to 0, \quad k \to \infty$$

С другой стороны, используя (1.4), получим

$$\left| \|\mathbf{x}(t_k'')\|^2 - \|\mathbf{x}(t_k')\|^2 \right| \geqslant 2\alpha\gamma/2 = \alpha\gamma > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

что противоречит оценке (1.5).

Теорема доказана.

Замечание 1.1. Теорема 1.1 обобщает теорему В. М. Матросова [1], в которой вместо условия (1.2) предполагается ограниченность функции $\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x})\|$ на множестве Γ'.

Пример. Пусть имеется система уравнений возмущенного движения

$$(1.6)\qquad x^{\cdot} = -(1+\psi(t))x, \quad y^{\cdot} = x - y/2, \quad \int_0^\infty \psi(t)\,dt < \infty$$

где функция $\psi(t)$ непрерывна и неотрицательна на $[0, \infty]$.

Рассмотрим функции $V(x, y) = x^2 + y^2$ и $W(y) = y^2$.

Их производные в силу системы (1.6)

$$V^{\cdot}(t, x, y) = -2(1+\psi(t))x^2 + 2xy - y^2 \leqq -(x-y)^2 = V_*(x, y)$$
$$W^{\cdot}(x, y) = y(2x - y)$$

множество $E(V_* = 0) = \{(t, x, y) : t \geqq 0, x = y\}$, на нем определенно $y(2x - y) \neq 0$.

Применяя теорему 1.1, заключаем, что решение $x = y = 0$ системы (1.6) асимптотически устойчиво равномерно по (x_0, y_0).

Теорема 1.2. Пусть выполнено условие (1.2) и существуют функции $V(t, \mathbf{x})$, $W(t, \mathbf{x})$, обладающие на множестве Γ' следующими свойствами:

1) функция $V(t, \mathbf{x})$ допускает бесконечно малый высший предел и при любом значении $t_0 \geqq 0$ в сколь угодно малой окрестности $\mathbf{x} = 0$ можно указать точку $\mathbf{x}_0$ такую, что $V(t_0, \mathbf{x}_0) > 0$;

2) существует функция $V_*(\mathbf{x})$, непрерывная при $\|\mathbf{x}\| \leqq H'$ и такая, что $V^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \geqq V_*(\mathbf{x}) \geqq 0$;

3) функция $W(t, \mathbf{x})$ ограничена, и определенно $W^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \neq 0$ на множестве $E(V_* = 0)$.

Тогда невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) неустойчиво.

Доказательство. Предположим, что решение $\mathbf{x} = 0$ устойчиво, т. е. для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqq 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ следует $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при всяком $t \geqq t_0$. Зафиксируем $t_* \geqq 0$ и $\varepsilon > 0$. По условию 1) существует $\mathbf{x}_*$ ($\|\mathbf{x}_*\| < \delta(\varepsilon, t_*)$ такое, что $V(t_*, \mathbf{x}_*) > 0$. Рассмотрим движение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_*, \mathbf{x}_*)$.

Функция $V(t, \mathbf{x})$ допускает бесконечно малый высший предел, поэтому существует $\alpha > 0$ такое, что $V(t, \mathbf{x}) < V(t_* \mathbf{x}_*)$ при всех $\mathbf{x}$ ($\|\mathbf{x}\| < \alpha$) и $t \geqslant 0$. В силу условия 2) $V(t, \mathbf{x}(t)) \geqq V(t_*, \mathbf{x}(t_*)) = V(t_*, \mathbf{x}_*)$, следовательно, $\mathbf{x}(t) \in H(\alpha, \varepsilon)$ при всяком $t \geqq t_*$. Это приведет к противоречию так же, как в доказательстве теоремы 1.1.

Теорема доказана.

2. Результаты п. 1 можно сформулировать и для устойчивости по отношению к части переменных для определенности — по отношению к $x_1, \ldots, x_m$ ($m > 0$, $n = m + p$, $p \geqq 0$). Введем обозначения [3]

$$y_i = x_i, \quad Y_i(t, \mathbf{x}) = X_i(t, \mathbf{x}) \quad (i = 1, \ldots, m)$$
$$z_j = x_{m+j}, \quad Z_j(t, \mathbf{x}) = X_{m+j}(t, \mathbf{x}) \quad (j = 1, \ldots, p)$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m), \quad \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_p)$$

$$\|\mathbf{y}\| = \Big(\sum_{i=1}^m y_i^2\Big)^{1/2}, \quad \|\mathbf{z}\| = \Big(\sum_{j=1}^p z_i^2\Big)^{1/2}$$

$$E_z(t; t_0) = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} = \mathbf{z}(t; t_0, \mathbf{x}_0), \|\mathbf{x}_0\| \leqq H'\} \quad (t \geqq t_0 \geqq 0,\ 0 < H' < H)$$

$$\Gamma_y' = \{(t, \mathbf{x}) : t \geqq 0, \ \|\mathbf{y}\| \leqslant H', \mathbf{z} \in \bigcup_{t_0 \geqslant 0} \bigcup_{t \geqslant t_0} E_z(t; t_0)\}$$

Теорема 2.1. Допустим, что для любого $t_0 \geqq 0$ функция

$$(2.1)\qquad \xi(t; t_0) = \sup\{|(\mathbf{y}, \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}))| : \|\mathbf{y}\| \leqq H', \ \mathbf{z} \in E_z(t; t_0)\} \in F$$

и существуют функции $V(t, \mathbf{x})$, $W(t, \mathbf{x})$, обладающие на множестве Γ_y' следующими свойствами:

1) функция $V(t, \mathbf{x})$ y-определенно-положительна и допускает бесконечно малый высший предел по $\mathbf{y}$;

2) существует функция $V_*(\mathbf{y})$, непрерывная при $\|\mathbf{y}\| \leqq H'$ и такая, что $V^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \leqslant V_*(\mathbf{y}) \leqq 0$;

3) функция $W(t, \mathbf{x})$ ограничена, и определенно $W^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \neq 0$ на множестве

$$E(V_* = 0) = \{(t, \mathbf{x}) : (t, \mathbf{x}) \in \Gamma_y',\ V_*(\mathbf{y}) = 0\}$$

Тогда невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) асимптотически y-устойчиво равномерно по $\mathbf{x}_0$ [4].

Замечание 2.1. Теорема 2.1 обобщает теорему Пейффера [1], в которой вместо условия (2.1) предполагается ограниченность функции $\|\mathbf{Y}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})\|$ на множестве

$$E(t_0) = \{(t, \mathbf{x}) : t \geqq t_0,\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0),\ \|\mathbf{x}_0\| \leqq H'\}$$

при всяком $t_0 \geqq 0$.

Теорема 2.2. Допустим, что для любого $t_0 \geqq 0$ условие (2.1) выполнено и существуют функции $V(t, \mathbf{x})$, $W(t, \mathbf{x})$, обладающие на множестве Γ_y' следующими свойствами:

1) функция $V(t, \mathbf{x})$ допускает бесконечно малый высший предел по $\mathbf{y}$, и при любом $t_0 \geqslant 0$ в сколь угодно малой окрестности $\mathbf{x} = 0$ можно указать точку $\mathbf{x}_0$ такую, что $V(t_0, \mathbf{x}_0) > 0$;

2) существует функция $V_*(\mathbf{y})$, непрерывная при $\|\mathbf{y}\| \leqq H'$ и такая, что $V^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \geqq V_*(\mathbf{y}) \geqq 0$;

3) функция $W(t, \mathbf{x})$ ограничена и определенно $W^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \neq 0$ на множестве $E(V_* = 0)$.

Тогда невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) $\mathbf{y}$-неустойчиво.

Доказательства теоремы 2.1 и 2.2 представляют собой модификации соответствующих доказательств п. 1.

Замечание 2.2. Из анализа доказательств теорем видно, что теоремы остаются справедливыми, если расширить класс функции F (см. определение 1.2) следующим образом: непрерывная, неотрицательная на $[0, \infty]$ функция $\xi(t)$ принадлежит к классу F, если для любой бесконечной системы непересекающихся интервалов $\{(t_k', t_k'')\}_{k=1}^{\infty}$, имеющей меру $(t_1'' - t_1') + (t_2'' - t_2') + \ldots < \infty$, выполняется условие

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_k'}^{t_k''} \xi(t)\, dt = 0$$

3. Применение к механическим системам. Пусть даны уравнения нестационарной механической системы при действии потенциальных, гироскопических и диссипативных сил с полной диссипацией

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} q_j^{\cdot} + \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i^{\cdot}} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

$$T = T(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = {}^1/_2\,(A(\mathbf{q})\,\mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{q}^{\cdot}) \geqq {}^1/_2\,\mu\,\|\mathbf{q}^{\cdot}\|^2, \quad \mu = \mathrm{const} > 0$$

$$R = R(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = {}^1/_2(B(t, \mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{q}^{\cdot}) \geqq {}^1/_2\beta\,\|\mathbf{q}^{\cdot}\|^2, \quad \beta = \mathrm{const} > 0$$

$$\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in R^n, \quad \mathbf{q}^{\cdot} = (q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}) \in R^n.$$

где матрицы $A(\mathbf{q}) = [a_{ij}(\mathbf{q})]$, $B(t, \mathbf{q}) = [b_{ij}(t, \mathbf{q})]$ симметричны, а матрица $G(t, \mathbf{q}) = [g_{ij}(t, \mathbf{q})]$ кососимметрична $(i, j = 1, \ldots, n)$. Гироскопические коэффициенты g_{ij} и коэффициенты b_{ij} функции рассеяния предполагаются голоморфными функциями

---

[1] P e i f f e r K. La methode directe de Liapounoff appliquée à l'étude de la stabilite partielle. (Dissertation). Université Catholique de Louvain, 1968.

от $\mathbf{q}$ с непрерывными на $[0, \infty]$ коэффициентами. Коэффициенты a_{ij} и силовая функция $U(\mathbf{q})$ предполагаются голоморфными, причем

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{k=m}^{\infty} U_k(\mathbf{q}) \quad (m \geqslant 2), \quad U(0) = 0$$

где $U_k(\mathbf{q})$ — однородная функция степени k.

Теорема 3.1. Обозначим через $\lambda(t, \mathbf{q})$ наибольшее по абсолютной величине собственное значение симметричной матрицы $^1/_2[(G - B)A^{-1} - A^{-1}(G + B)]$. Допустим, что функция

$$\xi(t) = \max\{|\lambda(t, \mathbf{q})| : \|\mathbf{q}\| \leqq H'\} \in F, \quad 0 < H = \mathrm{const} \tag{3.2}$$

и существует функция $\zeta(t) \in C^1[0, \infty)$ такая, что

$$\zeta(t) \geqq \max\left\{\sum_{i,j=1}^{n} |g_{ij}(t, \mathbf{q}) - b_{ij}(t, \mathbf{q})| : \|\mathbf{q}\| \leqq H'\right\} \tag{3.3}$$

$$\left|\frac{d}{dt}\zeta(t)\right|[\zeta(t)]^{-2} < K \quad (t \geqq 0, \ K = \mathrm{const})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\zeta(t)}\, dt = \infty$$

Тогда

а) если силовая функция $U(\mathbf{q})$ определенно-отрицательна, и сумма

$$S = \sum_{k=m}^{\infty} kU_k(\mathbf{q})$$

знакоопределена, то невозмущенное движение $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$ системы (3.1) асимптотически устойчиво равномерно по $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0^{\cdot}\}$;

б) если функция $U(\mathbf{q})$ может принимать положительное значение в сколь угодно малой окрестности точки $\mathbf{q} = 0$ и сумма S знакоопределена, то невозмущенное движение $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$ системы (3.1) неустойчиво.

Доказательство. После перехода от переменных Лагранжа к переменным Гамильтона уравнение движения (3.1) имеем вид

$$q_i^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_i^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{p} = A(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot}, \quad H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T - U = (\mathbf{p}, A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p}) - U(\mathbf{q})$$

Из условия (3.2) следует выполнение условия (1.2) для системы (3.4).

Возьмем теперь функции

$$V(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = T - U, \ W(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = \frac{1}{\zeta(t)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} q_i$$

Их производные в силу системы (3.4)

$$V^{\cdot}(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = -2R \leqq -\beta\|\mathbf{q}^{\cdot}\|^2$$

$$W^{\cdot}(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = \frac{1}{\zeta(t)}\Bigg[2T + (G\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) + (\mathrm{grad}\, U, \mathbf{q}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} q_i \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i^{\cdot}}\right)\Bigg] - \frac{\zeta^{\cdot}(t)}{[\zeta(t)]^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} q_i$$

На множестве $E(\beta\,\|\,\mathbf{q}^{\cdot}\,\|^2=0)$

$$\zeta(t)\,W^{\cdot}(t,\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot})=\sum_{k=m}^{\infty}kU_k(\mathbf{q})$$

$$E(\beta\,\|\,\mathbf{q}^{\cdot}\,\|^2=0)=\{(t,\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot}):t\geqq 0,\|\,\mathbf{q}\,\|\leqq H',\mathbf{q}^{\cdot}=0\}$$

Пользуясь знакоопределенностью этой функции и условием (3.3), заключаем, что для любых α_1, α_2 $(0<\alpha_1<\alpha_2<H')$ существует $\beta(\alpha_1,\alpha_2)>0$ такое, что

$$\int_0^{\infty}\min\{\,|\,W^{\cdot}(t,\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot})\,|:\alpha_1^2\leqq\|\,\mathbf{q}\,\|^2+\|\,\mathbf{q}^{\cdot}\,\|^2\leqq\alpha_2,\|\,\mathbf{q}^{\cdot}\,\|\leqq\beta\}\,dt=\infty$$

По пункту а) доказательства теоремы 1.1 видно, что теоремах 1.1 и 1.2 этим свойством можно заменить свойство определенности $W^{\cdot}\neq 0$ на множестве $E(\beta\,\|\,\mathbf{q}^{\cdot}\,\|^2=0)$ (см. [1]). Поэтому теорема 3.1 является следствием результатов параграфа 1.

В заключение автор благодарит В. В. Румянцева, под руководством которого выполнена работа.

Поступила 25 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матросов В. М.* Об устойчивости движения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
3. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
4. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
5. *Salvadori L.* Una generalizazzione di alcuni teoremi di Matrosov. Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 4. 1970, t. 84, p. 83—93.

УДК 531.36

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ БОЛЬШОЙ ВЯЗКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ТОРЕ

Е. П. Смирнова

(Ленинград)

Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в тороидальной полости внутри волчка, вращающегося с произвольной угловой скоростью и угловым ускорением. Полученные результаты позволяют указать такое положение тороидальной трубки с вязкой жидкостью относительно осей инерции волчка, которое уменьшает время стабилизации движения волчка.

1. Постановка задачи. Для движения твердого тела с полостями, целиком заполненными вязкой жидкостью, было показано [1], что в первом приближении по числу Рейнольдса $R=l^2/T\nu\ll 1$ и при больших временах $t>l^2/\nu$ вклад относительного движения жидкости в момент импульса системы твердое тело — жидкость не зависит от начального движения жидкости и может быть представлен в виде

$$\mathbf{L}=-\frac{\rho}{\nu}\sum_{i,j=1}^{3}P_{ij}\varepsilon_i(t)\,\mathbf{e}^{(j)},\qquad P_{ij}=-\int_V\mathbf{e}^{(j)}[\mathbf{r},\boldsymbol{\zeta}^{(i)}]\,dV \tag{1.1}$$