УДК 531.31

МНОГОЧАСТОТНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Б. И. Чешанков (София)

Многочастотные колебания в системах с большим числом степеней свободы рассматривались в работах [1, 2]. Ниже исследуются многочастотные колебания систем более конкретного вида, и задача сводится к изучению канонических систем дифференциальных уравнений, описывающих резонансные явления.

1. Рассмотрим консервативную систему с n степенями свободы, которая имеет устойчивое положение равновесия и совершает относительно малые движения в его окрестности. На эту систему действуют N возмущений, которые не изменяют равновесия и не выводят движение системы вне его окрестности. Будем рассматривать их как обобщенные координаты (с индексом большим n), которые являются заданными функциями времени. Эти координаты формально входят в выражения для кинетической и потенциальной энергии (т. е. считается, что условная система с $n+N$ координатами консервативная). Принимаем еще, что, из-за определенной внутренней симметрии в системе, выражения для кинетической и потенциальной энергии симметричны относительно всех $n+N$ обобщенных координат. Тогда

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n+N} A_{ik}\dot q_i\dot q_k,\qquad A_{ik}=a_{ik}+\frac{1}{2}\sum_{j,\,s=1}^{n+N} a_{ik}^{(js)}q_jq_s+\ldots \tag{1.1}$$

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n+N} c_{ik}q_iq_k+\frac{1}{24}\sum_{i,\,k,\,j,\,s=1}^{n+N} c_{ik}^{(js)}q_iq_kq_jq_s+\ldots\qquad (c_{ik}=c_{ki},\ c_{ik}^{(js)}=c_{jk}^{(is)}=\ldots,\ldots)$$

Предположим, что указанная в скобках симметрия коэффициентов в выражении для Π имеет место также и для коэффициентов выражения для T, т. е.

$$a_{ik}=a_{ki},\qquad a_{ik}^{(js)}=a_{jk}^{(is)}=\ldots,\ldots \tag{1.2}$$

Это предположение, не ограничивая общности результатов, приводит к более простым и симметричным отношениям.

Из (1.1) с использованием (1.2) и с учетом того, что q_i при $i=n+1,\ldots,n+N$ — известные функции времени, получим дифференциальные уравнения движения.

Пусть все возмущения гармонические с частотами $p_j(j=1,2,\ldots,N)$. Тогда в уравнениях движения положим (ε — малый положительный параметр)

$$q_k=\varepsilon^{1/2}q_k',\qquad k=1,2,\ldots,n,\qquad q_{n+j}=\varepsilon^{1/2}H_j\cos(p_jt-\psi_j),\qquad j=1,2,\ldots,N$$

Опуская штрихи, получим с точностью до членов третьего порядка

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot q_k+c_{ik}q_k)=\sum_{k=1}^{N}(a_{i,\,n+k}p_k^2-c_{i,\,n+k})H_k\cos(p_kt-\psi_k)-\varepsilon F_i^*,\qquad i=1,2,\ldots,n \tag{1.3}$$

$$F_i^*=\sum_{k,\,j,\,s=1}^{n}\left[\frac{1}{2}a_{ik}^{(js)}(q_kq_j\ddot q_s+q_k\dot q_j\dot q_s)+\frac{1}{6}c_{ik}^{(js)}q_kq_jq_s\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,\,j=1}^{n}\sum_{s=1}^{N}H_s\{\cos(p_st-\psi_s)[a_{ik}^{(j,\,n+s)}(2q_k\ddot q_j-p_s^2q_kq_j+\dot q_k\dot q_j)+$$

$$+c_{ik}^{(j,\,n+s)}q_kq_j]-\sin(p_st-\psi_s)a_{ik}^{(j,\,n+s)}p_sq_k\dot q_j\}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j,\,s=1}^{N}H_jH_s\times$$

$$\times \{\cos [p_j + p_s) t - \psi_j - \psi_s] [a_{ik}^{(n+j, n+s)} (q_k^{\cdot\cdot} - 2p_s^2 q_k - p_j p_s q_k) + c_{ik}^{(n+j, n+s)} q_k] +$$
$$+ \cos [(p_j - p_s) t - \psi_j + \psi_s] [a_{ik}^{(n+j, n+s)} (q_k^{\cdot\cdot} - 2p_s^2 q_k + p_j p_s q_k) +$$
$$+ c_{ik}^{(n+j, n+s)} q_k] - 2a_{ik}^{(n+j, n+s)} p_j q_k^{\cdot} [\sin ((p_j + p_s) t - \psi_j - \psi_s) +$$
$$+ \sin ((p_j - p_s) t - \psi_j + \psi_s)]\} + \frac{1}{24} \sum_{k, j, s=1}^{N} H_k H_j H_s \{[c_{i, n+k}^{(n+j, n+s)} -$$
$$- (p_k^2 + p_j^2 + p_s^2 + p_k p_j - p_j p_s - p_s p_k) a_{i, n+k}^{(n+j, n+s)}] \cos [(p_k + p_j - p_s) t -$$
$$- \psi_k - \psi_j + \psi_s] + [c_{i, n+k}^{(n+j, n+s)} - (p_k^2 + p_j^2 + p_s^2 + p_k p_j + p_j p_s + p_s p_k) \times$$
$$\times a_{i, n+k}^{(n+j, n+s)}] \cos [(p_k + p_j + p_s) t - \psi_k - \psi_j - \psi_s]\}$$

Резонанс в системе (1.3) имеет место, когда выполняется (точно или приближенно) одно из равенств

$$\sum_{i=1}^{n} q_i^{(k)} \omega_i + \sum_{j=1}^{N} s_j^{(k)} p_j = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

где $\omega_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ — собственные частоты линейной части системы (1.3), $q_i^{(k)}$, $s_j^{(k)}$ — целые числа (некоторые из них могут быть и нулями).

Здесь рассматривается резонанс, обусловленный членами третьей степени в системе (1.3), т. е. резонанс третьего ранга.

Пусть в рассматриваемой системе имеем m-частотные колебания с частотами $\omega_1 \leqq \omega_2 \ldots \leqq \omega_m$, $m \leqq n$.

Далее будем считать, что

$$a_{i, n+k} p_k^2 - c_{i, n+k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots N \tag{1.4}$$

В конце работы будет показано, что если эти соотношения не выполняются, то выкладки более громоздкие, однако качественно новых результатов в изучении резонансных явлений не получается. Это, в частности, показано в работе [3] в случае одночастотных колебаний с одним внешним возмущением.

2. Ищем решение системы (1.3) в виде

$$q_k = \sum_{s=1}^{m} L_k^{(s)} A_s \cos (\omega_s t - \varphi_s) + \varepsilon q_{k1} + \varepsilon^2 q_{k2} + \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots n \tag{2.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \omega_s^2 a_{ik}) L_k^{(s)} = 0 \quad i, s = 1, 2, \ldots, n \tag{2.2}$$

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} L_i^{(j)} L_k^{(s)} = 0, \quad \sum_{i, k=1}^{n} c_{ik} L_i^{(j)} L_k^{(s)} = 0, \quad j \neq s \tag{2.3}$$

Здесь A_s, φ_s — медленно меняющиеся функции времени, $q_{k1}, \ldots$ — относительно быстро меняющиеся функции A_s, φ_s и времени, которые дополняют основное решение. Функции $L_k^{(s)}$ $(k, s = 1, 2, \ldots n)$ определяются из алгебраических систем (2.2) и обладают свойством ортогональности (2.3).

Для исследований многочастотных решений системы (1.3) обобщим одно дополнение Струбля [4, 5] к существующим асимптотическим методам в теории нелинейных колебаний [6].

Подставим (2.1) в (1.3), умножим i-е уравнение на $L_i^{(r)}$ $r = 1, 2, \ldots m$ и сложим все уравнения. С учетом (2.3) получим

$$(A_r^{\cdot\cdot} + 2\omega_r A_r \varphi_r^{\cdot} - A_r \varphi_r^{\cdot 2}) \cos (\omega_r t - \varphi_r) + (A_r \varphi_r^{\cdot\cdot} - 2\omega_r A_r^{\cdot} +$$
$$+ 2A_r^{\cdot} \varphi_r^{\cdot}) \sin (\omega_r t - \varphi_r) + \frac{\varepsilon}{m_r} \sum_{i, k=1}^{n} L_i^{(r)} (a_{ik} q_{k1}^{\cdot\cdot} + c_{ik} q_{k1}) = -\frac{\varepsilon}{m_r} F_r \tag{2.4}$$

Здесь

$$m_r = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} L_i^{(r)} L_k^{(r)} > 0$$

$$F_r = \frac{1}{24} \sum_{j,\,s,\,u=1}^{m} A_j A_s A_u \{3\bar{g}_{rj}^{(su)} (\omega_j, \omega_s, -\omega_u) \cos [(\omega_j + \omega_s - \omega_u) t - \varphi_j -$$
$$- \varphi_s + \varphi_u] + \bar{g}_{rj}^{(su)} (\omega_j, \omega_s, \omega_u) \cos [(\omega_j + \omega_s + \omega_u) t - \varphi_j - \varphi_s - \varphi_u]\} +$$
$$+ \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{N} \sum_{s,\,u=1}^{m} H_j A_s A_u \{2\bar{g}_{r,\,n+j}^{(su)} (\omega_s, -\omega_u, p_j) \cos [(\omega_s - \omega_u + p_j) t -$$
$$- \varphi_s + \varphi_u - \psi_j] + \bar{g}_{r,\,n+j}^{(su)} (\omega_s, \omega_u - p_j) \cos [(\omega_s + \omega_u - p_j) t - \varphi_s - \varphi_u +$$
$$+ \psi_j] + \bar{g}_{r,\,n+j}^{(su)} (\omega_s, \omega_u, p_j) \cos [(\omega_s + \omega_u + p_j) t - \varphi_s - \varphi_u - \psi_j]\} +$$
$$+ \frac{1}{84} \sum_{j,\,s=1}^{N} \sum_{u=1}^{m} H_j H_s A_u \{2\bar{g}_{r,\,n+j}^{(n+s,\,u)} (p_j, \omega_u - p_s) \cos [(\omega_u + p_j - p_s) t - \varphi_u -$$
$$- \psi_j + \psi_s] + \bar{g}_{r,\,n+j}^{(n+s,\,u)} (p_j, p_s, -\omega_u) \cos [(p_j + p_s - \omega_u) t - \psi_j - \psi_s + \varphi_u +$$
$$+ \bar{g}_{r,\,n+j}^{(n+s,\,u)} (p_j, p_s, \omega_u) \cos [(p_j + p_s + \omega_u) t - \psi_j - \psi_s - \varphi_u]\} +$$
$$+ \frac{1}{24} \sum_{j,\,s,\,u=1}^{N} H_j H_s H_u \{3\bar{g}_{r,\,n+j}^{(n+s,\,n+u)} (p_j, p_s, -p_u) \cos [(p_j + p_s - p_u) t - \psi_j -$$
$$- \psi_s + \psi_u] + \bar{g}_{r,\,n+j}^{(n+s,\,n+u)} (p_j, p_s, p_u) \cos [(p_j + p_s + p_u) t - \psi_j - \psi_s - \psi_u]\}$$

$$\bar{g}_{ru}^{(sv)} (\omega_u, \omega_s, \omega_v) = g_{ru}^{(sv)} - (\omega_u^2 + \omega_s^2 + \omega_v^2 + \omega_u\omega_s + \omega_s\omega_v + \omega_v\omega_u)\, h_{ru}^{(sv)}$$

$$h_{ru}^{(pv)} = \sum_{i,\,k,\,j,\,s=1}^{n} a_{ik}^{(js)} L_i^{(r)} L_k^{(u)} L_j^{(p)} L_s^{(v)}, \qquad g_{ru}^{(pv)} = \sum_{i,\,k,\,s,\,j=1}^{n} c_{ik}^{(js)} L_i^{(r)} L_k^{(u)} L_j^{(p)} L_s^{(v)}$$

$$h_{ru}^{(p,\,n+s)} = \sum_{i,\,k,\,j=1}^{n} a_{ik}^{(j,\,n+s)} L_i^{(r)} L_k^{(u)} L_j^{(p)}, \qquad g_{ru}^{(p,\,n+s)} = \sum_{i,\,k,\,j=1}^{n} c_{ik}^{(j,\,n+s)} L_i^{(r)} L_k^{(u)} L_j^{(p)}$$

$$h_{ru}^{(n+j,\,n+s)} = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}^{(n+j,\,n+s)} L_i^{(r)} L_k^{(u)}, \qquad g_{ru}^{(n+j,\,n+s)} = \sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik}^{(n+j,\,n+s)} L_i^{(r)} L_k^{(u)}$$

$$h_{r,\,n+u}^{(n+j,\,n+s)} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,\,n+u}^{(n+j,\,n+s)} L_i^{(r)}, \qquad g_{r,\,n+u}^{(n+j,\,n+s)} = \sum_{i=1}^{n} c_{i,\,n+u}^{(n+j,\,n+s)} L_i^{(r)}$$

Из полученной системы следует, что резонанс третьего ранга возможен, если для каждого ω_r можно найти $\omega_s, \omega_j, \omega_u, \ldots, p_s, p_j, p_u, \ldots$, так что выполняется (точно или приближенно) одно из равенств

(2.5)
$$\pm\omega_r = \omega_j + \omega_s - \omega_u, \quad \omega_r = \omega_{j_1} + \omega_{s_1} + \omega_{u_1}$$
$$\pm\omega_r = \omega_{s_2} - \omega_{u_2} + p_j, \quad \pm\omega_r = \omega_{s_3} + \omega_{u_3} - p_{j_1}, \quad \omega_r = \omega_{s_4} + \omega_{u_4} + p_{j_2}$$
$$\pm\omega_r = \omega_{u_5} + p_{j_3} - p_s, \quad \pm\omega_r = p_{j_4} + p_{s_1} - \omega_{u_6}, \quad \omega_r = \omega_{u_7} + p_{j_5} + p_{s_2}$$
$$\pm\omega_r = p_{j_6} + p_{s_3} - p_u, \quad \omega_r = p_{j_7} + p_{s_4} + p_{u_1}$$

Число возможных резонансов ограничено, хотя и очень велико.

Среди первых равенств (2.4) есть тривиальные, т. е. равенства

(2.6) $$\omega_r = \omega_r + \omega_s - \omega_s, \qquad s = 1, 2, \ldots m$$

За исключением равенств (2.6) первые равенства (2.5) определяют существование внутреннего резонанса. Такой случай m-частотных колебаний третьего ранга для консервативной системы с n степенями свободы рассматривался в [7]. Здесь же будем считать, что в системе (1.3) внутреннего резонанса нет, т. е. из первых двух равенств (2.5) выполняются только равенства вида (2.6), и резонанс появляется только из-за внешних возмущений. В случаях, когда это условие нарушается, надо объединить результаты данной работы и работы [7].

3. Пусть среди частот $\omega_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ равных нет. Тогда возможны следующие шесть основных случаев резонанса.

Первый основной случай характеризуется тем, что в равенствах, определяющих резонанс, участвует только одна частота и получаются самые простые канонические системы.

Здесь можно выделить несколько подслучаев.

А. Пусть $p_r \approx 3\omega_r$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$. Здесь, как и в аналогичных случаях ниже, будем считать, что других зависимостей, ведущих к удовлетворению равенств (2.5), нет.

Используя тождество

$$\cos[(p_r - 2\omega_r)t - \psi_r + 2\varphi_r] = \cos\lambda_r \cos(\omega_r t - \varphi_r) - \sin\lambda_r \times$$
$$\times \sin(\omega_r t - \varphi_r) \quad (\lambda_r = (p_r - 3\varphi_r)t - \psi_r + 3\varphi_r)$$

и сравнивая соответствующие члены перед $\cos(\omega_r t - \varphi_r)$ и $\sin(\omega_r t - \varphi_r)$ в системе (2.4), находим

$$A^{\cdot\cdot}_r + 2\omega_r A_r \varphi^{\cdot}_r - A_r \varphi^{\cdot 2}_r = -\frac{\varepsilon}{m_r}\left\{\frac{1}{8}\bar{g}^{(rr)}_{rr}(\omega_r, \omega_r - \omega_r) A_r^3 + \right. \tag{3.1}$$
$$+ \frac{1}{4}\sum_{s=1}^{m}{}' \bar{g}^{(ss)}_{rr}(\omega_r, \omega_s, -\omega_s) A_r A_s^2 + \frac{1}{42}\sum_{s=1}^{N} \bar{g}^{(rr)}_{n+s, n+s}(\omega_r, p_s, -p_s) A_r H_s^2 +$$
$$\left. + \frac{1}{84}\bar{g}^{(rr)}_{r, n+r}(\omega_r, \omega_r, -p_r) H_r A_r^2 \cos\lambda_r \right\}, \qquad A_r \varphi^{\cdot\cdot}_r - 2\omega_r A^{\cdot}_r + 2A^{\cdot}_r \varphi^{\cdot}_r =$$
$$= \frac{\varepsilon}{m_r}\frac{1}{84}\bar{g}^{(rr)}_{r, n+r}(\omega_r, \omega_r, -p_r) H_r A_r^2 \sin\lambda_r, \qquad r = 1, 2, \ldots, m$$

где штрих после знака суммы означает, что слагаемое, соответствующее $s = r$, опущено.

Из (3.1), учитывая выражение для λ_r с точностью до членов порядка ε, получаем автономную систему

$$dA_r / \varepsilon dt = -H_r^\circ A_r^2 \sin\lambda_r, \qquad r = 1, 2, \ldots, m \tag{3.2}$$

$$\frac{d\lambda_r}{\varepsilon dt} = 2m_r^\circ H_r^\circ + 3H_r^\circ \alpha_{rr} A_r^2 + 6H_r^\circ \sum_{s=1}^{m}{}' \alpha_{sr} A_s^2 - 3H_r^\circ A_r \cos\lambda_r$$

$$2m_r^\circ H_r^\circ = \frac{p_r - 3\omega_r}{\varepsilon} + 3H_r^\circ \sum_{s=1}^{N} \beta_{sr} H_s^2, \qquad \overline{H}_r = \frac{1}{16 m_r \omega_r}\bar{g}^{(rr)}_{r, n+r}(\omega_r \omega_r, -p_r) H_r$$

$$H_r^\circ \alpha_{sr} = -\frac{1}{16 m_r \omega_r}\bar{g}^{(ss)}_{rr}(\omega_r, \omega_s, -\omega_s), \qquad H_r^\circ \beta_{sr} = -\frac{1}{8 m_r \omega_r} g^{(r, n+s)}_{r, n+s}(\omega_r, p_s, -p_s)$$

Система (3.2) дает полное представление о всех движениях для рассматриваемого резонансного случая. Такие системы будем называть каноническими.

После сравнения остальных членов в (2.4) находим m уравнения для q_{k+1} $(k = 1, 2, \ldots n)$. Остальные $n - m$ уравнений получаются из (1.3) после аналогичных преобразований. Согласно методу Крылова — Боголюбова, нахождение указанных функций относятся ко второму приближению, эти уравнения здесь не рассматриваем.

Б. Пусть $\omega_r \approx 3p_r$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$. Используя указанный выше метод, получаем каноническую систему

$$dA_r/\varepsilon dt = H_r^0 \sin\lambda_r, \qquad r = 1, 2, \ldots, m \tag{3.3}$$

$$d\lambda_r/\varepsilon dt = 2m_r^\circ H_r^\circ - \alpha_{rr} H_r^\circ A_r^2 - 2H_r^\circ \sum_{s=1}^{N}{}' \alpha_{sr} A_s^2 + \frac{H_r^\circ}{A_r}\cos\lambda_r$$

$$2m_r^\circ H_r^\circ = \frac{\omega_r - 3p_r}{\varepsilon} - H_r^\circ \sum_{s=1}^{N} \beta_{sr} H_r^2, \qquad H_r^\circ = \frac{1}{16 m_r \omega_r} \bar{g}_{r,n+r}^{(n+r,\,n+r)}(p_r, p_r, p_r)\, H_r^3$$

$$\lambda_r = (\omega_r - 3p_r)t - \varphi_r + 3\psi_r$$

К этому подслучаю можно причислить следующие:

$$\omega_r \approx 2p_{2r-1} \pm p_{2r}, \qquad \omega_r \approx p_{3r-2} \pm p_{3r-1} \pm p_{3r}, \quad r = 1, 2, \ldots, m$$

Здесь опять получается каноническая система (3.3) с некоторыми изменениями в обозначениях.

4. Второй основной случай определяется зависимостями, в которых участвуют две частоты ω_i. Здесь тоже выделяются несколько подслучаев.

А. Выполняются равенства

$$\omega_{2r-1} \approx 2\omega_{2r} - p_r, \qquad \omega_{2r} \approx -\omega_{2r} + \omega_{2r-1} + p_r, \qquad r = 1, 2, \ldots, m$$

Ясно, что теперь имеем $2m$-частотные колебания $(2m \leqq n)$. Получаем

$$\frac{d\mathring{A}_{2r-1}}{\varepsilon\, dt} = -H_r^\circ A_{2r}^{\circ 2} \sin\lambda_r; \qquad \frac{dA_{2r}^\circ}{\varepsilon\, dt} = 2H_r^\circ A_{2r}^\circ \mathring{A}_{2r-1} \sin\lambda_r \tag{4.1}$$

$$\frac{d\varphi_{2r-1}}{\varepsilon dt} = \alpha_{2r-1,\,2r-1} \mathring{A}_{2r-1}^{2} + 2\sum_{s=1}^{2m}{}' \alpha_{s,\,2r-1} A_s^{\circ 2} + \sum_{s=1}^{m} \beta_{s,\,2r-1} H_s^2 - \frac{H_r^\circ A_{2r}^{\circ 2}}{\mathring{A}_{2r-1}}\cos\lambda_r$$

$$\frac{d\varphi_{2r}}{\varepsilon dt} = \alpha_{2r,\,2r} A_{2r}^{\circ 2} + 2\sum_{s=1}^{2m}{}' \alpha_{s,\,2r} A_s^{\circ 2} + \sum_{s=1}^{m} \beta_{s,\,2r} H_s^2 - 2H_r^\circ \mathring{A}_{2r-1}\cos\lambda_r$$

$$\lambda_r = (2\omega_{2r} - p_r - \omega_{2r-1})\, t - 2\varphi_{2r} + \psi_r + \varphi_{2r-1}$$

$$H_s^{\circ 2} = A_s^2 m_s \omega_s, \qquad H_r^\circ = \frac{1}{16}\bar{g}_{2r-1,\,2r}^{(2r,\,n+r)}(\omega_{2r}, \omega_{2r}, -p_r)\, H_r\, (m_{2r-1}\omega_{2r-1})^{-1/2} (m_{2r}\omega_{2r})^{-1}$$

$$\alpha_{sk} = -\frac{g_{kk}^{(ss)}(\omega_k, \omega_s, -\omega_s)}{16 m_k \omega_k m_s} = \alpha_{ks}, \qquad \beta_{sk} = \frac{\bar{g}_{kk}^{(n+s;\,n+s)}(\omega_k, p_s, -p_s)}{84 m_k \omega_k}$$

Первые два уравнения (4.1) имеют интеграл ($\varkappa^2$ — постоянная интегрирования)

$$2\mathring{A}_{2r-1}^{2} + A_{2r}^{\circ 2} = \varkappa^2 \tag{4.2}$$

Учитывая выражение для λ_r и (4.2), находим каноническую систему

$$\frac{d\mathring{A}_{2r-1}}{\varepsilon dt} = -H_r^\circ(\varkappa^2 - 2\mathring{H}_{2r-1}^{2})\sin\lambda_r, \quad r = 1, 2, \ldots, m \tag{4.3}$$

$$\frac{d\lambda_r}{\varepsilon dt} = 2m_r^\circ + 4\mathring{a}_{2r-1,\,2r-1} \mathring{A}_{2r-1}^{2} + 2\sum_{s=1}^{2m}{}'' a_{sr}^\circ A_s^{\circ 2} - \frac{H_r^\circ}{\mathring{A}_{2r-1}}(\varkappa^2 - 6\mathring{A}_{2r-1}^{2})\cos\lambda_r$$

$$2m_r^\circ = \frac{2\omega_{2r} - p_r - \omega_{2r-1}}{\varepsilon} + \sum_{s=1}^{m} (\beta_{s,\,2r} - 2\beta_{s2r-1}) H_s^2 + 2(\alpha_{2r,\,2r-1} - \alpha_{2r,\,2r})\varkappa^2$$

$$4\mathring{a}_{2r-1,\,2r-1} = \alpha_{2r-1,\,2r-1} - 8\alpha_{2r-1,\,2r} + 4\alpha_{2r,\,2r}$$

$$a_{sr}^\circ = \alpha_{s,\,2r-1} - 2\alpha_{s,\,2r}, \qquad s \neq 2r-1, 2r; \quad a_{sr}^\circ \neq a_{rs}^\circ$$

Здесь два штриха у знака суммы означают, что слагаемые с индексами $2r-1$ и $2r$ опущены.

Б. Выполняются равенства

$$\omega_{2r-1} \approx 2p_r - \omega_{2r}, \quad \omega_{2r} \approx 2p_r - \omega_{2r-1} \quad r = 1, 2, \ldots, m$$

Аналогично подслучаю А получаем каноническую систему ($\varkappa$ — постоянная интегрирования)

$$(4.4) \qquad \frac{d\overset{\circ}{A}_{2r-1}}{\varepsilon dt} = -H_r{}^\circ (\overset{\circ 2}{A}_{2r-1} - \varkappa)^{1/2} \sin \lambda_r, \quad r = 1, 2, \ldots, m$$

$$\frac{d\lambda_r}{\varepsilon dt} = 2m_r{}^\circ + 4\overset{\bullet}{a}_{2r-1,2r-1}\overset{\circ 2}{A}_{2r-1} + 2\sum_{s=1}^{2m}{}'' a_{sr}{}^\circ A_s{}^{\circ 2} - \frac{H_r{}^\circ(-\varkappa + 2\overset{\circ 2}{A}_{2r-1})}{\overset{\circ}{A}_{2r-1}(\overset{\circ 2}{A}_{2r-1} - \varkappa)^{1/2}} \cos \lambda_r$$

$$2m_r{}^\circ = \frac{2p_r - \omega_{2r} - \omega_{2r-1}}{\varepsilon} + \sum_{s=1}^{m} (\beta_{s,2r-1} + \beta_{s,2r}) H_s{}^2 - (\alpha_{2r,2r} + 2\alpha_{2r,2r-1})\varkappa$$

$$H_r{}^\circ = \frac{1}{16}\bar{g}_{2r-1,2r}^{(n+r,n+r)}(p_r, p_r - \omega_{2r}) H_r{}^2 (m_{2r}\omega_{2r} m_{2r-1}\omega_{2r-1})^{1/2}$$

$$\lambda_r = (2p_r - \omega_{2r-1} - \omega_{2r}) t - 2\psi_r + \varphi_{2r-1} + \varphi_{2r}$$

$$4\overset{\circ}{a}_{2r-1,2r-1} = \alpha_{2r-1,2r-1} + 4\alpha_{2r,2r-1} + \alpha_{2r,2r}$$

$$a_{sr}{}^\circ = \alpha_{s,2r-1} + \alpha_{s,2r}, \quad s \neq 2r-1, 2r, \quad a_{sr}{}^\circ \neq a_{rs}{}^\circ$$

Подслучаи, определяемые равенствами

$$\pm\omega_{2r} \approx 2\omega_{2r-1} \pm p_r, \quad \omega_{2r-1} \approx -\omega_{2r-1} \pm \omega_{2r} \mp p_r, \quad r = 1, 2, \ldots m$$

можно отнести либо к подслучаю А, либо к подслучаю Б, учитывая только некоторое изменение в обозначениях.

Подслучаи А и Б существенно различаются. Интеграл (4.2) характерен для внутреннего резонанса. Оказывается, что внешние возмущения производят специфический резонанс, имеющий некоторые общие черты с внутренним резонансом.

В. Выполняются равенства

$$\omega_{2r-1} \approx \omega_{2r} + p_{2r-1} - p_{2r}, \quad \omega_{2r} \approx \omega_{2r-1} + p_{2r} - p_{2r-1}, \quad r = 1, 2, \ldots, m$$

Каноническая система для этого подслучая имеет вид

$$(4.5) \qquad d\overset{\circ}{A}_{2r-1}/\varepsilon dt = -H_r{}^\circ (\varkappa^2 - \overset{\circ 2}{A}_{2r-1})^{1/2} \sin \lambda_r, \quad r = 1, 2, \ldots, m$$

$$\frac{d\lambda_r}{\varepsilon dt} = 2m_r{}^\circ + 4\overset{\bullet}{a}_{2r-1,2r-1}\overset{\circ 2}{A}_{2r-1} + 2\sum_{s=1}^{2m}{}'' a_{sr}{}^\circ A_s{}^{\circ 2} - \frac{H_r{}^\circ(\varkappa^2 - 2\overset{\circ 2}{A}_{2r-1})}{\overset{\circ}{A}_{2r-1}(\varkappa^2 - \overset{\circ 2}{A}_{2r-1})^{1/2}} \cos \lambda_r$$

$$m_r{}^\circ = \frac{\omega_{2r} + p_{2r-1} - \omega_{2r-1} - p_{2r}}{\varepsilon} + \sum_{s=1}^{m} (\beta_{s,2r-1} - \beta_{s,2r}) H_s{}^2 + (2\alpha_{2r,2r-1} - \alpha_{2r,2r})\varkappa^2$$

$$H_r{}^\circ = \frac{1}{24}\bar{g}_{2r,2r-1}^{(n+2r,n+2r-1)}(\omega_{2r}, p_{2r-1}, -p_{2r} - p_{2r}) H_{2r} H_{2r-1} (\omega_{2r} m_{2r} \omega_{2r-1} m_{2r-1})^{1/2}$$

$$\lambda_r = (\omega_{2r} + p_{2r-1} - \omega_{2r-1} - p_{2r}) t - \varphi_{2r} - \psi_{2r-1} + \varphi_{2r-1} + \psi_{2r}$$

$$4\overset{\circ}{a}_{2r-1,2r-1} = \alpha_{2r-1,2r-1} - 4\alpha_{2r-1,2r} + \alpha_{2r,2r}, \quad a_{sr}{}^\circ = \alpha_{s,2r-1} - \alpha_{s,2r}, \quad s \neq 2r-1, 2r$$

Возможны и другие подслучаи, однако все они ведут к рассмотренным каноническим системам.

5. В третьем основном случае в зависимости, определяющей резонанс, участвуют три собственные частоты. Выделим несколько подслучаев.

А. Выполняются равенства

$$\omega_{3r-2} \approx \omega_{3r-1} + \omega_{3r} - p_r, \quad \omega_{3r-1} \approx \omega_{3r-2} - \omega_{3r} + p_r,$$

$$\omega_{3r} \approx \omega_{3r-2} - \omega_{3r-1} + p_r, \quad r = 1, 2, \ldots, m$$

Ясно, что здесь будем иметь $3m$-частотные колебания ($3m \leqq n$).

Теперь получаем систему

$$(5.1)\qquad \frac{d\overset{\circ}{A}_{3r-2}}{\varepsilon dt} = -H_r{}^\circ \overset{\circ}{A}_{3r-1} A_{3r}{}^\circ \sin\lambda_r$$

$$\frac{d\overset{\circ}{A}_{3r-1}}{\varepsilon dt} = 2H_r{}^\circ \overset{\circ}{A}_{3r-2} A_{3r}{}^\circ \sin\lambda_r, \qquad \frac{dA_{3r}{}^\circ}{\varepsilon dt} = 2H_r{}^\circ \overset{\circ}{A}_{3r-2}\overset{\circ}{A}_{3r-1}\sin\lambda_r$$

$$\frac{d\varphi_{3r-2}}{\varepsilon dt} = \alpha_{3r-2,3r-2}\overset{\circ 2}{A}_{3r-2} + 2\sum_{s=1}^{3m}{}' \alpha_{s,3r-2}A_s{}^{\circ 2} + \sum_{s=1}^{m}\beta_{s,3r-2}H_s{}^2 - \frac{H_r{}^\circ \overset{\circ}{A}_{3r-1}A_{3r}{}^\circ}{\overset{\circ}{A}_{3r-2}}\cos\lambda_r$$

$$\frac{d\varphi_{3r-1}}{\varepsilon dt} = \alpha_{3r-1,3r-1}\overset{\circ 2}{A}_{3r-1} + 2\sum_{s=1}^{3m}{}' \alpha_{s,3r-1}A_s{}^{\circ 2} + \sum_{s=1}^{m}\beta_{s,3r-1}H_s{}^2 - \frac{H_r{}^\circ \overset{\circ}{A}_{3r-2}A_{3r}{}^\circ}{\overset{\circ}{A}_{3r-1}}\cos\lambda_r$$

$$\frac{d\varphi_{3r}}{\varepsilon dt} = \alpha_{3r,3r}A_{3r}{}^{\circ 2} + 2\sum_{s=1}^{3m}{}' \alpha_{s,3r}A_s{}^{\circ 2} + \sum_{s=1}^{m}\beta_{s,3r}H_s{}^2 - \frac{H_r{}^\circ \overset{\circ}{A}_{3r-2}\overset{\circ}{A}_{3r-1}}{\overset{\circ}{A}_{3r}}\cos\lambda_r$$

$$H_r{}^\circ = \frac{1}{16}\bar g^{(3r,n+r)}_{3r-2,3r-1}(\omega_{3r-1},\omega_{3r},-p_r)H_r(\omega_{3r-2}m_{3r-2}\omega_{3r-1}m_{3r-1}\omega_{3r}m_{3r})^{-1/2}$$

$$\lambda_r = (\omega_{3r-1}+\omega_{3r}-p_r-\omega_{3r-2})t - \varphi_{3r-1} - \varphi_{3r} + \psi_r + \varphi_{3r-2}$$

Первые три уравнения (5.1) имеют интегралы ($\varkappa^2$ и $\varkappa_1{}^2$ — постоянные интегрирования)

$$(5.2)\qquad 4\overset{\circ 2}{A}_{3r-2} + \overset{\circ 2}{A}_{3r-1} + A_{3r}{}^{\circ 2} = \varkappa^2, \qquad 2\overset{\circ 2}{A}_{3r-2} + \overset{\circ 2}{A}_{3r-1} = \varkappa_1{}^2$$

Учитывая выражения для λ_r и (5.2), находим каноническую систему

$$(5.3)\qquad \frac{d\overset{\circ}{A}_{3r-2}}{\varepsilon dt} = -H_r{}^\circ(\varkappa_1{}^2 - 2\overset{\circ 2}{A}_{3r-2})^{1/2}(\varkappa^2 - \varkappa^{12} + 2\overset{\circ 2}{A}_{3r-2})^{1/2}\sin\lambda_r, \quad r = 1, 2, \ldots, m$$

$$\frac{d\lambda_r}{\varepsilon dt} = 2m_r{}^\circ + 4\overset{\circ}{a}_{3r-2,3r-2}\overset{\circ 2}{A}_{3r-2} + 2\sum_{s=1}^{3m}{}'' a_{sr}{}^\circ A_s{}^{\circ 2} -$$

$$-\frac{H_r{}^\circ}{\overset{\circ}{A}_{3r-2}}[\varkappa_1{}^2(\varkappa^2-\varkappa_1{}^2) - 4\overset{\circ 2}{A}_{3r-2}(\varkappa^2-\varkappa_1{}^2) + 12\overset{\circ 4}{A}_{3r-2}]\times$$

$$\times(\varkappa_1{}^2 - 2\overset{\circ 2}{A}_{3r-2})^{-1/2}(\varkappa^2 - \varkappa_1{}^2 - 2\overset{\circ 2}{A}_{3r-2})^{-1/2}\cos\lambda_r$$

$$2m_r{}^\circ = \frac{\omega_{3r-1}+\omega_{3r}-p_r-\omega_{3r-2}}{\varepsilon} + \sum_{s=1}^{m}(\beta_{s,3r-2} - \beta_{s,3r-1} - \beta_{s,3r})H_s{}^2 +$$

$$+ (2\alpha_{3r-1,3r-2} - \alpha_{3r-1,3r-1} - 2\alpha_{3r-1,3r})\varkappa_1{}^2 + (2\alpha_{3r,3r-2} - 2\alpha_{3r,3r-1} - \alpha_{3r,3r})\varkappa^2$$

$$4\overset{\circ}{a}_{3r-2,3r-2} = \alpha_{3r-2,3r-2} - 6\alpha_{3r-2,3r-1} + 2\alpha_{3r-1,3r-1} + 6\alpha_{3r-1,3r} - 4\alpha_{3r,3r-2} + 2\alpha_{3r,3r}$$

$$a_{sr}{}^\circ = \alpha_{s,3r-2} - \alpha_{s,3r-1} - \alpha_{s,3r}, \qquad s \neq 3r-2,\ 3r-1,\ 3r;\ a_{sr}{}^\circ \neq a_{rs}{}^\circ$$

Здесь три штриха после знака суммы означают, что слагаемые с индексами $3r-2$, $3r-1$, $3r$ опущены.

Конечно, из (5.2) можно вместо $\overset{\circ}{A}_{3r-1}$, $A_{3r}{}^\circ$ исключить другие амплитуды: $\overset{\circ}{A}_{3r-2}$, $A_{3r}{}^\circ$ или $\overset{\circ}{A}_{3r-2}$, $\overset{\circ}{A}_{3r-1}$. Однако получающееся при этом различие в канонических системах несущественно.

Б. Выполняются равенства

$$\omega_{3r} \approx p_r - \omega_{3r-2} - \omega_{3r-1}, \qquad \omega_{3r-1} \approx p_r - \omega_{3r-2} - \omega_{3r}, \qquad \omega_{3r-2} \approx p_r - \omega_{3r-1},$$

$r = 1, 2, \ldots, m$

Аналогично подслучаю А находим каноническую систему ($\varkappa$ и $\varkappa_1$ — постоянные интегрирования)

$$
\frac{d\overset{\circ}{A}_{3r-2}}{\varepsilon dt} = H_r{}^\circ (\overset{\circ 2}{A}_{3r-2} - \varkappa_1)^{1/2} (\overset{\circ 2}{A}_{3r-2} - \varkappa + \varkappa_1)^{1/2} \sin \lambda_r, \quad r = 1, 2, \ldots, m \tag{5.4}
$$

$$
\frac{d\lambda_r}{\varepsilon dt} = 2m_r{}^\circ - 4\overset{\circ}{a}_{3r-2,3r-2} \overset{\circ 2}{A}_{3r-2} - 2 \sum_{s=1}^{3m}{}'' a_{sr}{}^\circ A_s{}^{\circ 2} +
$$

$$
+ \frac{H_r{}^\circ}{\overset{\circ}{A}_{3r-2}} [\varkappa_1 (\varkappa - \varkappa_1) - 2\varkappa \overset{\circ 4}{A}_{3r-2} + 3\overset{\circ 2}{A}_{3r-2}] (\overset{\circ 2}{A}_{3r-2} - \varkappa_1)^{-1/2} \times
$$

$$
\times (\overset{\circ 2}{A}_{3r-2} - \varkappa + \varkappa_1)^{-1/2} \cos \lambda_r
$$

$$
2m_r{}^\circ = \frac{\omega_{3r-2} + \omega_{3r-1} + \omega_{3r} - p_r}{\varepsilon} - \sum_{s=1}^{m} (\beta_{s,3r-1} + \beta_{s,3r-2} + \beta_{s,3r}) H_s{}^2 +
$$

$$
+ \varkappa_1 (2\alpha_{3r-1,3r-2} + \alpha_{3r-1,3r-1} + 2\alpha_{3r-1,3r}) +
$$

$$
+ (\varkappa - \varkappa_1) (2\alpha_{3r,3r-2} + 2\alpha_{3r-1,3r} + \alpha_{3r,3r})
$$

$$
\lambda_r = (\omega_{3r-2} + \omega_{3r-1} + \omega_{3r} - p_r) t - \varphi_{3r-2} - \varphi_{3r-1} - \varphi_{3r} + \psi_r
$$

$$
4\overset{\circ}{a}_{3r-2,3r-2} = \alpha_{3r-2,3r-2} + \alpha_{3r-1,3r-1} + \alpha_{3r,3r} + 4\alpha_{3r-2,3r-1} + 4\alpha_{3r-1,3r} + 4\alpha_{3r,3r-2}
$$

$$
a_{sr}{}^\circ = \alpha_{s,3r-2} + \alpha_{s,3r-1} + \alpha_{s,3r}, \qquad s \neq 3r-2,\ 3r-1,\ 3r
$$

Возможны и другие подслучаи, однако они все ведут к каноническим системам (5.3) или (5.4) при некоторых различиях в обозначениях.

Рассмотренные три основных случая характеризуются отдельными изолированными группами равенств. В связи с этим и в канонических системах уравнения группируются определенным образом. Все канонические системы при $m = 1$ интегрируются.

Соответствующие интегралы имеют вид

$$
\begin{aligned}
&m_1{}^0 A_1{}^0 + {}^3/_4 \alpha_{11} A_1{}^4 - A_1{}^3 \cos \lambda_1 = c_{3.2} \\
&m_1{}^0 A_1{}^2 - {}^1/_4 \alpha_{11} A_1{}^4 + A_1 \cos \lambda_1 = c_{3.3} \\
&m_1{}^0 A_1{}^{02} - a_{11}{}^0 A_1{}^{04} - H_1{}^0 A_1{}^0 (\varkappa^2 - 2A_1{}^{02}) \cos \lambda_1 = c_{4.3} \\
&m_1{}^0 A_1{}^{02} + a_{11}{}^0 A_1{}^{04} - H_1{}^0 A_1{}^0 (A_1{}^{02} - \varkappa)^{1/2} \cos \lambda_1 = c_{4.4} \\
&m_1{}^0 A_1{}^{02} + z_{11}{}^0 A_1{}^{04} - H_1{}^0 A_1{}^0 (\varkappa^2 - A_1{}^{02})^{1/2} \cos \lambda_1 = c_{4.5} \\
&m_1{}^0 A_1{}^{02} + a_{11}{}^0 A_1{}^{04} - H_1{}^0 A_1{}^0 (\varkappa_1{}^2 - 2A_1{}^{02})^{1/2} (\varkappa^2 - \varkappa_1{}^2 - 2A_1{}^{02})^{1/2} \cos \lambda_1 = c_{5.3} \\
&m_1{}^0 A_1{}^{02} - a_{11}{}^0 A_1{}^{04} + H_1{}^0 A_1{}^0 (A_1{}^{02} - \varkappa_1)^{1/2} (A_1{}^{02} - \varkappa + \varkappa_1)^{1/2} \cos \lambda_1 = c_{5.4}
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

Здесь индекс у постоянной интегрирования означает номер канонической системы. Далее $A_1{}^{\circ 2}$ можно выразить через эллиптические функции времени εt.

Исследование всех указанных канонических систем при $m = 1$ можно провести на фазовой плоскости, где $A_1{}^\circ$ и λ_1 — полярные координаты. Фазовые траектории определяются выражениями (5.5). Картины фазовых траекторий дают полное представление о всех возможных движениях в системах.

6. Следующие три основных случая только отметим без подробного обсуждения. Они приводят к значительно более сложным каноническим системам, не интегрируемым при $m = 1$. Исследование этих систем можно провести для некоторых частных случаев.

Четвертый основной случай определяется равенствами

$$
\omega_r \approx 3p_r, \quad p_{r+1} \approx 3\omega_r, \quad r = 1, 2, \ldots, m
$$

Каноническая система для этого случая состоит из $3m$ уравнений с m неизвестными амплитудами A_r и $2m$ переменными λ_i. Здесь как бы объединяются подслучаи А и Б первого основного случая. Частоты ω_i и p_j образуют последовательность, для которой каждые два последовательных члена связаны зависимостью, характерной для первого основного случая.

В пятом основном случае частоты $\omega_i (i = 1, 2, \ldots, 2m)$ и $p_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ (или $j = 1, 2, \ldots, 2m$) образуют последовательность, в которой каждые три (или четыре) последовательных члена связаны зависимостью, характерной для второго основного случая. Канонические системы для этого случая состоят из $5m - 2$ (или $6m - 3$) уравнений с $2m$ неизвестными амплитудами A_i и $3m - 2$ (или $4m - 3$) переменными λ_i (колебания $2m$-частотные).

В шестом основном случае частоты $\omega_i (i = 1, 2, \ldots 3m)$ и $p_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ образуют последовательность, в которой каждые четыре последовательных члена связаны зависимостью, характерной для третьего основного случая. Канонические системы в этом случае состоят из $7m - 3$ уравнений с $3m$ неизвестными амплитудами A_r и $4m - 3$ переменными λ_i (колебания $3m$ — частотные).

Рассмотренные основные случаи резонанса не исчерпывают всех возможных случаев. Они только указывают на основные направления при изучении возможных типов резонансов.

7. Рассмотрим теперь случай, когда равенства (1.4) не выполняются.

Тогда будем искать решение системы (1.4) не в виде (2.1), а в виде

$$q_k = \sum_{s=1}^{N} M_k^s \cos(p_s t - \psi_s) + \sum_{s=1}^{m} L_k^{(s)} A_s \cos(\omega_s t - \varphi_s) + \tag{7.1}$$

$$+ \varepsilon q_{k1} + \varepsilon^2 q_{k2} + \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

$$M_k^{(s)} = \sum_{j=1}^{n} L_k^{(j)} \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i^{(j)} H_s (a_{i,n+s} p_s^2 - c_{i,n+s})}{m_j (\omega_j^2 - p_s^2)}, \quad \omega_j \neq p_s.$$

Однако (7.1) можно записать так:

$$q_k = \sum_{s=1}^{m+N} L_k^{(s)} A_s \cos(\omega_s t - \varphi_s) + \varepsilon q_{k1} + \varepsilon^2 q_{k2} + \ldots \tag{7.2}$$

$$L_k^{(s)} = M_k^{(s-m)}, \quad A_s = 1, \quad \omega_s = p_{s-m}, \quad \varphi_s = \psi_{s-m} \text{ для } s > m.$$

Теперь ясно, что подстановка (7.2) в (1.3) и последующие преобразования приведут опять к системе (2.4), где коэффициенты в выражениях для F_r будут более сложными. Это не дает новых качественных результатов по сравнению с изложенными выше.

Поступила 28 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1971.
2. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М., «Наука», 1969.
3. *Чешанков Б. И.* Едночестотни трептения с външно смущение при резонанс от трети ранг. Теоретична и приложна механика. Българска Академия на науките. 1973, год. 4, № 2.
4. *Struble R. A.* Nonlinear differential equations. N. Y., McGraw-Hill Book Co., 1962.
5. *Struble R. A., Yionoulis S. M.* General perturbational solution of the harmonically forced Duffing equation. Arch. Rational Mech. and Analysis, 1962, vol. 9, No. 5.
6. *Боголюбов Н. П., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории линейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
7. *Чешанков Б. И.* Многочестотни резонанси трептения от трети ранг на консервативните системи. Теоритична и приложна механика. Българска Академия на науките, 1973, год. 4, № 4.