УДК 531.31

О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Ил. Илиев

(Пловдив)

Рассмотрим неголономную механическую систему с кинетической энергией $T = 1/2\, g_{\lambda\mu} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\mu$, подчиненную неголономным связям $\varphi_\varkappa{}^p \dot{q}^\varkappa = 0$ и соответствующую ей систему, освобожденную от связей (СОС) [1]. Индексы $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ принимают значения $1, 2, \ldots, n$; $a, b, c, \ldots$ — $1, 2, \ldots, k$ и $p, q, r, \ldots$ — $k, \ldots, n$. Уравнения СОС имеют вид

$$\delta \dot{q}^\varkappa / dt = Q^\varkappa, \qquad \delta \dot{q}^\varkappa / dt = \ddot{q}^\varkappa + \Gamma_{\lambda\mu}^\varkappa \dot{q}^\lambda \dot{q}^\mu, \qquad Q^\varkappa = g^{\varkappa\nu} \partial U / \partial q^\nu \tag{1}$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\varkappa = \frac{1}{2} g^{\varkappa\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial q^\nu} \right)$$

Уравнения неголономной системы следующие:

$$D\dot{s}^a / dt = F^a \tag{2}$$

Выражения для $D\dot{s}^a / dt$, $\Gamma^a{}_{bc}$ и F^a даны в [1].

Условия того, чтобы соотношение $\xi_\varkappa \dot{q}^\varkappa = C$ было линейным интегралом неголономной системы, следующие [1–4]:

$$\Delta_c \lambda_a + \Delta_a \lambda_c = 0, \qquad \lambda_c F^c = 0 \tag{3}$$

$$\left(\lambda_a = \xi_\varkappa \alpha_a{}^\varkappa, \quad \nabla_c \lambda_a = \frac{\partial \lambda_a}{\partial q_\varkappa} \alpha_c{}^n - \Gamma_{ca}^b \lambda_b \right)$$

Известно [5], что для того, чтобы одна неголономная система имела первый линейный по отношению к лангранжевым скоростям интеграл $\xi_\varkappa \dot{q}^\varkappa = C$, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл был линейным интегралом геодезических метрического пространства V_n с метрическим тензором $g_{\lambda\mu}$ и векторы, $Q^\varkappa$ и $\omega_\varkappa{}^p$ были ортогональными вектору $\xi_\varkappa$, т. е.

$$\nabla_\varkappa \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\varkappa = 0, \qquad \omega_\varkappa{}^p \xi^\varkappa = 0, \qquad Q_\varkappa \xi^\varkappa = 0 \tag{4}$$

Обе группы условий (3) и (4) различаются. Рассмотрим это подробнее. Пусть $\xi_\varkappa \dot{q}^\varkappa = C$ — линейный интеграл неголономной системы. Пусть $\eta_\varkappa = \xi_\varkappa + \rho_p w^p{}_\varkappa$, где ρ_p — функции обобщенных координат $q^\varkappa$. Тогда, используя уравнение связей, получаем

$$\eta_\varkappa \dot{q}^\varkappa = (\xi_\varkappa + \rho_p \omega_\varkappa{}^p)\, \dot{q}^\varkappa = \xi_\varkappa \dot{q}^\varkappa$$

Следовательно, $\eta_\varkappa \dot{q}^\varkappa = C$ — тот же самый интеграл неголономной системы, записанный в другой форме. Будем говорить, что векторы $\eta_\varkappa$ порождают один и тот же линейный интеграл. Разложим вектор $\xi_\varkappa$ по системе векторов ω^ν [1]. Имеем $\xi_\varkappa = \rho_a \omega_\varkappa{}^a + \rho_p \omega_\varkappa{}^p$, откуда следует, что $\eta_\varkappa = \rho_a \omega_\varkappa{}^a$ порождает тот же самый линейный интеграл.

Вектор $\eta_\varkappa = \rho_a \omega_\varkappa{}^a$, единственный среди векторов, порождающих данный линейный интеграл, удовлетворяет второму условию (4), т. е. лежит в допустимом пространстве. Следовательно, это условие не является необходимым для существования линейного интеграла; оно лишь достаточное, что отмечено в [1].

Пусть $\eta_\varkappa = \rho_a \omega_\varkappa{}^a$. Проследим, как изменяются условия (3) в этом случае. Используя формулу [1]

$$g^{\lambda\mu} = G^{ab} \alpha_a{}^\lambda \alpha_b{}^\mu + G^{pq} \alpha_p{}^\lambda \alpha_q{}^\mu$$

и учитывая, что $\omega_\varkappa{}^a \alpha_p{}^\varkappa = 0$ [1], преобразуем левую часть второго условия (3)

$$\lambda_c F^c = \eta_\varkappa \alpha_c{}^\varkappa G^{cb} Q_\nu \alpha_b{}^\nu = \eta_\varkappa Q_\nu (g^{\varkappa\nu} - G^{pq} \alpha_p{}^\varkappa \alpha_q{}^\nu) =$$
$$= \rho_a \omega_\varkappa{}^a Q_\nu (g^{\varkappa\nu} - G^{pq} \alpha_p{}^\varkappa \alpha_q{}^\nu) = \rho_a \omega_\varkappa{}^a Q_\nu g^{\varkappa\nu} = \eta_\varkappa Q^\varkappa$$

Таким образом, установлено, что второе условие (3) и третье условие (4) эквивалентны.

Преобразуя первое условие (3), как это сделано в [1], имеем

$$(\nabla_\nu \eta_\varkappa + \nabla_\varkappa \eta_\nu)\, \alpha_c^{\ \varkappa} \alpha_a^{\ \nu} + \eta_\varkappa (\nabla_c \alpha_a^{\ \varkappa} + \nabla_a \alpha_c^{\ \varkappa}) = 0$$

Подставляя сюда $\eta_\varkappa = \rho_b \omega_\varkappa^{\ b}$ и используя $\omega_\varkappa^{\ b} \nabla_a \alpha_c^{\ \varkappa} = 0$ [1], получаем

$$(\nabla_\nu \eta_\varkappa + \nabla_\varkappa \eta_\nu)\, \alpha_a^{\ \varkappa} \alpha_c^{\ \nu} = 0$$

Таким образом, доказана следующая теорема. Если $\xi_\varkappa q^{\cdot \varkappa} = C$ — линейный интеграл неголономной склерономной системы, то существует бесконечно много векторов $\eta_\varkappa = \xi_\varkappa + \rho_p (q^\varkappa) \omega_\varkappa^{\ p}$, его порождающих ρ_p. Среди этих векторов существует точно один $\eta_\varkappa = \rho_a \omega_\varkappa^{\ a}$, который лежит в допустимом пространстве. Необходимые и достаточные условия того, чтобы соотношение $\eta_\varkappa q^{\cdot \varkappa} = C$ ($\eta_\varkappa$ лежит в допустимом пространстве) было первым линейным интегралом неголономной системы, следующие:

$$(\nabla_\nu \eta_\varkappa + \nabla_\varkappa \eta_\nu)\, \alpha_a^{\ \varkappa} \alpha_c^{\ \nu} = 0, \quad \eta^\varkappa \omega_\varkappa^{\ p} = 0, \quad \eta_\varkappa Q^\varkappa = 0 \tag{5}$$

Остановимся на первом условии (4) и соответствующем ему первом условии (5). Уравнения СОС, движущейся по инерции, следующие:

$$\delta q^{\cdot \varkappa} / dt = 0 \tag{6}$$

Продифференцировав левую часть линейного интеграла и воспользовавшись последним соотношением (4) и (6), получаем

$$\frac{\delta}{dt} (\eta_\varkappa q^{\cdot \varkappa}) = \frac{\delta \eta_\varkappa}{dt} q^{\cdot \varkappa} = \nabla_\nu \eta_\varkappa q^{\cdot \nu} q^{\cdot \varkappa} = \frac{1}{2} (\nabla_\nu \eta_\varkappa + \nabla_\varkappa \eta_\nu)\, q^{\cdot \varkappa} q^{\cdot \nu} = 0$$

Оказывается, что первое условие (5) эквивалентно следующему: производная левой части линейного интеграла в силу уравнений (6) тождественно обращается в нуль.

Первое условие (5) дает

$$\nabla_\nu \eta_\varkappa + \nabla_\varkappa \eta_\nu = 2\rho_{\lambda p} \omega_\varkappa^{\ \lambda} \omega_\nu^{\ p} + 2\rho_{p\lambda} \omega_\varkappa^{\ p} \omega_\nu^{\ \lambda} \tag{7}$$

С другой стороны, продифференцировав левую часть линейного интеграла и воспользовавшись соотношением (6) и (7), получаем

$$\frac{\delta}{dt} (\eta_\varkappa q^{\cdot \varkappa}) = \frac{1}{2} (\nabla_\nu \eta_\varkappa + \nabla_\varkappa \eta_\nu)\, q^{\cdot \varkappa} q^{\cdot \nu} = A_p \omega_\nu^{\ p} q^{\cdot \nu}$$

$$(A_p = \rho_{\lambda p} \omega_\varkappa^{\ \lambda} q^{\cdot \varkappa} + \rho_{p\lambda} \omega_\varkappa^{\ \lambda} q^{\cdot \varkappa})$$

Таким образом, первое условие (5) эквивалентно следующему: производная левой части линейного интеграла в силу (6) является линейной комбинацией уравнений связей.

Пример. Рассмотрим движение саней Чаплыгина на горизонтальной плоскости [6] в случае, когда направление лезвия перпендикулярно отрезку, соединяющему центр тяжести с режущей точкой и $M = 1$. Выражение для удвоенной кинетической энергии и уравнение неголономной связи имеют вид

$$2T = (\xi^\cdot - \cos\varphi\, \varphi^\cdot)^2 + (\eta^\cdot - \beta \sin\varphi\, \varphi^\cdot)^2 + k_c^2 \varphi^{\cdot 2}, \quad \eta^\cdot = \operatorname{tg}\varphi\, \xi$$

Для векторов α_ν и ω^ν получаем

$$\alpha_1(1,\ 0,\ 0), \qquad \omega^1(k^2 + l^2,\ l\cos\varphi,\ l\sin\varphi)$$

$$\alpha_2(0,\ 1,\ \operatorname{tg}\varphi), \qquad \omega^2(l / \cos\varphi,\ 1,\ \operatorname{tg}\varphi)$$

$$\alpha_3(0,\ -\operatorname{tg}\varphi,\ 1), \qquad \omega^3(0,\ -\operatorname{tg}\varphi,\ 1)$$

Уравнения движения неголономной системы следующие:

$$\varphi^{\cdot\cdot} = 0, \qquad \zeta^{\cdot\cdot} = -\operatorname{tg}\varphi\xi^{\cdot}\varphi^{\cdot}$$

Легко проверить, что $\xi^{\cdot} / \cos\varphi = C$ — первый линейный интеграл неголономной системы. Он не удовлетворяет второму условию (4). Положив $q^1 = \varphi$, $q^2 = \xi$, $q^3 = \eta$, получаем $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1 / \cos\varphi$, $\xi_3 = 0$. Поэтому

$$\xi_\varkappa \alpha_3^\varkappa = -\sin\varphi / \cos^2\varphi \neq 0$$

Вектор $\xi_\varkappa$ можно представить линейной комбинацией векторов $\omega_\varkappa^\nu$ следующим образом:

$$\xi_\varkappa = -\frac{l}{k^2}\omega_\varkappa^1 + \left(1 + \frac{l^2}{k^2}\right)\cos\varphi\omega_\varkappa^2 - \sin\varphi\omega_\varkappa^3$$

Единственным для данного линейного интеграла порождающим вектором, который лежит в допустимом пространстве, будет

$$\eta_\varkappa = -\frac{l}{k^2}\omega_\varkappa^1 + \left(1 + \frac{l^2}{k^2}\right)\cos\varphi\omega_\varkappa^2$$

Подставляя $\omega_\varkappa^1$ и $\omega_\varkappa^2$, получаем $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = \cos\varphi$, $\eta_3 = \sin\varphi$.

Соотношение $\cos\varphi\xi^{\cdot} + \sin\varphi\eta^{\cdot} = C$ является другой формой того же линейного интеграла. Покажем, что для него выполняется первое условие (5), полученное в данной работе, но первое условие (4) из [5] не выполняется. В самом деле, использовав СОС, движущейся по инерции

$$\varphi^{\cdot\cdot} = 0, \qquad \xi^{\cdot\cdot} = -\beta\sin\varphi\varphi^{\cdot 2}, \qquad \eta^{\cdot\cdot} = \beta\cos\varphi\varphi^{\cdot 2} \tag{8}$$

и, продифференцировав левую часть линейного интеграла в силу (8), имеем

$$\delta / dt(\xi^{\cdot}\cos\varphi + \eta^{\cdot}\sin\varphi) = \xi^{\cdot\cdot}\cos\varphi + \eta^{\cdot}\sin\varphi - \xi^{\cdot}\varphi^{\cdot}\sin\varphi +$$
$$+ \eta^{\cdot}\varphi^{\cdot}\cos\varphi = \varphi^{\cdot}\cos\varphi\,(\eta^{\cdot} - \xi^{\cdot}\operatorname{tg}\varphi)$$

Линейные интегралы неголономной системы, которые удовлетворяют условиям (4), будут одновременно линейными интегралами и СОС. Для всех линейных интегралов неголономной системы, которые не являются линейными интегралами и СОС, а первое условие (4) нарушается, причем для порождающего вектора $\eta_\varkappa = \rho_a\omega_\varkappa^a$, лежащего в допустимом пространстве, выполняется первое условие (5).

Условия, аналогичные (5), можно получить для любых первых интегралов типа, указанного в п. 2, 3 работы [1].

Поступила 13 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Илиев Ил., Семерджиев Хр.* Связь между первыми интегралами неголономной механической системы и соответствующей системы, освобожденной от связей. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
2. *Илиев Ил.* О линейных интегралах голономной механической системы. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
3. *Илиев Ил.* Друга форма на уравненията в допустими вектори. Научн. тр. Висш. пед. ин-та, Пловдив, 1970, т. 8, кн. 2.
4. *Илиев Ил.* Едно приложение на уравненията в допустими вектори. Научн. тр. Висш. пед. ин-та, Пловдив, 1970, т. 8, кн. 3.
5. *Agostinelli C.* Nuova forma sintetica delle equazioni del moto di un siitema anolonomo ed esistenza di un integrale lineare nelle velocita Lagrangiane. Boll. Unione mat. ital., 1956, vol. 11, No. 1.
6. *Добронравов В. В.* Основы механики неголономных систем. М., «Высшая школа», 1970.