

**МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ.
ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТУННЕЛЬНАЯ ТРЕЩИНА НА ГРАНИЦЕ
С ПРОВОДНИКОМ**

Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон, В. И. Ракитин

(Москва)

Формулируется условие, определяющее развитие трещины в пьезоэлектрическом материале, и, в качестве примера, рассматривается задача о развитии туннельной трещины на границе пьезоэлектрической керамики и упругого изотропного проводника. Определяются компоненты напряжений, смещений, потенциал электрического поля, смещение электрической индукции и величина критической нагрузки, связанная с развитием трещины.

1. Условие разрушения для пьезоэлектрических сред. При статическом нагружении пьезоэлектрической среды компоненты тензора механических напряжений σ_{ij} — функции не только геометрических деформаций, но и электрического поля.

Выберем в качестве независимых переменных компоненты электрического поля и тензора деформаций, а уравнение пьезоэлектрической среды в кристаллофизических декартовых координатах x, y, z представим в следующем виде [1]:

$$(1.1) \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k, \quad D_i = e_{kli} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik}^s E_k \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

Здесь c_{ijkl}^E — модули упругости среды, e_{ijk} — пьезоэлектрические модули, ε_{ik}^s — адиабатические диэлектрические постоянные среды, ε_{kl} — компоненты тензора деформации, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, E_k — компоненты напряженности электрического поля, D_i — компоненты вектора электрической индукции.

Уравнения равновесия среды в пренебрежении объемными силами и уравнения Максвелла при отсутствии свободных зарядов имеют вид

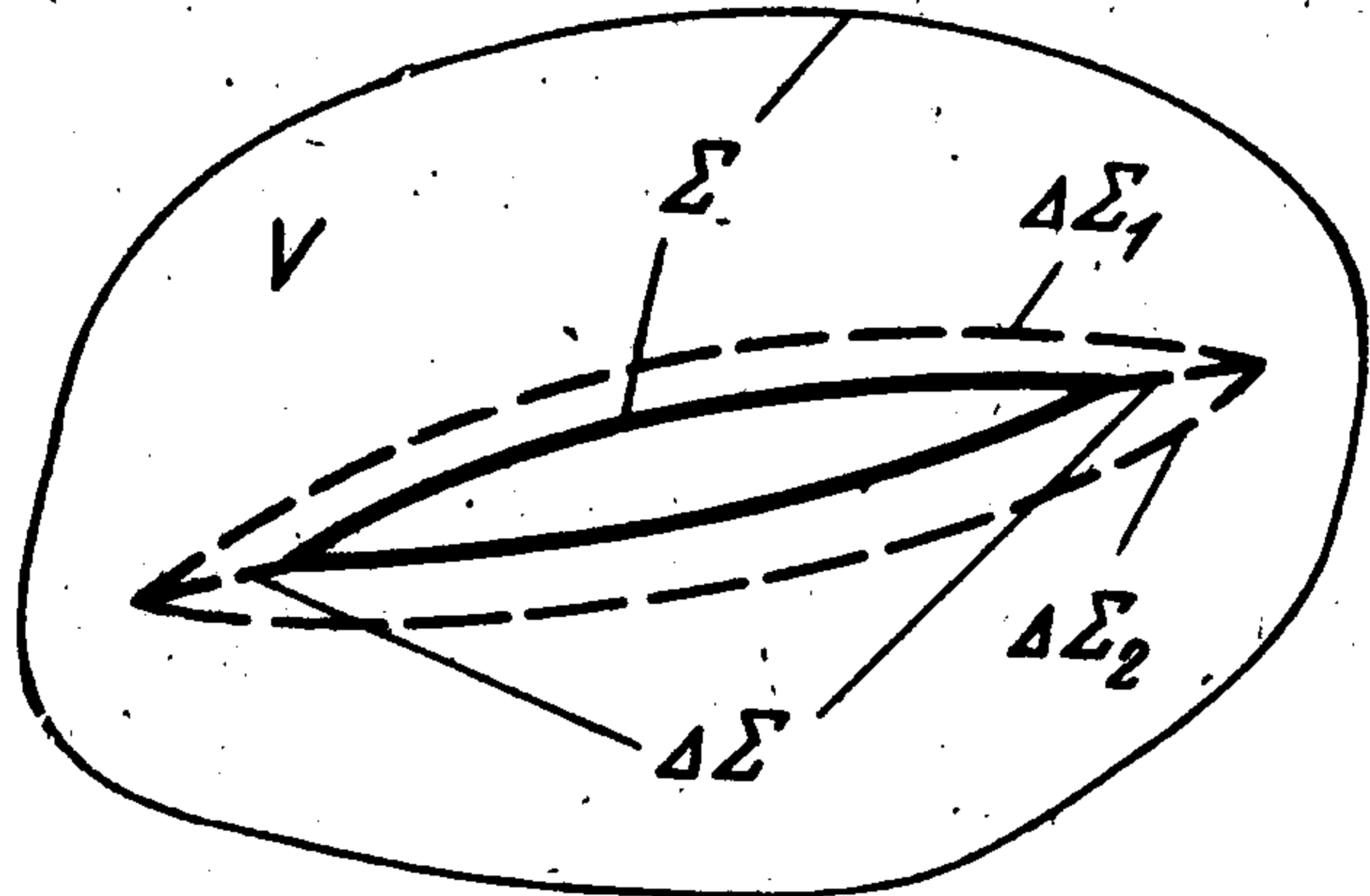
$$(1.2) \quad \partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0, \quad \partial D_j / \partial x_j = 0$$

Для вывода дополнительного условия, определяющего развитие трещины в пьезоэлектрической среде, введем в рассмотрение внешний макроскопический поток энергии $dA_{\Delta\Sigma}$, возникающий в результате распространения трещины.

Аналогично [2], рассмотрим два возможных состояния пьезоэлектрического тела (фигура), соответствующие моментам времени t (сплошные линии) и $t_1 = t + \Delta t$ пунктирные линии. Как известно, для линеаризованной задачи граничные условия можно формулировать на поверхности $\Sigma + \Delta\Sigma$ ($\Delta\Sigma$ — приращение двусторонней поверхности разрыва). Обозначим через $u \{u_i\}$ вектор перемещения из некоторого начального состояния в состояние, соответствующее моменту t , а через $u_1 \{u_{i1}\}$ вектор пере-

мещения из того же начального состояния в состояние, соответствующее моменту t_1 .

На основании уравнений движения среды (1.2), в моменты t и t_1 для точек объема V выполняются следующие равенства:



$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij1} + \sigma_{ij}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (D_{j1} - D_j) = 0$$

Умножим первое из этих равенств на $1/2 (u_{i1} - u_i)$, второе на $1/2 (\varphi_1 + \varphi)$, сложим результаты и проинтегрируем по всему объему тела (φ — потенциал электрического поля, $\mathbf{E} = \text{grad}\varphi$).

После очевидных преобразований получим

$$(1.3) \quad \frac{1}{2} \int_{\Sigma + \Delta\Sigma} (\sigma_{ij1} + \sigma_{ij}) (u_{i1} - u_i) n_j dS + \frac{1}{2} \int_{\Sigma + \Delta\Sigma} (D_{j1} - D_j) (\varphi_1 + \varphi) n_j dS =$$

$$= \frac{1}{2} \int_V [(\sigma_{ij1} + \sigma_{ij})(\varepsilon_{ij1} - \varepsilon_{ij}) + (D_{j1} - D_j)(E_{j1} + E_j)] d\tau$$

Если воспользоваться соотношением

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij1} + E_j D_{j1} = \sigma_{ij1}\varepsilon_{ij} + E_{j1} D_j$$

которое непосредственно проверяется подстановкой в него уравнений (1.1), то легко показать, что правая часть (1.3) представляет собой изменение плотности внутренней энергии

$$U = 1/2 \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + 1/2 D_j E_j$$

при переходе из одного возможного состояния в другое. При отсутствии внешнего притока тепла уравнение (1.3) можно записать так [2]:

$$dW = dA + dA_{\Delta\Sigma}$$

Здесь dW — приращение внутренней энергии, dA — сумма работ внешних поверхностных сил и поля на всей (до появления разрыва) границе тела Σ , а выражение для потока энергии при образовании разрыва $dA_{\Delta\Sigma}$ может быть записано в виде

$$(1.4) \quad dA_{\Delta\Sigma} = \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \sigma_{ij} u_{i1} n_j dS + \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \sigma_{ij} (u_{i1} - u_i) n_j dS +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \varphi D_{j1} n_j dS + \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \varphi_1 (D_{j1} - D_j) n_j dS$$

В последнем выражении учтено, что ввиду непрерывности перемещений u_j , напряжений σ_{ij} , потенциала φ и электрической индукции D_j на $\Delta\Sigma$ справедливы следующие равенства:

$$\int_{\Delta\Sigma} \sigma_{ij} u_{i1} n_j dS = 0, \quad \int_{\Delta\Sigma} \varphi D_{j1} n_j dS = 0$$

Из механики разрушения известно [2-4], что приток энергии, связан с поверхностной энергией (γ — интенсивность поверхностной энергии разрушения) $dU_0 = \gamma (\Delta\Sigma_1 + \Delta\Sigma_2)$.

В статистическом случае и при адиабатическом процессе условие распространения трещины таково:

$$(1.5) \quad dU_0 = -dA_{\Delta\Sigma}$$

В частности, если берега трещин свободны от напряжений, условие (1.5) дает:

$$(1.6) \quad \gamma(\Delta\Sigma_1 + \Delta\Sigma_2) = -\frac{1}{2} \left(\int_{\Delta\Sigma_1 + \Delta\Sigma_2} \sigma_{ij} u_{i1} n_j dS + \int_{\Delta\Sigma_1 + \Delta\Sigma_2} \varphi D_{j1} n_j dS + \int_{\Delta\Sigma_1 + \Delta\Sigma_2} \varphi_1 (D_{j1} - D_j) n_j dS \right)$$

В случае, например, плоской деформации для трещины, расположенной вдоль оси x ($|x| \leq a$), условие разрушения (1.6) можно представить в такой форме:

$$(1.7) \quad \gamma = -\frac{1}{2} \frac{d}{da} \left(\int_0^a \sigma_{ij0} u_i n_j dx + \int_0^a \varphi_0 D_j n_j dx + \int_0^a \varphi (D_j - D_{j0}) n_j dx \right)$$

Здесь σ_{ij0} , D_{j0} , φ_0 — параметры, определяемые из решения задачи электроупругости для рассматриваемой области тела, но без щели, а интегрирование ведется по обоим берегам разреза.

2. Туннельная трещина на границе с проводником. Постановка задачи. Рассмотрим неограниченное полупространство $z \geq 0$ из пьезоэлектрического материала. Прямолинейный разрез расположен в плоскости изотропии $z = 0$ поперечно-изотропной среды (текстуры класса $\infty \cdot m$, кристаллы гексагональной сингонии класса $6 \cdot m$) на границе с упругим изотропным проводником ($z \leq 0$), причем берега разреза $-a \leq x \leq a$, $-\infty < y < \infty$ свободны от нагрузки. На бесконечности задано постоянное и параллельное оси z напряжение σ_0 . Задача рассматривается для случая плоской деформации.

Следуя [1], можно (1.1) переписать в матричной форме, если осуществить замену индексов по следующей схеме:

$$\begin{aligned} 11 &\sim 1, & 23 &= 32 \sim 4 \\ 22 &\sim 2, & 13 &= 31 \sim 5 \\ 33 &\sim 3, & 12 &= 21 \sim 6 \end{aligned}$$

Матрицы модулей упругости c_{ij}^E , пьезоэлектрических модулей e_{ik} , диэлектрических проницаемостей ϵ_{kl}^s ($i, j = 1, 2, \dots, 6$; $k, l = 1, 2, 3$) для рассматриваемых текстур и кристаллов имеют вид

$$(2.1) \quad \left\| c_{ij}^E \right\| = \begin{vmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) \end{vmatrix} \quad \left\| e_{ik} \right\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left\| \epsilon_{kl}^s \right\| = \text{diag} [\epsilon_{11}^s, \epsilon_{11}^s, \epsilon_{33}^s]$$

На основании (1.1), (2.1) уравнения пьезоэлектрической среды для случая плоской деформации, определяемой вектором смещений $u^+ \{u^+(x, z), 0, w^+(x, z)\}$ ($z \geq 0$) и потенциалом $\varphi(x, z)$, будут

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}^+ &= c_{11}^E \frac{\partial u^+}{\partial x} + c_{13}^E \frac{\partial w^+}{\partial z} - e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \sigma_{zz}^+ &= c_{13}^E \frac{\partial u^+}{\partial x} + c_{33}^E \frac{\partial w^+}{\partial z} - e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \sigma_{xz}^+ &= c_{44}^E \left(\frac{\partial u^+}{\partial z} + \frac{\partial w^+}{\partial x} \right) - e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ D_x &= e_{15} \left(\frac{\partial u^+}{\partial z} + \frac{\partial w^+}{\partial x} \right) + \varepsilon_{11}^s \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ D_z &= e_{31} \frac{\partial u^+}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial w^+}{\partial z} + \varepsilon_{33}^s \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned}$$

С учетом (1.2), (2.2) получим следующие основные уравнения для исследования задачи электроупругости ($z \geq 0$):

$$(2.3) \quad \begin{aligned} c_{11}^E \frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} + c_{44}^E \frac{\partial^2 u^+}{\partial z^2} + (c_{13}^E + c_{44}^E) \frac{\partial^2 w^+}{\partial x \partial z} - (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} &= 0 \\ (c_{13}^E + c_{44}^E) \frac{\partial^2 u^+}{\partial x \partial z} + c_{44}^E \frac{\partial^2 w^+}{\partial x^2} + c_{33}^E \frac{\partial^2 w^+}{\partial z^2} - e_{15} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - e_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0 \\ (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 u^+}{\partial x \partial z} + e_{15} \frac{\partial^2 w^+}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 w^+}{\partial z^2} + \varepsilon_{11}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varepsilon_{33}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}$$

Для изотропной проводящей среды ($z \leq 0$) со смещением точек среды $u^- \{u^-(x, z), 0, w^-(x, z)\}$ имеем

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}^- &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u^-}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w^-}{\partial z} \\ \sigma_{zz}^- &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w^-}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u^-}{\partial x}, \quad \sigma_{xz}^- = \mu \left(\frac{\partial w^-}{\partial x} + \frac{\partial u^-}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

где λ, μ — коэффициенты Ламе, и компоненты тензора (2.4) удовлетворяют уравнениям равновесия (1.2).

В силу линейности уравнений (1.2), (2.2) — (2.4) решение поставленной статической задачи можно искать в виде суммы решений двух следующих задач: задачи об определении напряженного и деформированного состояния, компонент электрического поля и индукции в сплошной пьезоэлектрической среде, скрепленной всюду на плоскости с изотропной средой, под действием постоянного растягивающего напряжения σ_0 на бесконечности (A) и задачи об определении состояния сред со щелью, когда на ее берегах действуют внешние поверхностные силы и поле (B).

Легко проверить, что решение задачи A таково:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} u^+ &= u^- = \sigma_{xx}^+ = \sigma_{xz}^+ = \sigma_{xx}^- = \sigma_{xz}^- = E_x = D_x = 0 \\ \sigma_{zz}^+ &= \sigma_{zz}^- = \sigma_0, \quad w^+ = \frac{e_{31}}{e_{31}c_{33}^E - e_{33}c_{13}^E} \sigma_0 z \\ w^- &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_0 z, \quad \varphi = \frac{c_{13}^E}{e_{31}c_{33}^E - e_{33}c_{13}^E} \sigma_0 z \\ D_z &= \frac{e_{31}e_{33} + \varepsilon_{33}^s c_{13}^E}{e_{31}c_{33}^E - e_{33}c_{13}^E} \sigma_0 \end{aligned}$$

Решение задачи B можно получить при следующих условиях на границе двух сред:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{zz}^+ &= \sigma_{zz}^-, \quad \sigma_{xz}^+ = \sigma_{xz}^-, \quad \varphi = 0, \quad z = 0, \quad -\infty < x < \infty \\ u^+ &= u^-, \quad w^+ = w^-; \quad z = 0, \quad |x| > a \\ \sigma_{zz}^+ &= -\sigma_0, \quad \sigma_{xz}^+ = 0; \quad z = 0, \quad |x| < a \\ u^+ &= w^+ = \varphi = u^- = w^- = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

3. Система сингулярных интегральных уравнений. Будем искать решение уравнений (2.3) при $z \geq 0$ с помощью интегрального преобразования Фурье

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u^+(x, z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U(p, pz) \sin px \, dp \\ w^+(x, z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty W(p, pz) \cos px \, dp \\ \varphi(x, z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \Phi(p, pz) \cos px \, dp, \quad z \geq 0, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Подставляя (3.1) в (2.3), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций U, W, Φ . Частные решения этой системы для $z \geq 0$, удовлетворяющие условиям на бесконечности, запишем в виде

$$U = \alpha e^{-kz}, \quad W = \beta e^{-kz}, \quad \Phi = \gamma e^{-kz}$$

Здесь k — корень с положительной действительной частью бикубического характеристического уравнения

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \det \| a_{kl} \| &= 0 \\ a_{11} &= c_{44}^E k^2 - c_{11}^E, \quad a_{12} = -a_{21} = (c_{13}^E + c_{44}^E) k, \quad a_{22} = \\ &= c_{33}^E k^2 - c_{44}^E \\ a_{13} &= -a_{31} = -(e_{31} + e_{15}) k, \quad a_{23} = -a_{32} = \\ &= -e_{33} k^2 + e_{15}, \quad a_{33} = \varepsilon_{33} k^2 - \varepsilon_{11} \end{aligned}$$

Анализ уравнения (3.2) показывает, что для известных пьезокерамик, относящихся к рассматриваемым классам сред, оно имеет два действительных корня $\pm k_1$ и четыре попарно сопряженных комплексных корня $\pm \sigma \pm i\omega$, причем $k_1, \delta, \omega > 0$. Постоянные $\alpha(k), \beta(k), \gamma(k)$, являющиеся решением однородной системы уравнений с матрицей $\| a_{kl} \|$, определим по формулам

$$\alpha = a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}, \quad \beta = -a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}, \quad \gamma = a_{11} a_{22} + a_{12}^2$$

Таким образом, общее решение для U, W, Φ можно представить в виде

$$(3.3) \quad \begin{bmatrix} U \\ W \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} A_1 e^{-k_1 z} + \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{21} + i\alpha_{22} \\ \beta_{21} + i\beta_{22} \\ \gamma_{21} + i\gamma_{22} \end{bmatrix} (B_1 + iC_1) e^{-z(\delta + i\omega)} \right\}$$

$$\alpha_1 = \alpha(k_1), \quad \beta_1 = \beta(k_1), \quad \gamma_1 = \gamma(k_1)$$

$$\alpha_{21} + i\alpha_{22} = \alpha(\delta + i\omega), \quad \beta_{21} + i\beta_{22} = \beta(\delta + i\omega)$$

$$\gamma_{21} + i\gamma_{22} = \gamma(\delta + i\omega)$$

Здесь $A_1(p), B_1(p), C_1(p)$ — функции, подлежащие определению из граничных условий.

Используя (3.1) и (3.3), получим следующие выражения для смещений и потенциала:

$$(3.4) \quad u^+(x, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [\alpha_1 A_1(p) e^{-k_1 p z} + (\alpha_{21} B_1(p) - \alpha_{22} C_1(p)) e^{-\delta p z} \times \\ \times \cos \omega p z + (\alpha_{22} B_1(p) + \alpha_{21} C_1(p)) e^{-\delta p z} \sin \omega p z] \sin p x dp$$

$$w^+(x, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [\beta_1 A_1(p) e^{-k_1 p z} + (\beta_{21} B_1(p) - \beta_{22} C_1(p)) e^{-\delta p z} \times \\ \times \cos \omega p z + (\beta_{22} B_1(p) + \beta_{21} C_1(p)) e^{-\delta p z} \sin \omega p z] \cos p x dp$$

$$\varphi(x, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [\gamma_1 A_1(p) e^{-k_1 p z} + (\gamma_{21} B_1(p) - \gamma_{22} C_1(p)) e^{-\delta p z} \times \\ \times \cos \omega p z + (\gamma_{22} B_1(p) + \gamma_{21} C_1(p)) e^{-\delta p z} \sin \omega p z] \cos p x dp$$

На основании (2.2) и (3.4)

$$w^+(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [\beta_1 A_1(p) + \beta_{21} B_1(p) - \beta_{22} C_1(p)] \cos p x dp$$

$$u^+(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [\alpha_1 A_1(p) + \alpha_{21} B_1(p) - \alpha_{22} C_1(p)] \sin p x dp$$

$$\varphi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [\gamma_1 A_1(p) + \gamma_{21} B_1(p) - \gamma_{22} C_1(p)] \cos p x dp$$

$$\sigma_{xz}^+(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [m_1 A_1(p) + m_2 B_1(p) - m_3 C_1(p)] p \sin p x dp$$

$$\sigma_{zz}^+(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left[\frac{m_1}{k_1} A_1(p) + \frac{m_2 \delta + m_3 \omega}{\delta^2 + \omega^2} B_1(p) - \right. \\ \left. - \frac{m_3 \delta - m_2 \omega}{\delta^2 + \omega^2} C_1(p) \right] p \cos p x dp$$

Здесь введены обозначения

$$m_1 = e_{15} \gamma_1 - c_{44}^E (k_1 \alpha_1 + \beta_1)$$

$$m_2 = e_{15} \gamma_{21} - c_{44}^E (\alpha_{21} \delta - \alpha_{22} \omega + \beta_{21})$$

$$m_3 = e_{15} \gamma_{22} - c_{22}^E (\alpha_{22} \delta + \alpha_{21} \omega + \beta_{22})$$

Использованы равенства

$$c_{13}^E \alpha_1 - c_{33}^E k_1 \beta_1 + e_{33} k_1 \gamma_1 = \frac{m_1}{k_1}$$

$$c_{13}^E \alpha_{21} - c_{33}^E (\beta_{21} \delta - \beta_{22} \omega) + e_{33} (\gamma_{21} \delta - \gamma_{22} \omega) = \frac{m_2 \delta + m_3 \omega}{\delta^2 + \omega^2}$$

$$c_{13}^E \alpha_{22} - c_{33}^E (\beta_{22} \delta + \beta_{21} \omega) + e_{33} (\gamma_{22} \delta + \gamma_{21} \omega) = \frac{m_3 \delta - m_2 \omega}{\delta^2 + \omega^2}$$

Решение уравнений равновесия (1.2) при $z \leq 0$ представим в виде

$$(3.5) \quad u^-(x, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [A_2(p) + B_2(p) pz] e^{pz} \sin px \, dp$$

$$w^-(x, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left[-A_2(p) + B_2(p) \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} - pz \right) \right] e^{pz} \cos px \, dp$$

Здесь $A_2(p)$, $B_2(p)$ — функции, подлежащие определению из граничных условий (2.6).

На основании (2.4), используя (3.5), получим

$$(3.6) \quad u^-(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A_2(p) \sin px \, dp$$

$$w^-(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left[-A_2(p) + B_2(p) \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right] \cos px \, dp$$

$$\sigma_{zz}^-(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty 2\mu \left[-A_2(p) + B_2(p) \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right] p \cos px \, dp$$

$$\sigma_{xz}^-(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty 2\mu \left[A_2(p) - B_2(p) \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right] p \sin px \, dp$$

Удовлетворяя «сквозным» условиям (2.6) на границе двух сред $z = 0$, получим

$$(3.7) \quad C_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_{22}} A_1 + \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{22}} B_1$$

$$A_2 = \frac{\delta_1 (\lambda + 2\mu) + \delta_3 \mu}{2\mu (\lambda + \mu) \gamma_{22}} A_1 + \frac{\delta_2 (\lambda + 2\mu) + \delta_4 \mu}{2\mu (\lambda + \mu) \gamma_{22}} B_1$$

$$B_2 = \frac{\delta_1 + \delta_3}{2\mu \gamma_{22}} A_1 + \frac{\delta_2 + \delta_4}{2\mu \gamma_{22}} B_1$$

Здесь

$$\delta_1 = m_1 \gamma_{22} - m_3 \gamma_1, \quad \delta_2 = m_2 \gamma_{22} - m_3 \gamma_{21}$$

$$\delta_3 = \frac{m_1}{k_1} \gamma_{22} - \frac{m_3 \delta - m_2 \omega}{\delta^2 + \omega^2} \gamma_1, \quad \delta_4 = \frac{(m_2 \delta + m_3 \omega) \gamma_{22} - (m_3 \delta - m_2 \omega) \gamma_{21}}{\delta^2 + \omega^2}$$

Введем функции

$$w(x) = w^+(x, 0) - w^-(x, 0), \quad u(x) = u^+(x, 0) - u^-(x, 0)$$

и, удовлетворяя остальным условиям (2.6), получим систему парных интегральных уравнений для функций $A_1(p)$, $B_1(p)$

(3.8)

$$\sigma_{xz}^+(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\gamma_{22}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} [\delta_1 A_1(p) + \delta_2 A_2(p)] \cos px \, dp = 0, \quad 0 \leq x < a$$

(3.9)

$$\sigma_{zz}^+(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\gamma_{22}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} [\delta_3 A_1(p) + \delta_4 A_2(p)] \sin px \, dp = -\sigma_0, \quad 0 \leq x < a$$

$$(3.10) \quad w(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\gamma_{22}} \int_0^{\infty} [\delta_5 A_1(p) + \delta_6 B_1(p)] \cos px \, dp = 0, \quad x > a$$

$$(3.11) \quad u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\gamma_{22}} \int_0^{\infty} [\delta_7 A_1(p) + \delta_8 B_1(p)] \sin px \, dp = 0, \quad x > a$$

Здесь

$$\delta_5 = \beta_{11}\gamma_{22} - \beta_{22}\gamma_{11} - \frac{\delta_1}{2(\lambda + \mu)} - \frac{\delta_3(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)}$$

$$\delta_6 = \beta_{21}\gamma_{22} - \beta_{22}\gamma_{21} - \frac{\delta_2}{2(\lambda + \mu)} - \frac{\delta_4(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)}$$

$$\delta_7 = \alpha_{11}\gamma_{22} - \alpha_{22}\gamma_{11} - \frac{\delta_1(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} - \frac{\delta_3}{2(\lambda + \mu)}$$

$$\delta_8 = \alpha_{21}\gamma_{22} - \alpha_{22}\gamma_{21} - \frac{\delta_2(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} - \frac{\delta_4}{2(\lambda + \mu)}$$

Покажем, что система парных интегральных уравнений (3.8) — (3.11) может быть сведена к системе сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши.

Представим соотношение (3.10), (3.11) в виде

$$(3.12) \quad \int_0^{\infty} [\delta_5 A_1(p) + \delta_6 B_1(p)] \cos px \, dp = \begin{cases} \gamma_{22} \sqrt{\frac{\pi}{2}} w(x), & 0 \leq x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} [\delta_7 A_1(p) + \delta_8 B_1(p)] \sin px \, dp = \begin{cases} \gamma_{22} \sqrt{\frac{\pi}{2}} u(x), & 0 \leq x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

Воспользуемся следующими формальными представлениями обобщенных функций:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin pt \sin px \, dp = \delta(x - t), \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos pt \cos px \, dp = \delta(x - t)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\infty} \sin pt \sin px \frac{dp}{p} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+x}{t-x} \right| \right)$$

или

$$\int_0^{\infty} \sin pt \cos px \, dp = \frac{t}{t^2 - x^2}$$

Выразим $A_1(p)$ и $B_1(p)$ из (3.12) и преобразуем (3.8), (3.9) к виду

$$(3.13) \quad g_{11}w(x) + g_{12} \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{u(t)t dt}{t^2 - x^2} = C_0$$

$$- g_{21} \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{w(t)x dt}{t^2 - x^2} + g_{22}u(x) = \sigma_0 x, \quad 0 \leq x < a$$

(C_0 — постоянная, которая будет определена ниже). Здесь

$$g_{11} = \frac{1}{\Delta} (\delta_7 \delta_2 - \delta_8 \delta_1), \quad g_{12} = \frac{1}{\Delta} (\delta_6 \delta_1 - \delta_5 \delta_2)$$

$$g_{21} = \frac{1}{\Delta} (\delta_7 \delta_4 - \delta_8 \delta_3), \quad g_{22} = \frac{1}{\Delta} (\delta_6 \delta_3 - \delta_5 \delta_4)$$

$$\Delta = \delta_5 \delta_8 - \delta_6 \delta_7$$

Из формул (3.12) видно, что $w(-x) = w(x)$ и $u(-x) = -u(x)$, и, следовательно

$$2 \int_0^a \frac{w(t)x dt}{t^2 - x^2} = \int_{-a}^a \frac{w(t) dt}{t - x}, \quad 2 \int_0^a \frac{u(t)t dt}{t^2 - x^2} = \int_{-a}^a \frac{u(t) dt}{t - x}$$

Подставив эти выражения в (3.13), получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши относительно функций $w(x)$, $u(x)$:

$$(3.14) \quad g_{11}w(x) + g_{12} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u(t) dt}{t - x} = C_0$$

$$(3.15) \quad -g_{21} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{w(t) dt}{t - x} + g_{22}u(x) = \sigma_0 x$$

4. Решение задачи электроупругости. Перейдем к решению системы интегральных уравнений (3.14), (3.15). Умножая (3.15) на ig_1 и складывая с (3.14), получим одно сингулярное интегральное уравнение

$$(4.1) \quad f(x) + g \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{t - x} = \frac{C_0}{g_{11}} + \frac{ig_1}{g_{22}} \sigma_0 x$$

$$f(x) = w(x) + ig_1 u(x), \quad g_1 = \sqrt{\frac{g_{12}g_{22}}{g_{11}g_{21}}}, \quad g = \frac{g_{21}}{g_{22}} g_1$$

Отметим, что для реальных пьезоэлектрических и упругих сред

$$g_{11} / g_{12} > 0, \quad g_{21} / g_{22} > 0, \quad g > 1$$

Например, для композиции пьезокерамики PZT-4 [1] и стали (модуль упругости $E = 20 \cdot 10^{10}$ н/м², коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$)

$$g_{11} = 0.14 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2, \quad g_{12} = 6.1 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2, \quad g_{21} = 2.9 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2$$

$$g_{22} = 0.18 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2, \quad g_1 = 1.6, \quad g = 26$$

Следуя [5], для решения (4.1) введем функцию

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{t-z}$$

аналитическую в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрезка $-a \leq x \leq a$ действительной оси. Граничные значения непрерывного продолжения $F(z)$ на отрезок $-a \leq x \leq a$ слева и справа определяются по формулам Сохоцкого — Племеля

$$(4.2) \quad F^+(x) + F^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{t-x}, \quad F^-(x) - F^+(x) = f(x)$$

После подстановки (4.2) в (4.1) получаем краевую задачу Римана

$$(4.3) \quad F^+(x) + \frac{g-1}{g+1} F^-(x) = \frac{1}{g+1} \left(\frac{C_0}{g_{11}} + i \frac{g_1}{g_{22}} \sigma_0 x \right)$$

Определим частное решение однородной задачи Римана, ограниченное вблизи концов $x = \pm a$ и обращающееся на них в нуль, в виде

$$X(z) = (z+a)^{1/2-ix} (z-a)^{1/2+ix}, \quad \kappa = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{g+1}{g-1}$$

Тогда решение задачи (4.3), ограниченное вблизи концов, будет

$$(4.4) \quad F(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{1}{g+1} \left(\frac{1}{g_{11}} C_0 + i \frac{g_1}{g_{22}} \sigma_0 t \right) \frac{dt}{X^+(t)(t-z)}$$

Здесь $X^+(x)$ — значение $X(z)$ на левом берегу разреза. Поскольку в рассматриваемой задаче разности смещений w, u обращаются в нуль на бесконечности, следует потребовать, чтобы $F(\infty) = 0$, что приводит к условию

$$(4.5) \quad \int_{-a}^a \left(\frac{1}{g_{11}} C_0 + i \frac{g_1}{g_{22}} \sigma_0 t \right) \frac{dt}{X^+(t)} = 0$$

Используя известные методы вычисления интегралов [5], получим

$$(4.6) \quad C_0 = \frac{g_1 g_{11}}{g_{22}} 2\kappa a \sigma_0$$

а из (4.4) с учетом (4.6) общее решение краевой задачи (4.3) в виде

$$(4.7) \quad F(z) = -i \frac{g_1}{2g g_{22}} \sigma_0 [X(z) - z + i2a\kappa]$$

Подставляя (4.7) в (4.2), найдем

$$(4.8) \quad f(x) = w(x) + i g_1 u(x) = -i \frac{g_1}{2g g_{22}} \sigma_0 [X^+(x) - X^-(x)]$$

$$(4.9) \quad \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{t-x} = \frac{\pi g_1}{2g g_{22}} \sigma_0 [X^+(x) + X^-(x) - 2x + i4a\kappa]$$

$$X^\pm(x) = \pm i e^{\mp \kappa \pi} \sqrt{a^2 - x^2} \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^{\mp i \kappa}, \quad |x| < a$$

$$X^+(x) = X^-(x) = \sqrt{x^2 - a^2} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^{-i \kappa}, \quad x > a$$

Таким образом, напряжения, смещения и компоненты электрического поля можно получить в каждой точке среды в явном виде. В частности, равенство смещения берегов трещины $w(x)$ и нормальные напряжения $\sigma_{zz}(x, 0)$ представимы следующими выражениями:

$$(4.10) \quad w(x) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{g_{21}} \operatorname{ch} \kappa \pi \sqrt{a^2 - x^2} \cos \left(\kappa \ln \frac{a-x}{a+x} \right), & |x| < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

$$\sigma_{zz}(x, 0) = \frac{d}{dx} \left(g_{21} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{w(t) dt}{t-x} - g_{22} u(x) \right) =$$

$$= \begin{cases} -\sigma_0 & |x| < a \\ \frac{\sigma_0}{\sqrt{x^2 - a^2}} \left[x \cos \left(\kappa \ln \frac{x+a}{x-a} \right) + 2a\kappa \sin \left(\kappa \ln \frac{x+a}{x-a} \right) \right] - \sigma_0, & x > a \end{cases}$$

Из формул (4.10) следует, что смещение, напряжения и другие физические величины имеют осциллирующий характер и изменяют знак бесконечное число раз при стремлении x к концам разреза ($x = \pm a$).

Для пьезокерамик, приведенных в [1], участки изменения знака расположены в весьма малых окрестностях концов разреза $|x| \leq a$. Значения параметра $d = (g+1)/(g-1)$ в (4.3) для значительного числа композиций пьезокерамик с проводниками меньше трех (например, для составной среды пьезокерамики PZT-4 со сталью $d = 1.08$, с медью $d = 1.03$). Для окрестности, в которой значения физических величин носят осциллирующий характер, вытекает [5] оценка $|a-x| < 5 \cdot 10^{-4}a$.

Таким образом, перемена знака рассматриваемых величин происходит в той малой окрестности вблизи концов разреза, в которой полученное решение не отражает действительного состояния из-за отступления от линеаризованных законов пьезоэлектрической среды. Для определения величины критической нагрузки воспользуемся условием (1.7).

Приняв во внимание, что

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \cos \left(\kappa \ln \frac{a+x}{a-x} \right) dx = \frac{\pi a^2 (1 + 4\kappa^2)}{4 \operatorname{ch} \kappa \pi}$$

получим выражение, связывающее длину трещины [и приложенную нагрузку

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{8g_{21}\gamma}{\pi a (1 + 4\kappa^2)}}$$

Поступила 23 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Physical acoustics. Ed by Mason W. P., vol. I, p. A. New York—London, Academic press, 1964.
2. Седов Л. И. Механика сплошных сред. М., «Наука», 1973.
3. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near end of a crack. J. Appl. Mech, 1957, vol. 24, № 3.
4. Партон В. З., Черепанов Г. П. Механика разрушения. В сб.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3, М., «Наука», 1972.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.