Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 532.52

О ЛАМИНАРНОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ В ТРУБАХ И КАНАЛАХ

В. В. Струминский

(Москва)

На основании разработанного автором [1] нового метода решения системы кинетических уравнений и сведения их к гидродинамической системе уравнений решается простейшая задача о течении газовой смеси между параллельными пластинами и в круглой трубе. Получен обобщенный закон Пуазейля для течения бинарной газовой смеси, позволяющей сделать ряд важных для практики выводов.

Рассмотрим установившееся движение вдоль оси x бинарной газовой смеси между двумя плоскостями, удаленными от начала координат на расстояние $y = \pm h$. В этом случае система гидродинамических уравнений для газовой смеси в приближении Навье — Стокса [1] может быть записана в виде (u_1, u_2 — средние скорости каждой компоненты, D_{12} — коэффициент бинарной диффузии)

$$\frac{\partial^2 u_1}{dy^2} + \frac{d}{\mu_1}(u_2 - u_1) = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial P_1}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{dy_2} + \frac{d}{\mu_2}(u_1 - u_2) = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial P_2}{\partial x}$$

$$d = \frac{16}{3}\frac{\rho_1\rho_2}{m_1 + m_2}\,\Omega_{12}^{(1,1)} = \frac{n_1 n_2}{nD_{12}}kT$$

Граничные условия: $u_1(\pm h) = u_2(\pm h) = 0$.

Из (1) нетрудно получить

$$\mu_1\frac{d^2u_1}{dy^2} + \mu_2\frac{d^2u_2}{dy^2} = \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} \tag{2}$$

После интегрирования этого выражения и использования граничных условий получим для средней скорости

$$u_* = \frac{\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{1}{2(\mu_1 + \mu_2)}\frac{\partial P}{\partial x}(y^2 - h^2)$$

Видно, что средняя скорость (а для газовых смесей с одинаковыми значениями кинематической вязкости это обычная среднемассовая скорость) определяется классической формулой для плоских течений Пуазейля. Таким образом, в этом случае в среднем в газовой смеси реализуется обычное пуазейлевское распределение скоростей.

Однако движение и распределение скоростей отдельных компонент газа определяется другими законами, которые могут быть установлены путем решения системы уравнений (1). С этой целью дважды продифференцируем по y, например, первое уравнение (1); получим

$$\frac{d^4u_1}{dy^4} + \frac{d}{\mu_1}\left(\frac{d^2u_2}{dy^2} - \frac{d^2u_1}{dy^2}\right) = 0$$

Пользуясь (2), исключим производную d^2u_2/dy^2, тогда получим следующие уравнения для определения u_1:

$$\frac{d^4u_1}{dy^4} - d\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}\right)\frac{d^2u_1}{dy^2} = -\frac{d}{\mu_1\mu_2}\frac{\partial P}{\partial x}$$

Граничные условия могут быть записаны в виде

$$u_1(\pm h) = 0, \qquad \left(\frac{d^2u_1}{dy^2}\right)_{y=\pm h} = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial P_1}{\partial x}$$

В этом случае для скорости u_1 получим следующее выражение:

$$u_1 = \frac{1}{2(\mu_1+\mu_2)}\frac{\partial P}{\partial x}(y^2-h^2) + \frac{\omega_1}{k_0^2}\left(\frac{\operatorname{ch} k_0 y}{\operatorname{ch} k_0 h} - 1\right) \tag{3}$$

$$k_0^2 = d\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}\right) \qquad \omega_1 = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{1}{(\mu_1+\mu_2)}\frac{\partial P}{\partial x}$$

Совершенно аналогично получим выражение для u_2, соответствующее (3) при замене индексов 1 и 2. Видно, что $\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 = 0$. Поэтому из выражений для u_1, u_2 естественно следует выражение для u_*. Так как μ_s положительны, то ω_1 и ω_2 имеют разные знаки.

Из выражений для u_1, u_2 видно, что в бинарной смеси газов распределение скоростей каждой компоненты образуется в виде суммы или разности двух различных распределений: среднего параболического и более сложного распределения скоростей, описываемого гиперболическим косинусом.

По выражениям для u_1, u_2 может быть вычислен расход газа через сечение канала

$$Q_s = \int_{-h}^{+h} v_s dy = -\frac{2h^3}{3}\left[\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{6\omega_s}{(k_0h)^3}(k_0h - \operatorname{th} k_0 h)\right]$$

При малых k_0h получим

$$Q_s = -\frac{2}{3}\frac{h^3}{\mu_s}\frac{\partial P_s}{\partial x}$$

Видно, что в данном случае для каждой компоненты газа расход определяется парциальным давлением и своим коэффициентом вязкости. В этом случае компоненты газа ведут себя независимо одна от другой. Однако при больших значениях k_0h расход и распределение скоростей различных компонент будет несущественно отличаться от значений, соответствующих классическому пуазейлевскому закону течения в канале. Таким образом, характер течения в канале бинарной смеси газов зависит от параметра k_0h.

Рассмотрим теперь движение бинарной газовой смеси в круглой трубе радиуса R_0, ось которой совпадает с осью x. В этом случае $v_x = v(r)$, $v_r = v_0 = 0$, и соответствующая система уравнений [1] может быть записана в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{d}{\mu_1}(v_2 - v_1) = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial P_1}{\partial x} \tag{4}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{d}{\mu_2}(v_1 - v_2) = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial P_2}{\partial x}$$

Из этой системы нетрудно получить

$$\mu_1 \frac{d}{dr} r \frac{dv_1}{dr} + \mu_2 \frac{d}{dr} r \frac{dv_2}{dr} = r \frac{\partial P}{\partial x} \tag{5}$$

Интегрируя дважды по r и пользуясь граничными условиями прилипания на стенке при $r = R_0$, найдем среднюю скорость

$$v_* = \frac{\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{1}{4(\mu_1 + \mu_2)} \frac{\partial P}{\partial x} (r^2 - R_0^2) \tag{6}$$

Видно, что некоторая средняя скорость (а для газов с одинаковыми значениями кинематической вязкости это обычная среднемассовая скорость) определяется классической формулой Пуазейля. Для определения распределения скоростей отдельных компонент газа необходимо решить систему уравнений (4), используя условия прилипания скорости на стенке и ограниченность значений скорости внутри трубы. Дважды дифференцируя первое из уравнений (4) с одновременным выполнением несложных преобразований, получим

$$\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dv_1}{dr} - \frac{d}{\mu_1} \left(\frac{d}{dr} r \frac{dv_2}{dr} - \frac{d}{dr} r \frac{dv_1}{dr} \right) = 0$$

Исключив отсюда v_2 при помощи соотношения (5), получим (величина k_0^2 определяется соотношением в (3))

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dz}{dr} - k_0^2 z = - \frac{d}{\mu_1 \mu_2} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dv_1}{dr} \tag{7}$$

Общее решение уравнения (7), ограниченное в нуле, имеет вид ($I_0(x)$ — функция Бесселя)

$$z = cI_0(k_0 r) + \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Из первого уравнения (4) видно, что на стенке трубы

$$z_{r=R_0} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

Из этого условия можно определить произвольную постоянную, тогда получим

$$z = \omega_1 \frac{I_0(k_0 r)}{I_0(k_0 R_0)} + \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Умножая это выражение на r и интегрируя по r от 0 до r, а затем умножая результат на $1/r$ и интегрируя по r от r до R_0, окончательно получим

$$v_1 = \frac{1}{4(\mu_1 + \mu_2)} \frac{\partial P}{\partial x} (r^2 - R_0^2) + \frac{\omega_1}{k_0^2} \frac{I_0(k_0 r) - I_0(k_0 R_0)}{I_0(k_0 R_0)} \tag{8}$$

Выполняя аналогичные операции со вторым уравнением (4) получим выражение для v_2, соответствующее (8) при замене индексов 1 и 2.

Видно, что распределение скоростей отдельных компонент газа определяется более сложным законом по сравнению с параболическим законом Пуазейля. Однако нетрудно показать, что средняя скорость по-прежнему будет определяться параболическим законом (6).

Вычисление расхода газа через сечение трубы дает

$$Q_s = -\frac{\pi R_0^4}{8}\left\{\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{8\omega_s}{k_0^2R_0^2}\left[1-\frac{2}{k_0R_0}\frac{I_1(k_0R_0)}{I_0(k_0R_0)}\right]\right\} \tag{9}$$

При малых k_0R_0 выражение (9) переходит в формулу Пуазейля, но с парциальным градиентом давления и вязкостью для данной компоненты газовой смеси

$$Q_s = -\frac{\pi R_0^4}{8\mu_s}\frac{\partial P_s}{\partial x}$$

При $k_0R_0 \gg 1$ получим выражение для расхода, совпадающее с классическим законом Пуазейля

$$Q_s = -\frac{\pi R_0^4}{8(\mu_1+\mu_2)}\frac{\partial P}{\partial x}$$

Это выражение является точным следствием закона (6).

Из выражений (3), (8) видно, что скорости потоков газа состоят из двух слагаемых. Некоторой средней скорости, одинаковой для каждой компоненты, и добавки, имеющей разные знаки у разных компонент, причем средние скорости, образованные из этих добавок, равны нулю. Поэтому добавочные скорости связаны очевидным образом с диффузионными скоростями потока и равны:

Для течений между параллельными пластинками

$$w_s = \frac{\omega_s}{k_0^2}\left\{\frac{\operatorname{ch} k_0 y}{\operatorname{ch} k_0 h}-1\right\}$$

Для течений в круглой трубе

$$w = \frac{\omega_s}{k_0^2}\left[\frac{I_0(k_0 r)}{I_0(k_0R_0)}-1\right]$$

Эти скорости потока вызваны продольными градиентами давления. Они удовлетворяют граничным условиям прилипания на стенке трубы. Приведенные в [2] выражения для диффузионных скоростей являются приближенными и в общем случае не могут удовлетворять условиям прилипания.

Из выражений (8), (9) для круглой трубы видно, что характер течения будет существенно зависеть от безразмерного параметра k_0R_0. Величина этого параметра может быть выражена следующим образом через параметры потока:

$$k_0^2 = \frac{n_1n_2}{n_1+n_2}\frac{(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2}\frac{kT}{D_{12}}$$

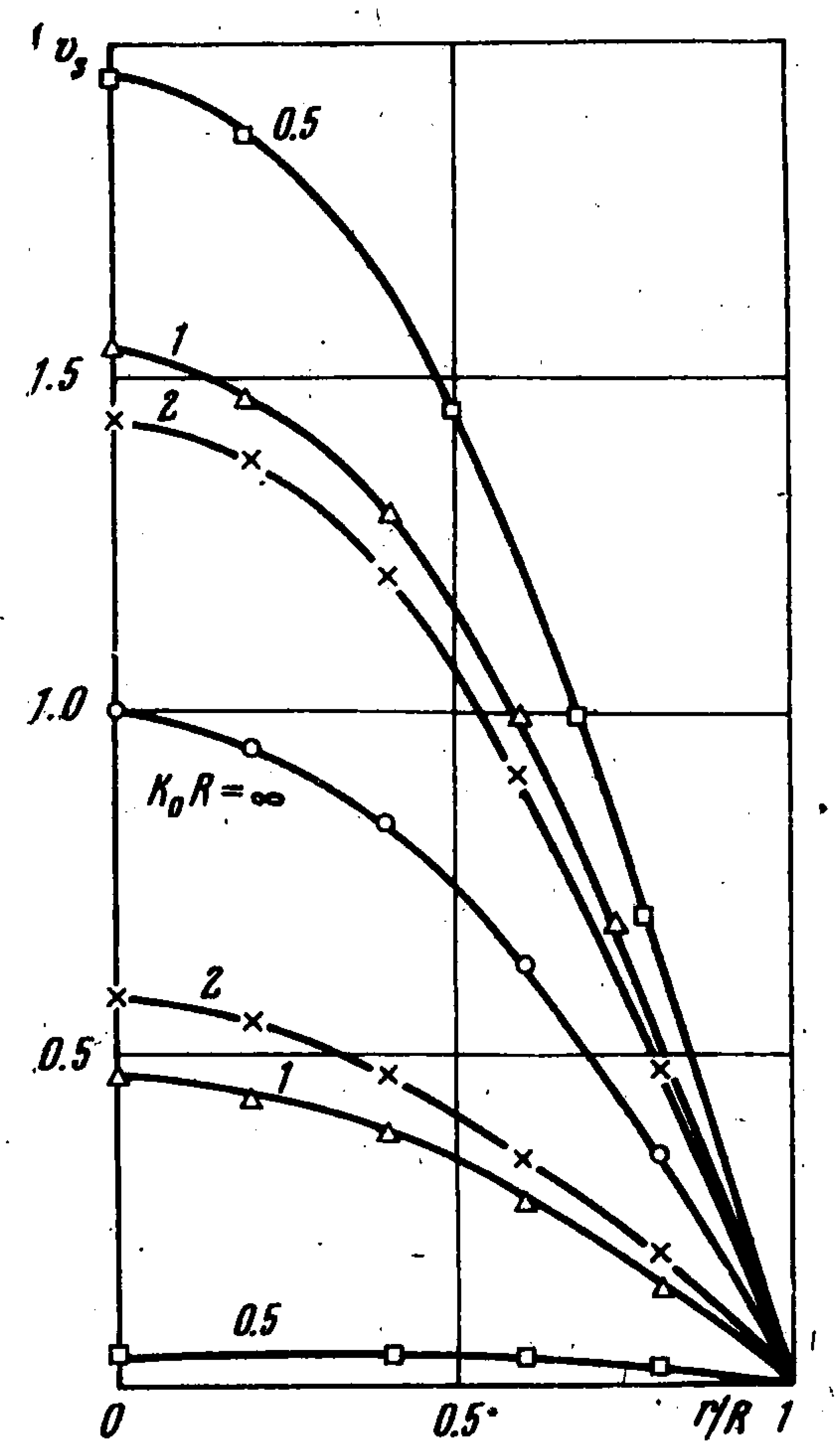
Для молекул, взаимодействующих по законам упругих сфер, коэффициент бинарной диффузии D_{12} может быть записан в виде

$$D_{12} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi kT}{2m_{12}}}\frac{1}{\pi n\sigma^2}$$

После несложных преобразований найдем следующее приближенное выражение:

$$(k_0R_0)^2 \approx \frac{1+\mu_2/\mu_1}{\left(1+\frac{n_2}{n_1}\right)\sqrt{1+m_2/m_1}}\frac{(2R_0)^2}{\lambda_2\lambda_{12}}$$

Как видно, величина параметра k_0R_0 обратно пропорциональна длине свободного пробега — числу Кнудсена. Поэтому в общем случае $k_0R_0 \gg 1$ и течение газовой смеси будет мало отличаться от течения однородного газа. Однако при малых значениях этого параметра отличие будет существенным. На фигуре представлено распределение относительных скоростей по радиусу трубы в бинарной газовой смеси для разных значений безразмерного параметра k_0R_0 (значениям $k_0R \gg 1$ соответствует обычный закон Пуазейля). При этом было принято, что градиент парциального давления для одного газа равен нулю, для другого отличен от нуля. Как видно, в широком диапазоне значений этого параметра распределения скоростей разных компонент будут существенно различаться. При $k_0R_0 = {}^1/_2$ скорости различаются на порядок.



Из приведенных результатов вытекает ряд новых закономерностей и обнаруживаются интересные явления. Например, газ, двигающийся под действием парциального давления, приводит в движение покоящийся газ, не имеющий градиента парциального давления. В данном случае имеем дело с молекулярным эжектором. Эффективность работы молекулярного эжектора может быть определена на основе изложенной выше теории. В ряде случаев можно привести в движение газ в направлении, противоположном его градиенту давления.

Разработанная здесь теория и обнаруженные явления играют большую роль в целом ряде практически важных задач и, в частности, в проблемах разделения смесей газов и жидкостей с помощью пористых и полупроницаемых мембран.

Поступила 24 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Струминский В. В.* Влияние диффузионной скорости на течение газовых смесей. ПММ, 1974, т. 38 вып. 2.
2. *Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей М., Изд-во иностр. лит. 1961.