Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 62—50

УБЕГАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОТИПНЫХ ОБЪЕКТОВ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

П. Б. Гусятников

(Москва)

Приводится достаточное условие уклонения от встречи в игре двух нелинейных объектов с интегральными ограничениями на управление.

1. Пусть t_0 — фиксированное вещественное число. И пусть законы движения преследующего вектора $x \in E^n$ и убегающего вектора $y \in E^n$ описываются при $t \geqslant t_0$ векторными дифференциальными уравнениями

$$(1.1)\quad d^k x / dt^k = L(t, X) + u,\ x = \operatorname{col}(x^1, \ldots, x^n), \qquad u = u(t) \in E^n$$

$$X = \operatorname{col}\{x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k-1)}\};\ x^{(i)} = d^i x / dt^i, \qquad 0 \leqslant i \leqslant k-1$$

$$L(t, X) = L(t, x^{(0)1}, \ldots, x^{(0)n}, x^{(1)1}, \ldots, x^{(k-1)n})$$

$$(1.2)\quad d^l y / dt^l = H(t, Y) + v,\ y = \operatorname{col}(y^1, \ldots, y^n), \qquad v = v(t) \in E$$

$$Y = \operatorname{col}\{y^{(0)}, \ldots, y^{(l-1)}\};\ y^{(j)} = d^j y / dt^j, \qquad 0 \leqslant j \leqslant l-1$$

$$H(t, Y) = H(t, y^{(0)1}, \ldots, y^{(0)n}, y^{(1)1}, \ldots, y^{(l-1)n})$$

Здесь E^n—евклидово, n-мерное пространство, u (v) — всюду конечная измеримая при $t \geqslant t_0$ вектор-функция, скалярный квадрат которой суммируем на любом отрезке $[t_1, t_2] \subset [t_0, +\infty]$, называемая управлением преследователя (убегающего), X (Y) — фазовый вектор преследователя (убегающего) $L(t, X)$, $H(t, Y)$ — непрерывные, вместе со всеми своими частными производными первого порядка, по совокупности переменных вектор-функции.

Будем предполагать, что для игры (1.1), (1.2) выполнено следующее условие: каков бы ни был набор $z_* = \{t_*, X_*, Y_*\}$, $t_* \geqslant t_0$, называемый (начальной) точкой игры, и каковы бы ни были управления игроков, решения $X(t)$ и $Y(t)$ уравнений соответственно (1.1) и (1.2) в смысле Каратеодори [1] с начальными значениями $X(t_*) = X_*$, $Y(t_*) = Y_*$ существуют на всем интервале $[t_*, +\infty]$.

На управления игроков наложены следующие ограничения:

$$(1.3)\qquad \int_{t_0}^{+\infty} \rho(t, X(t))(u(t) \cdot u(t))\, dt \leqslant \rho^2$$

$$(1.4)\qquad \int_{t_0}^{+\infty} \sigma(t, Y(t))(v(t) \cdot v(t))\, dt \leqslant \sigma^2$$

где $\rho(t, X) > 0$ и $\sigma(t, Y) > 0$ — непрерывно дифференцируемые по совокупности аргументов скалярные функции, $\rho > 0$ и $\sigma > 0$ — фиксированные константы.

Для объектов, описываемых условиями (1.1)—(1.4), рассмотрим задачу об уклонении от встречи (см. [2, 3]): по известной убегающему информации в каждый момент t выбрать управляющий вектор $v(t)$ так, чтобы не допустить ни при каком конечном t выполнения равенства $x(t) = y(t)$.

Предполагается, что убегающий знает в каждый момент t точку $z(t) = \{t, X(t), Y(t)\}$ игры и управляющий вектор $u(t)$.

2. Скажем, что убегающий имеет маневренное превосходство над преследователем, если выполнено одно из двух условий: 1) $l < k$; 2) при $l = k$

$$\sigma > \rho \tag{2.1}$$

$$\sigma(t, y^{(0)}, \ldots, y^{(l-1)}) \leqslant \rho(t, x^{(0)}, \ldots, x^{(k-1)}) \tag{2.2}$$

как только $x^{(0)} = y^{(0)}$.

Теорема об уклонении от встречи. Если убегающий имеет маневренное превосходство над преследователем, то уклонение от встречи возможно. При этом, какой бы ни была начальная точка игры $z_0 = \{t_0, X_0, Y_0\}$, удовлетворяющая условию $x_0^{(0)} \neq y_0^{(0)}$, надлежащим выбором управления убегания $v = v(t)$ можно обеспечить следующую оценку для расстояния $\xi(t) = |\psi(t)|$, $\psi(t) = y(t) - x(t)$ между игроками:

$$\xi(t) \geqslant \begin{cases} \varepsilon_2\gamma(\eta(t))(\xi(t_0))^l, & t_0 \leqslant t \leqslant T_2 \quad \text{при} \quad \xi(t_0) < \varepsilon \\ \varepsilon_2\gamma(\eta(t))\varepsilon^l, & t_0 \leqslant t \leqslant T_2 \quad \text{при} \quad \xi(t_0) \geqslant \varepsilon \\ \varepsilon_m\gamma(\eta(t)), & T_{m-1} \leqslant t \leqslant T_m; \quad m = 3, 4, \ldots, (T_m \to \infty, m \to \infty) \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\eta(t) = \eta(t, X, Y) = [1 + t^2 + |x^{(0)}|^2 + \ldots + |x^{(k-1)}|^2 + |y^{(0)}|^2 + \ldots$$
$$\ldots + |y^{(l-1)}|^2]^{1/2}$$

Здесь $\varepsilon, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ — положительные числа и $\gamma(\eta)$ — монотонно убывающая функция своего аргумента, зависящие лишь от задачи (1.1)—(1.4) и не зависящие ни от начальных значений фазовых координат игроков, ни от хода игры; $t_0 < T_2 < T_3 < \ldots$ — последовательность, зависящая не только от задачи (1.1)—(1.4), но еще и от процесса уклонения.

Доказательство теоремы проведем в несколько этапов-рассуждений, следуя схеме работы [2].

Через $(a \cdot b) = a^1b^1 + \ldots + a^nb^n$ обозначим скалярное произведение векторов $a \in E^n$ и $b \in E^n$, $|a| = (a \cdot a)^{1/2}$.

3. Для производной функции $\eta = \eta(t)$ в силу системы (1.1), (1.2) имеем оценку

$$|\eta \cdot \eta^\cdot| = |t + (x \cdot x^\cdot) + \ldots + (x^{(k-1)} \cdot L(t, X) + u) +$$
$$+ (y \cdot y^\cdot) + \ldots + (y^{(l-1)} \cdot H(t, Y) + v)| \leqslant \eta^2 + \eta(|L(t, X)| +$$
$$+ |H(t, Y)| + |u| + |v|)$$

Отсюда

$$|\eta^\cdot| \leqslant \eta + c^*(\eta) + |u| + |v| \leqslant \lambda(\eta) + |u| + |v| \tag{3.1}$$

где

$$c^*(r) = \sup_{\eta(t, X, Y) \leqslant r} \{|L(t, X)| + |H(t, Y)| + \sigma(t, Y)\}$$

$$\lambda(r) = 1 + r + r^2 + c^*(r)$$

(здесь sup в правой части берется по всем возможным наборам $z = \{t, X, Y\}$ фазовых координат, удовлетворяющим ограничению $t \geqslant t_0$, $\eta(t, X, Y) \leqslant r$).

Положим

$$\varepsilon^*(r) = \min\{1, \min_{\eta(t,X,Y)\leqslant r} (\rho(t, X))^{1/2}, \min_{\eta(t,X,Y)\leqslant r} (\sigma(t, Y))^{1/2}\}$$

$$F(r) = \int_0^r \varepsilon^*(s)(\lambda(s))^{-1}\, ds$$

Из непрерывности функций $\varepsilon^*(s) > 0$ и $c^*(s) \geqslant 0$ следует, что функция $F(r)$ определена и строго монотонна на полуинтервале $[0 + \infty]$, так что обратная к ней функция $\Phi(r)$ также строго монотонно возрастает на полуинтервале $[0, \alpha^*)$, где $\alpha^* = \lim_{r\to+\infty} F(r) < +\infty$.

Из соотношения (3.1) вытекает, что при любых начальных значениях $\{t_*, X_*, Y_*\}$, $t_* \geqslant t_0$ и при любых управлениях $u(t)$ и $v(t)$, $t_* \leqslant t < \infty$ для фазовых векторов системы (1.1), (1.2) справедлива оценка ($\varepsilon^*(r) \leqslant 1 \leqslant \lambda(r)$)

$$\left|\frac{dF(\eta(t))}{dt}\right| \leqslant \varepsilon^*(\eta(t))\left(1 + \frac{|u(t)| + |v(t)|}{\lambda(\eta(t))}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 1 + (\rho(t, X(t)))^{1/2}|u(t)| + (\sigma(t, Y(t)))^{1/2}|v(t)|$$

Так что в силу (1.3), (1.4) при $|t - t_*| \leqslant 1$

$$|F(\eta(t)) - F(\eta(t_*))| \leqslant (t - t_*) + (\rho + \sigma)(t - t_*)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \varphi^*(t - t_*)$$
$$\varphi^*(r) = ar^{1/2}, \quad a = 1 + \rho + \sigma$$

и, следовательно

$$\Phi(F(\eta_*) - \varphi^*(t - t_*)) \leqslant \eta(t) \leqslant \Phi(F(\eta_*) +$$
$$+ \varphi^*(t - t_*)), \quad t \in [t_*, t_* + \theta_*] \tag{3.2}$$
$$\eta_* = \eta(t_*), \quad \theta_* = \min\{1, 4\delta^*(\eta_*), \chi(\eta_*)\}$$
$$\delta^*(r) = \left[\frac{\alpha^* - F(r)}{2a}\right]^2, \quad \chi(r) = \frac{F^2(r)}{a^2}$$

Пусть $A = A(w) \in E^n$ — дифференцируемая вектор-функция векторной переменной $w \in E^n$ и пусть b — произвольный вектор из E^n. Под произведением $(\partial A / \partial w \cdot b)$ будем понимать вектор из E^n, каждая компонента которого есть скалярное произведение градиента соответствующей компоненты вектор-функции A на вектор b. Тогда для решений $X(t)$ и $Y(t)$ системы (1.1), (1.2) очевидна оценка

$$\left|\frac{dL(t, X(t))}{dt}\right| + \left|\frac{dH(t, Y(t))}{dt}\right| \leqslant R(t) \tag{3.3}$$

Здесь (sup берется по всем $\eta(t, X, Y) \leqslant r$; $f, w \in E$, $|f| = |w| = 1$

$$\mu_1(r) = \sup\{p(t, X) + q(t, Y)\} + \lambda(r) + \sup\left|\left(\frac{\partial\sigma(t, Y)}{\partial y^{(0)}} \cdot f\right)\frac{1}{\rho(t, X)}\right|$$

$$p(t, X) = \left|\frac{\partial L(t, X)}{\partial t} + \sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{\partial L(t, X)}{\partial x^{(i)}} \cdot x^{(i+1)}\right) + \left(\frac{\partial L(t, X)}{\partial x^{(k-1)}} \cdot L(t, X)\right)\right|$$

$$q(t, Y)=\left|\frac{\partial H(t, Y)}{\partial t}+\sum_{j=0}^{l-2}\left(\frac{\partial H(t, Y)}{\partial y^{(j)}}\cdot y^{(j+1)}\right)+\left(\frac{\partial H(t, Y)}{\partial y^{(l-1)}}\cdot H(t, Y)\right)\right|$$

$$\mu_2(r)=\sup\left\{\left|\left(\frac{\partial L(t, X)}{\partial x^{(k-1)}}\cdot w\right)(\rho(t, X))^{-1/2}\right|+\left|\left(\frac{\partial H(t, Y)}{\partial y^{(l-1)}}\cdot f\right)(\sigma(t, Y))^{-1/2}\right|\right\}$$

$$\Gamma(r)=\max\{\mu_1(r),\ (\mu_2(r))\}$$

(3.4) $$R(t)=\Gamma(\eta(t))+\Gamma(\eta(t))\{(\rho(t, X(t)))^{1/2}|u(t)|+ +(\sigma(t, Y(t)))^{1/2}|v(t)|\}$$

Если $l<k$ то, как легко проверяется

(3.5) $$\left|\frac{dH(t, Y(t))}{dt}\right|+|x^{(l+1)}(t)|\leqslant R(t)$$

4. Введем понятие специального управления убегающего. Рассмотрим сначала случай $l=k$. Пусть $c\in(0,(3\cdot 2^l)^{-1})$ — некоторая константа и $\omega\in E^n$ — произвольный вектор, удовлетворяющий ограничению

(4.1) $$|\omega|\leqslant c$$

Тогда, каково бы ни было управление $u(s)$, $s\geqslant t_0$, существует управление $v_{\omega, c}(s)$ такое, что

(4.2) $$v_{\omega, c}(s)=u(s)+l!\,\omega$$

Пусть $t_*\geqslant t_0$ и $t>t_*$ — произвольные вещественные числа. Умножая (4.2) на $(t-s)^{l-1}$ и интегрируя в пределах от t_* до t, получим (здесь и далее $\tau=t-t_*$)

(4.3) $$\frac{1}{(l-1)!}\int_{t_*}^{t}(t-s)^{l-1}[v_{\omega,c}(s)-u(s)]\,ds=\omega\tau^l$$

В случае $l<k$ специальное управление убегающего зададим формулой

(4.4) $$v_{\omega,c}(s)=\omega l!$$

Тогда

(4.5) $$\frac{1}{(l-1)!}\int_{t_*}^{t}(t-s)^{l-1}v_{\varphi,c}(s)\,ds=\omega\tau^l$$

В п. 5—7 опишем активное поведение убегающего.

5. Пусть игра (1.1)—(1.4) начинается в точке

$$z_*=\{t_*, X_*, Y_*\},\quad t_*\geqslant t_0,\quad 0<|x_*^{(0)}-y_*^{(0)}|=\xi(t_*)<1$$

Пусть при заданных $c>0$ и $\omega\in E$ она развивается под воздействием специального управления $v_{\omega, c}(s)$. Тогда вектор-функция $\psi(t)$ при $t\geqslant t_*$ может быть записана в следующей форме:

(5.1) $$\psi(t)=T_*(\tau)+\frac{1}{(l-1)!}\int_{t_*}^{t}(t-s)^{l-1}[y^{(l)}(s)-x^{(l)}(s)]\,ds$$

$$T_*(\tau)=\psi(t_*)+\sum_{j=1}^{l-1}d_j\tau^j;\quad d_j=(j!)^{-1}(y_*^{(j)}-x_*^{(j)}),\quad 1\leqslant j\leqslant l-1$$

Формула (5.1) получается разложением функции $\psi(t)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Подставляя $x^{(l)}(s)$ и $y^{(l)}(s)$ из соотношений (1.1), (1.2) и интегрируя по частям, получаем (см. (4.3), (4.5))

$$\psi(t) = T(\tau) + \omega\tau^l + h(t)\tau^l, \quad T(\tau) = T_*(\tau) + d_l\tau^l \tag{5.2}$$

$$l!\, d_l = \begin{cases} H(t_*, Y_*) - L(t_*, X_*), & l = k \\ H(t_*, Y_*) - x_*^{(l)}, & l < k \end{cases}$$

$$l!\,\tau^l h(t) = \begin{cases} \int\limits_{t_*}^{t} (t-s)^l \left[\dfrac{d}{ds}\left(H(s, Y(s)) - L(s, X(s))\right)\right] ds, & l = k \\ \int\limits_{t_*}^{t} (t-s)^l \left[\dfrac{d}{ds} H(s, Y(s)) - x^{(l+1)}(s)\right] ds, & l < k \end{cases}$$

Вектор-функция $h(t)$ хотя и зависит от управлений игроков, но все же удовлетворяет (см. (1.3), (1.4), (3.2)—(3.5)) ограничению

$$|h(t)| \leqslant \int\limits_{t_*}^{t} R(s)\, ds \leqslant \alpha(\eta_*, \tau)\,\tau^{1/2}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \theta_* \tag{5.3}$$

Здесь

$$\alpha(\eta_*, \tau) = a\Gamma\left(\Phi\left(F(\eta_*) + \varphi^*(\tau)\right)\right) \tag{5.4}$$

Кроме того, как можно проверить

$$\begin{aligned} &|d_j| \leqslant 2\eta_* \leqslant \lambda(\eta_*) \leqslant \Gamma(\eta_*), \quad 1 \leqslant j \leqslant l-1 \\ &|d_l| \leqslant c^*(\eta_*) + \eta_* \leqslant \lambda(\eta_*) \leqslant \Gamma(\eta_*) \end{aligned} \tag{5.5}$$

6. Если оценка (2.3) будет выполнена для ортогональной проекции кривой (5.2) на какое-либо двумерное подпространство пространства E^n, то она, очевидно, будет выполнена и для самой кривой (5.2). Поэтому без ограничения общности [2] можем считать E^n двумерным. Выберем в E^n ортонормированный базис так, чтобы вектор $\psi(t_*)$ имел в нем компоненты $(\xi_*, 0)$. И пусть в этом базисе

$$d_j = (d_j^1, d_j^2), \; j = 1, \ldots, l; \quad \omega = (\omega^1, \omega^2)$$
$$h(t) = (h^1(t), h^2(t)), \quad T(\tau) = (T^1(\tau), T^2(\tau))$$

Тогда уравнение кривой (5.2) перепишется так:

$$\begin{aligned} \psi^1(t) &= \xi_* + \sum_{j=1}^{l} d_j^1\tau^j + (\omega^1 + h^1(t))\tau^l \\ \psi^2(t) &= \sum_{j=1}^{l} d_j^2\tau^j + (\omega^2 + h^2(t))\tau^l \end{aligned} \tag{6.1}$$

Положим (здесь и в ряде случаев далее зависимость от z_* явно не отмечена) $g(c) = (6/c)^{1/l}$, $\varepsilon(c) \leqslant (c/6)^{2l+1}$ (окончательный выбор $\varepsilon(c)$ осуществим в п. 7).

Обозначим через $\tau = \tau(c) \in (0, \delta^*(\eta_*))$ решение уравнения

$$\begin{aligned} \beta(\tau) \equiv \tau - g(c)(\varepsilon(c))^{1/l} \{1 + \delta^{*l-1}(\eta_*) + \alpha^2(\eta_*, \tau) + \\ + \chi^{-1}(\eta_*)\}^{-1} = 0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

существующее в силу того, что $\beta(\tau)$ непрерывна и $\beta(0) < 0$ и $\beta(\delta^*(\eta_*)) > 0$. Через t^* обозначим число $t_* + \tau(c)$.

Предпишем убегающему на отрезке $[t_*, t^*]$ применять специальное управление $v_{\omega, c}(s)$ такое, что (окончательный выбор ω отложим до п. 7)

$$\omega^1 \in [{}^1/_2 c, {}^3/_4 c], \quad T^1(\tau(c)) \geqslant 0$$

$$\omega^1 \in [-{}^3/_4 c, -{}^1/_2 c], \quad T^1(\tau(c)) < 0$$

Тогда, как легко проверить

$$|\psi^1(t^*)| \geqslant 2\varepsilon(c)\, p^{-l}(\eta_*) > \varepsilon(c)\, p^{-l}(\eta_*)$$

$$p(\eta_*) = 1 + \delta^{*-1}(\eta_*) + \alpha^2(\eta_*, \tau(c)) + \chi^{-1}(\eta_*)$$

Поскольку (см. (3.2))

$$F(\eta(t^*)) \geqslant F(\eta_*) - \varphi^*(\tau(c)) > F(\eta_*) - \frac{\alpha^* - F(\eta_*)}{2} \geqslant \frac{3F(\eta_*) - \alpha^*}{2}$$

и, следовательно

$$\frac{F(\eta(t^*)) + 2\alpha^*}{3} > F(\eta_*) + \varphi^*(\tau(c)) \tag{6.3}$$

то

$$1 < p^l(\eta_*) < \pi(\eta(t^*))$$

$$\pi(r) = \left\{1 + \frac{9}{4}\delta^{*-1}(r) + \left(a\Gamma\left(\Phi\left(\frac{F(r) + 2\alpha^*}{3}\right)\right)\right)^2 + \chi^{-1}(1)\right\}^l$$

Отсюда

$$\xi(t^*) \geqslant |\psi^1(t^*)| > \frac{\varepsilon(c)}{\pi(\eta(t^*))} \tag{6.4}$$

Следующий этап рассуждений наиболее существен в доказательстве теоремы об уклонении от встречи, поскольку именно здесь определяется окончательно величина $\varepsilon(c)$ (а с ней и величина $\tau(c)$) и происходит окончательный выбор вектора ω на отрезке $[t_*, t^*]$.

7. Обозначим через $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ полярные координаты точки $\psi(t)$ кривой (5.2). Положим

$$\alpha = \omega^1 + h^1(t), \quad \beta = \omega^2 + h^2(t) \tag{7.1}$$

Умножая соотношения (6.1) последовательно на $1, \tau, \ldots, \tau^{l-1}$, получаем

$$\rho(t)\cos\varphi(t) = \xi_* + \sum_{j=1}^{l} a_j^1 \tau^j + \alpha\tau^l \tag{7.2}$$

$$\tau\rho(t)\cos\varphi(t) = \tau\xi_* + \sum_{j=1}^{l} d_j^1 \tau^{j+1} + \alpha\tau^{l+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tau^{l-1}\rho(t)\sin\varphi(t) = \sum_{j=1}^{l} d_j^2 \tau^{j+l-1} + \beta\tau^{2l-1}$$

Эти соотношения будем рассматривать как систему $2l$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $1, \tau, \ldots, \tau^{2l-1}$. Решая ее формально относительно неизвестной единицы, находим

$$1 \cdot D = D_1$$

где D — определитель системы, а D_1 — определитель, получающийся из D заменой первого столбца столбцом свободных членов системы (7.2). Вынесем из первого столбца D_1 общий множитель $\rho(t)$ и положим $D_1 = \rho(t) D^*$. Тогда получим

(7.3) $$\rho(t) D^* = D$$

Оценка для D^* очевидна (см. (5.5))

(7.4) $$|D^*| \leqslant (2l)! \, [\Gamma(\eta_*)]^{2l-1}$$

Определитель $D = D(\alpha, \beta)$ — многочлен относительно α и β с коэффициентами, зависящими от точки z_*. Непосредственно видно, что

(7.5) $$D(\alpha, \beta) = p_{0l}\beta^l + \sum_{i,j=0}^{l-1} p_{ij}\alpha^i\beta^j \qquad (p_{0l} = \xi_*{}^l)$$

Пусть p — наибольший по модулю коэффициент многочлена (7.5). Тогда

(7.6) $$D(\alpha, \beta) = ps(\alpha, \beta), \quad |p| \geqslant \xi_*{}^l$$

Здесь $s(\alpha, \beta)$ — многочлен вида (7.5), все коэффициенты которого не превосходят по абсолютной величине единицы, причем один из коэффициентов равен единице.

Этот многочлен будем рассматривать на двух прямоугольниках

$$\Pi_1 = \{5c/8 \leqslant \alpha \leqslant 7c/8, \ -c/8, \leqslant \beta \leqslant c/8\}$$
$$\Pi_2 = \{-7c/8 \leqslant \alpha \leqslant -5c/8, \ -c/8 \leqslant \beta \leqslant c/8\}$$

Дальнейшие рассуждения проведем для Π_1, ибо для Π_2 рассуждения и оценки абсолютно идентичны.

Пусть $b \geqslant a > 0$, $\delta > 0$ и h — произвольные вещественные числа, m — натуральное число. Обозначим через $Q(a, b, h, \delta, m)$ семейство многочленов степени m, рассматриваемых на отрезке $[h - \delta, h + \delta]$, все коэффициенты которых по абсолютной величине не превосходят числа b, но таких, что модуль хотя бы одного из коэффициентов больше или равен a.

Лемма 1. Если $|h| < 1$ и $P(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_m x^m \in Q(a, b, h, \delta, m)$, то

$$P^*(y) = P(y + h) \in Q(a - 2^m b\, |h|\, (1 - |h|)^{-1}, \ 2^m b\, (1 - |h|)^{-1}, \ 0, \ \delta, \ m)$$

Доказательство. После упрощений имеем

(7.7) $$P^*(y) = \sum_{k=0}^{m} p_k{}^* y^k; \qquad p_k{}^* = \sum_{j=k}^{m} p_j C_j^k h^{j-k}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant m$$

Так что

$$|p_k{}^*| \leqslant b \cdot 2^m \sum_{j=k}^{m} |h|^{j-k} \leqslant 2^m b (1 - |h|)^{-1}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant m$$

Если же k_0 таково, что $|p_{k_0}| \geqslant a$, то в силу (7.7)

$$|p_{k_0}^*| \geqslant |p_{k_0}| - \sum_{j=k_0+1}^{m} |p_j| C_i^{k_0} |h|^{j-k_0} \geqslant a - 2^m b |h| (1 - |h|)^{-1}$$

что и требовалось.

Пусть $p(x)$ — многочлен от x, рассматриваемый на $[a^*, \ b^*]$. Положим

$$\|p(x)\| = \max_{a^* \leqslant x \leqslant b^*} |p(x)|$$

Лемма 2. Если $\delta < 1$ и $P(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_m x^m \in Q(a, b, 0, \delta, m)$, то

$$\|P(x)\| \geqslant a (2^m m!)^{-1} \delta^m; \quad a^* = -\delta, \ b^* = +\delta$$

Доказательство. Положив $x = \delta z$, получим $P(x) = P^*(z)$, где

$$P^*(z) = \sum_{k=0}^{m} (p_k \delta^k) z^k$$

Поэтому $P^*(z) \in Q(a\delta^m, b, 0, 1, m)$. Пусть $|p_{k_0}| \geqslant a$. Тогда

$$\|d^{k_0} P^*(z) / dz^{k_0}\| \geqslant |d^{k_0} P^*(0)/dz^{k_0}| = |p_{k_0}| \delta^{k_0} k_0! \geqslant k_0! \, \delta^m a$$

В силу неравенства А. А. Маркова (см. [4], стр. 104)

$$\left\| \frac{d^{k_0-1} P^*(z)}{dz^{k_0-1}} \right\| \geqslant (m - k_0 + 1)^{-2} \left\| \frac{d^{k_0} P^*(z)}{dz^{k_0}} \right\| \geqslant \frac{k_0! \, \delta^m a}{(m - k_0 + 1)^2}$$

Отсюда по индукции

$$\|P^*(z)\| \geqslant k_0! \, \delta^m a ((m - k_0)!)^2 (m!)^{-2} \geqslant a (2^m m!)^{-1} \delta^m$$

что и требовалось.

Многочлен $s(\alpha, \beta)$ можно рассматривать как многочлен от β с коэффициентами, зависящими от α

$$s(\alpha, \beta) = s_{0l} \beta^l + \sum_{j=0}^{l-1} \left(\sum_{i=0}^{l-1} s_{ij} \alpha^i \right) \beta^j$$

Очевидно

$$(7.8) \qquad \left| \sum_{i=0}^{l-1} s_{ij} \alpha^i \right| \leqslant \sum_{i=0}^{l-1} |\alpha^i| \leqslant 8 \quad \text{при } |\alpha| \leqslant \frac{7c}{8} < \frac{7}{8}$$

Пусть i_0 и j_0 таковы, что $s_{i_0 j_0} = 1$. Тогда

$$P(\alpha) = \sum_{i=0}^{l-1} s_{i j_0} \alpha^i \in Q \left(1, 1, \frac{3c}{4}, \frac{c}{8}, l - 1 \right)$$

В силу леммы 1 поэтому при $c < (3 \cdot 2^l)^{-1}$

$P^*(\gamma) \in Q(1 - 3 \cdot 2^{l-1} c, \ \ 2^{l+2}, 0, c/8, \ l - 1) \subset Q(1/2; \ 2^{l+2}, 0, c/8, \ l - 1)$

$\gamma = \alpha - 3c/4, \ P^*(\gamma) = P(\gamma + 3c/4)$

В соответствии с леммой 2 найдется тогда γ_0, $|\gamma_0| \leqslant c / 8$ такое, что

(7.9) $$|P^*(\gamma_0)| \geqslant \lambda c^{l-1}, \quad \lambda = (2^{4l-3}(l-1)!)^{-1}$$

Зафиксируем $\alpha_0 = \gamma_0 + 3c/4 \in [5c/8, 7c/8]$. Тогда (см. (7.8), (7.9))

$$s(\beta) = s(\alpha_0, \beta) \in Q(\lambda \cdot c^{l-1}, 8, 0, c/8, l)$$

Так что в силу леммы 2 найдется β_0, $|\beta_0| \leqslant c/8$ такое, что

$$|s(\alpha_0, \beta_0)| \geqslant |s(\beta_0)| \geqslant \Delta c^{2l-1}, \quad \Delta = \lambda (4^{2l}\, l!)^{-1}$$

Поскольку частные производные многочлена $s(\alpha, \beta)$ ограничены на прямоугольнике

$$\Pi_1^* = \{9c/16 \leqslant \alpha \leqslant 15c/16, \; -3c/16 \leqslant \beta \leqslant 3c/16\}$$

константой $\Delta_1 = 16 \cdot l \cdot 16/13$, то

(7.10) $$|s(\alpha_0 + \delta\alpha; \beta_0 + \delta\beta)| \geqslant {}^1/_2 \Delta \cdot c^{2l-1} = r(c)$$

как только $|\delta\alpha| \leqslant \delta(c)$, $|\delta\beta| \leqslant \delta(c)$, где

$$\delta(c) = \Delta^* c^{2l-1}, \quad \Delta^* = \min\{{}^1/_{16}, \Delta / (4\Delta_1)\}$$

Зафиксируем

(7.11) $$\varepsilon(c) = \varepsilon^* c^{4l^2-2l+1}, \qquad \varepsilon^* = \min\{6^{-2l-1}, (\Delta^*)^{2l}/6\}$$

(неравенство $\varepsilon(c) \leqslant (c/6)^{2l+1}$ тогда гарантируется) и предпишем убегающему на отрезке $[t_*, t^*]$ применять специальное управление $v_{\omega, c}(s)$, где $\omega = (\alpha_0, \beta_0)$, причем (α_0, β_0) — точка из Π_1, построенная в ходе приведенных выше рассуждений, если $T^1(\tau(c)) \geqslant 0$, и (α_0, β_0) — точка из Π_2, конструируемая абсолютно аналогично, если $T^1(\tau(c)) < 0$.

Тогда в силу (5.3) и (7.10)

(7.12) $$|h(t)| \leqslant \alpha(\eta_*, \tau(c))(\tau(c))^{1/2} \leqslant (g(c)(\varepsilon(c))^{1/l})^{1/2} \leqslant \delta(c)$$

Так что (см. (7.6), (7.10))

$$|D| = |D(\alpha, \beta)| = |D(\alpha_0 + h^1(t), \; \beta_0 + h^2(t))| \geqslant$$
$$\geqslant r(c)\, \xi_*^l, \quad t_* \leqslant t \leqslant t^*$$

и, следовательно, в силу (7.3), (7.4)

(7.13) $$\rho(t) \geqslant r(c)\, \xi_*^l\, [(2l)!\, (\Gamma(\eta_*)^{2l-1}]^{-1}, \quad t \in [t_*, t^*]$$

Оценка сверху для $\rho(t)$ следует из (5.2), (5.5), (7.12)

(7.14) $$\rho(t) \leqslant \xi_* + \tau\Gamma(\eta_*)(1-\tau)^{-1} + |\omega + h(t)|\, \tau^l \leqslant \xi_* +$$
$$+ 2\delta(c)(\tau(c))^{1/2} + c(\tau(c))^{1/2}$$

Здесь использовано неравенство $|\omega + h(t)| \leqslant c$, обусловленное (5.3) и выбором ω.

8. Завершим доказательство теоремы. Рассмотрим случай $l = k$.

Оценим величину

(8.1) $$I(c) = \int_{t_*}^{t^*} \sigma(t, Y(t))\, |v_{\omega,c}(t)|^2 dt$$

Поскольку по теореме Лагранжа и в силу (2.2)

(8.2) $\sigma(t, Y(t)) \leqslant \sigma(t, x(t), y^{(1)}(t), \ldots, y^{(l-1)}(t)) + \mu_1(\eta(t)) \mid x(t) - y(t) \mid \rho(t, X(t)) \leqslant \rho(t, X(t))(1 + \Gamma(\eta(t)) \mid x(t) - y(t) \mid)$

и поскольку $\mid v_{\omega,c}(t) \mid^2 \leqslant \mid u(t) \mid^2 + \mid \omega \mid^2 (l!)^2 + 2l! \mid \omega \mid \mid u(t) \mid$, то

(8.3) $$I(c) \leqslant I_1(c) + I_2(c) + I_3(c)$$

$$I_1(c) = \int_{t_*}^{t^*} \sigma(t, Y(t)) |u(t)|^2 dt$$

$$I_2(c) = c^2 (l!)^2 \int_{t_*}^{t^*} \sigma(t, Y(t)) dt \leqslant (cl!)^2 \tau(c) \Gamma(\Phi(F(\eta_*) + \varphi^*(\tau(c)))) \leqslant (cl!\delta(c))^2$$

$$I_3(c) = 2l!c \int_{t_*}^{t^*} \sigma(t, Y(t)) \mid u(t) \mid dt$$

причем в силу неравенства Коши — Буняковского

(8.4) $$I_3(c) \leqslant 2(I_1(c))^{1/2}(I_2(c))^{1/2}$$

а в силу неравенств (8.2), (7.14), (7.12), (3.2), (6.3)

(8.5) $$I_1(c) \leqslant (1 + \alpha(\eta_*, \tau(c))(\xi_* + (2\delta(c) + 1)(\tau(c))^{1/2})) I_1^*(c) \leqslant (1 + \pi(\eta_*)\xi_* + 3\delta(c)) I_1^*(c)$$

$$I_1^*(c) = \int_{t_*}^{t^*} \rho(t, X(t)) |u(t)|^2 dt.$$

Выберем $\varepsilon_* = (\sigma - \rho) / a$.

Для точки игры $z = \{t, X, Y\}$ обозначим через $\Psi(z)$ функцию

$$\Psi(z) = \mid x^{(0)} - y^{(0)} \mid \pi(\eta(t, X, Y)) - 2\varepsilon_*$$

Положим

(8.6) $$c_n = c_0 n^{1/(2-4l)}$$

(8.7) $$c_0 = \min \left\{ 3^{-1} \cdot 2^{-l} \left(\left(\frac{\varepsilon_*}{\Delta^* l!} \right)^2 \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{2l/(1-2l)} \right)^{-1} \right)^{1/4l}, \left(\frac{\varepsilon_*^2}{3} \right)^{1/(2l-1)} \right\}$$

Пусть теперь убегание начинается (см. п. 1) в точке $z_0 = \{t_0, X_0, Y_0\}$, $\mid x_0^{(0)} - y_0^{(0)} \mid = \xi_0 \neq 0$. Предлагаем убегающему вести убегание индуктивно циклами, так что каждый m-й цикл ($m \geqslant 1$) состоит из интервала активного убегания продолжительностью $\tau_m = \tau(c_m)$, если $m \geqslant 2$ и $\tau_1 = 0$, если $m = 1$, на котором, выбрав вектор ω_m в соответствии с рецептом п. 7, убегающий применяет специальное управление $v(s) = v_{\omega_m, c_m}(s)$, и следующего за ним интервала пассивного убегания, на котором убегающий применяет управление $v(s) \equiv 0$, и длительность которого θ_m определяется так: $\theta_m = 0$, если $\Psi_m = \Psi(z(T_{m-1} + \tau_m)) \leqslant 0$ и θ_m — наименьшее положительное число, для которого $\Psi(z(T_{m-1} + \tau_m + \theta_m)) = 0$, если $\Psi_m > 0$. Здесь и далее

$$T_0 = t_0, \quad T_m = \sum_{k=2}^{m} (\tau_k + \theta_k), \quad m = 1, 2, \ldots$$

Тогда для управления убегающего справедлива следующая оценка (см. (8.4) и неравенство Коши — Буняковского):

$$\int_{t_0}^{T_m} \sigma(t, Y(t))\,dt \leqslant \sum_{k=2}^{m} I(c_k) \leqslant \sum_{k=2}^{m} I_1(c_k) + $$
$$+ 2\left(\sum_{k=2}^{m} I_1(c_k)\right)^{1/2}\left(\sum_{k=2}^{m} I_2(c_k)\right)^{1/2} + \sum_{k=2}^{m} I_2(c_k); \quad m \geqslant 2$$

Поскольку $(1 + \pi(\eta(T_k))\,\xi(T_k) + 3\delta(c_k)) \leqslant (1 + \varepsilon_*)^2$, $k = 2, \ldots$ $\ldots$, то из соотношения (8.5) следует

(8.8) $$\sum_{k=2}^{m} I_1(c_k) \leqslant (1 + \varepsilon_*)^2 \sum_{k=2}^{m} I_1{}^*(c_k) \leqslant (1 + \varepsilon_*)^2 \rho^2$$

причем последнее неравенство выполнено, как только преследователь, на поведение которого реагирует убегающий, соблюдает ограничение (1.3).

Далее, в силу (8.6), (8.7)

(8.9) $$\sum_{k=2}^{m} I_2(c_k) \leqslant (l!)^2 \sum_{k=2}^{m} c_k{}^2\delta^2(c_k) < \varepsilon_*{}^2$$

Так что (см. (8.8))

(8.10) $$\int_{t_0}^{T_m} \sigma(t, Y(t))\,|v(t)|^2 dt \leqslant \left(\left(\sum_{k=2}^{m} I_1(c_k)\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=2}^{m} I_2(c_k)\right)^{1/2}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \varepsilon_*(\rho + 1))^2 \leqslant \sigma^2$$

Докажем, что $T_m \to +\infty$ при $m \to \infty$. От противного. Если $T_m \to$ $\to b < +\infty$, $m \to \infty$, то

$$b - t_0 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \geqslant \sum_{k=2}^{\infty} g(c_k)(\varepsilon(c_k))^{1/l} / p_k; \; p_k = \pi(\eta(T_{k-1})), k = 2, 3, \ldots$$

Поскольку ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} g(c_k)(\varepsilon(c_k))^{1/l} = (6\varepsilon^* c_0{}^{4l-2}) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$$

расходится, то последовательность p_k неограничена, что в силу непрерывности функции $\pi(r)$ влечет неограниченность последовательности $\eta(T_k)$. Последнее, однако, неверно, ибо если положить $v(t) \equiv u(t) \equiv 0$, $t \geqslant b$, то функции $u(t)$ и $v(t)$ (уже построенные на полуинтервале $[t_0, b)$) являются (см. (8.10)) управлениями игроков, так что в силу сформулированного в п. 1 условия функция $\eta(t) = \eta(t, X(t), Y(t))$, будучи абсолютно непрерывной функцией параметра $t \geqslant t_0$ [1], ограничена на $[t_0, b]$. Противоречие.

Переходя в формуле (8.10) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что накладываемое на управление убегающего ограничение (1.4) выполнено.

Получим оценку (2.3). На пассивном участке оценка следует из определения $\Psi(z)$

(8.11) $$\xi(t) \geqslant 2\,\varepsilon_* / \pi(\eta(t))$$

На m-м активном участке см. (7.13), (8.11), (6.3) ($m \geqslant 3$)

$$\xi(t) \geqslant r(c_m)\,\xi^l(T_{m-1})((2l)!\,(\Gamma(\eta(T_{m-1})))^{2l-1})^{-1} \geqslant \geqslant \frac{r(c_m)(2\varepsilon_*)^l}{(2l)!\,\pi^l(\eta(T_{m-1}))(\Gamma(\eta(T_{m-1})))^{2l-1}} \geqslant \frac{r(c_m)(2\varepsilon_*)^l}{(2l)!}\gamma(\eta(t)) \tag{8.12}$$

где

$$\gamma(r) = \pi^{-l}\left(\Phi\left(\frac{F(r)+2\alpha^*}{3}\right)\right)\left(\Gamma\left(\Phi\left(\frac{F(r)+2\alpha^*}{3}\right)\right)\right)^{1-2l} < (\pi(r))^{-1}$$

если $\theta_{m-1} \neq 0$, и (см. (7.13), (6.4), (6.3))

$$\xi(t) \geqslant \frac{r(c_m)(\varepsilon(c_{m-1}))^l}{(2l)!}\gamma(\eta(t)) \tag{8.13}$$

если $\theta_{m-1} = 0$.

Чтобы завершить доказательство, достаточно положить

$$\varepsilon_m = \min\{2\varepsilon_*,\ r(c_m)(2\varepsilon_*)^l/(2l)!,\ r(c_m)(\varepsilon(c_{m-1}))^l/(2l)!\} \quad m \geqslant 3 \tag{8.14}$$

и заметить, что на втором активном участке имеет место (8.12), если $\theta_1 \neq 0$, и

$$\xi(t) \geqslant \frac{r(c_2)\,\xi_0^l}{(2l)!(\Gamma(\eta(t_0, X_0, Y_0)))^{2l-1}} \geqslant \frac{r(c_2)\,\xi_0^l}{(2l)!}\gamma(\eta(t)) \tag{8.15}$$

если $\theta_1 = 0$. Так что $\varepsilon_2 = \min\{1, r(c_2)/(2l)!\}$, $\varepsilon = \varepsilon_*$.

9. Для того чтобы завершить доказательство теоремы в случае $l < k$, достаточно положить

$$\varepsilon_* = \sigma / a < \sigma \tag{9.1}$$

и, заметив, что для величины $I(c)$ (см. (8.1)) справедлива оценка

$$I(c) \leqslant I_2(c) \leqslant (cl!\delta(c))^2$$

дословно повторить рассуждения п. 8, положив в них формально $I_1(c_k) = 0$, $k = 2, 3, \ldots$ и заменив в них прежнее значение ε_* на даваемое формулой (9.1). Оценки (8.11) — (8.15) при этом, как легко видеть, сохраняются.

Теорема полностью доказана.

Поступила 24 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, т. 51, вып 1.
2. *Понтрягин Л. С. Мищенко Е. Ф.* Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, № 3.
3. *Мищенко Е. Ф.* Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 5.
4. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа, ч. 2. М., Гостехиздат, 1956.