

**НЕСТАЦИОНАРНЫЙ МАССООБМЕН ПУЗЫРЯ СО СРЕДОЙ
В РЕАКТОРЕ С ПСЕВДООЖИЖЕННЫМ СЛОЕМ**

Ю. П. Гупало, Ю. С. Рязанцев, Ю. А. Сергеев

(Москва)

Получено приближенное решение нестационарной задачи массообмена пузыря со средой в реакторе с псевдооживленным слоем при наличии объемной химической реакции первого порядка. Предполагается, что скорость пузыря превышает скорость псевдооживления, вследствие чего возникает область замкнутой циркуляции, включающая пузырь [1]. Задача сводится к решению уравнения нестационарной конвективной диффузии вне области замкнутой циркуляции и уравнения баланса реагента внутри этой области. При этом учитывается изменение концентрации реагента вдоль реактора вследствие объемной реакции и продольного перемешивания. Методом сравнимых асимптотических разложений по малым числам Пекле определяется поле концентрации вне области замкнутой циркуляции, изменение во времени концентрации реагента внутри этой области и коэффициент массообмена.

В стационарной постановке, без учета изменения концентрации вдоль реактора, задача о массообмене пузыря в псевдооживленном слое с объемной реакцией решалась в [2] численными методами для больших чисел Пекле. При этом авторы рассмотрели менее существенный процесс массообмена внутри области циркуляции между пузырем и окружающим его облаком. Также для больших чисел Пекле аналогичная задача о нестационарном массообмене газового пузыря в неподвижной жидкости рассматривалась в [3] в случае специально подобранных граничных условий для концентрации реагента вдали от пузыря.

Ниже получено аналитическое решение задачи о нестационарном массообмене пузыря с непрерывной фазой в псевдооживленном слое в случае малых чисел Пекле с учетом химической реакции в слое. Как частный случай, отсюда вытекают результаты работы [4].

1. Постановка задачи. Метод решения. Рассмотрим сферический пузырь, поднимающийся с постоянной скоростью $u_b > v_0$ в реакторе с псевдооживленным слоем катализатора (v_0 — средняя скорость однородного потока жидкости в промежутках между частицами вдали от пузыря). Радиус пузыря a_b предполагается достаточно малым по сравнению с поперечным и продольным размерами реактора, пузырь рассматривается на достаточно большом расстоянии от стенок, а также от входного и выходного участков, так что влиянием границ реактора на обтекание пузыря можно пренебречь.

Поле течения жидкой фазы вне пузыря описывается функцией тока [1]

$$(1.1) \quad \psi = (u_b - v_0) \left(1 - \frac{a_c^3}{r^3}\right) \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta$$

$$\frac{a_c^3}{a_b^3} = \frac{1 + 2\delta}{1 - \delta}, \quad \delta = \frac{v_0}{u_b}$$

Здесь a_c — радиус окружающего пузырь облака, внешняя поверхность которого непроницаема для жидкой фазы. Внутри области, ограниченной

этой поверхностью, жидкость интенсивно циркулирует, поэтому будем считать, что здесь происходит полное ее перемешивание.

В псевдооживленном слое на поверхности частиц катализатора протекает химическая реакция, соответствующая эффективной объемной реакции первого порядка, константу скорости которой будем обозначать k . Продольное перемешивание реагента в реакторе характеризуется процессом конвективной диффузии, эффективный коэффициент которой D . Характерные числа задачи — число Пекле P и модуль Тиле Ψ — определяются выражениями

$$P = \frac{(u_b - v_0) a_c}{D}, \quad \Psi = a_c \sqrt{\frac{k}{D}}$$

Таким образом, в результате реакции, диффузии и конвективного переноса реагента в отсутствие пузыря в реакторе установится некоторое продольное распределение концентрации $c_\infty(x)$, которое должно быть учтено при постановке граничных условий вдали от пузыря. Это распределение концентрации находится из решения стационарного одномерного уравнения конвективной диффузии с граничными условиями для полубесконечного реактора

$$D \frac{d^2 c_\infty}{dx^2} - v_0 \frac{dc_\infty}{dx} - k c_\infty = 0$$

$$x = -x_1, \quad c_\infty = c_1; \quad x \rightarrow \infty, \quad c_\infty \rightarrow 0$$

(координата $x = -x_1$ ($x_1 > 0$) соответствует входу реактора). Решение для c_∞ с учетом дальнейшего рассмотрения запишем в виде

$$(1.2) \quad c_\infty = c_0 \exp\left(-P\eta \frac{x}{a_c}\right), \quad c_0 = c_1 \exp\left(-P\eta \frac{x_1}{a_c}\right)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\delta^2}{(1-\delta)^2} + \frac{\Psi^2}{P^2}} - \frac{1}{2} \frac{\delta}{1-\delta}$$

Здесь c_0 — концентрация реагента в точке $x = 0$, с которой в дальнейшем будем связывать центр пузыря в начальный момент времени.

Задача состоит в определении зависящего от времени поля концентрации вне облака, диффузионного потока на его внешнюю границу и концентрации реагента c_+ внутри области замкнутой циркуляции. Так как внутри облака имеются частицы твердой фазы, то естественно считать, что в области замкнутой циркуляции идет химическая реакция первого порядка с эффективной константой скорости k_+ . Влиянием стенок и входного участка реактора на процесс диффузии пренебрегаем и считаем, что вдали от пузыря концентрация определяется выражением (1.2).

Поле концентрации вне области замкнутой циркуляции определяется из уравнения конвективной диффузии, которое в безразмерных переменных

$$(1.3) \quad r' = \frac{r}{a}, \quad \mu = \cos \theta, \quad \tau = \frac{D}{a_c^2} t$$

$$c' = \frac{c}{c_0}, \quad c'_+ = \frac{c_+}{c_0}, \quad \psi' = \frac{\psi}{a_c^2 (u_b - v_0)}$$

имеет вид (штрихи далее опускаем)

$$(1.4) \quad \frac{\partial c}{\partial \tau} = \Delta c - \frac{P}{r^2} \frac{\partial(\psi, c)}{\partial(r, \mu)} - \Psi^2 c$$

Для постановки граничного условия вдали от пузыря и начального условия при $\tau = 0$ заметим, что координаты x и r связаны соотношением

$$x = \frac{u_b a_c^2}{D} \tau - a_c r \mu \equiv a_c P \frac{1}{1-\delta} \tau - a_c r \mu$$

Отсюда, используя (1.2), получим граничное и начальное условия в виде

$$(1.5) \quad r \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow \exp\left(-P^2 \eta \frac{1}{1-\delta} \tau\right) \exp(P \eta r \mu)$$

$$(1.6) \quad \tau = 0, \quad r > 1, \quad c = \exp(P \eta r \mu)$$

Уравнение для концентрации c_+ внутри области замкнутой циркуляции получается из выражения для скорости изменения концентрации c_+ за счет реакции внутри облака и притока вещества извне и имеет вид

$$(1.7) \quad \frac{dc_+}{d\tau} + \Psi_+^2 c_+ = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{r=1} d\mu, \quad \Psi_+ = a_c \sqrt{\frac{k_+}{D}}$$

Здесь Ψ_+ — модуль Тиле для области замкнутой циркуляции.

Начальное условие для уравнения (1.7) (здесь, вообще говоря, $c_{+0} \neq c_0$).

$$(1.8) \quad \tau = 0, \quad c_+ = c_{+0}$$

Граничное условие при $r = 1$ получим из условия непрерывности концентрации на внешней границе облака

$$(1.9) \quad r = 1, \quad c = c_+$$

Таким образом, задача определения c и c_+ сводится к решению системы уравнений (1.4), (1.7) с граничными и начальными условиями (1.5), (1.6), (1.8), (1.9).

Введем функции ξ и ξ_+ соотношениями

$$(1.10) \quad c = (1 - \xi(r, \mu, \tau)) \exp\left(-P^2 \eta \frac{1}{1-\delta} \tau\right) \exp(P \eta r \mu)$$

$$c_+ = \exp\left(-P^2 \eta \frac{1}{1-\delta} \tau\right) \xi_+(\tau)$$

Задача для определения функций ξ и ξ_+ имеет вид

$$(1.11) \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \Delta \xi - \frac{P}{r^2} \frac{\partial(\psi, \xi)}{\partial(r, \mu)} + 2P\eta \left(\mu \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \mu} \right) +$$

$$+ P^2 \eta \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + 1 \right) (\xi - 1)$$

$$\frac{d\xi_+}{d\tau} - P^2 \eta \frac{1}{1-\delta} \xi_+ + \Psi_+^2 \xi_+ =$$

$$= \frac{3}{2} P \eta \int_{-1}^1 \mu e^{P \eta \mu} (1 - \xi) \Big|_{r=1} d\mu - \frac{3}{2} \int_{-1}^1 e^{P \eta \mu} \frac{\partial \xi}{\partial r} \Big|_{r=1} d\mu$$

$$\tau = 0, \quad r > 1, \quad \xi = 0; \quad \tau = 0, \quad \xi_+ = c_{+0}$$

$$r = 1, \quad e^{P \eta \mu} (1 - \xi) = \xi_+; \quad r \rightarrow \infty, \quad \xi \rightarrow 0$$

При выводе уравнения (1.11) использовалось тождество, вытекающее из связи между η , Ψ , P согласно соотношению в (1.2)

$$P^2\eta^2 - \Psi^2 + P^2\eta \frac{1}{1-\delta} = P^2\eta$$

Решение задачи (1.11) строится методом сращиваемых асимптотических разложений по малому числу Пекле. Оно ищется в виде внешнего и внутреннего разложений по числу Пекле для ξ в областях $r > O(1/P)$, $1 \leq r < O(1/P)$ соответственно и асимптотического разложения по P для ξ_+ . Это решение получено ниже в виде асимптотик для времен $\tau > O(P^{-2})$.

Безразмерная функция тока ψ в областях $1 \leq r < O(1/P)$ и $r > O(1/P)$ соответственно, согласно (1.1), (1.3), имеет вид

$$(1.12) \quad 1 \leq r < O(1/P), \quad \psi = \psi_* \equiv \left(r^2 - \frac{1}{r}\right) \frac{1-\mu^2}{2}$$

$$r > O(1/P), \quad \psi = \frac{\psi^*}{P^2}, \quad \psi^* = \rho^2 \frac{1-\mu^2}{2} + O(P^3), \quad (\rho = rP)$$

Для решения задачи (1.11) введем преобразование Лапласа

$$\zeta = \int_0^\infty \exp(-P^2s\tau) \xi(r, \mu, \tau) d\tau, \quad \zeta_+ = \int_0^\infty \exp(-P^2s\tau) \xi_+(\tau) d\tau$$

При таком определении преобразования Лапласа асимптотике по временам $\tau > O(P^{-2})$ в оригиналах соответствуют значения $|s| < O(1)$ в образах, как следует из теоремы о связи предельных значений оригиналов и образов. В силу ограниченности ξ и ξ_+ при $\tau \rightarrow +\infty$ функции $\zeta(s)$ и $\zeta_+(s)$ аналитичны по s при $\operatorname{Re} s > 0$.

Для $\zeta(s)$ и $\zeta_+(s)$ из (1.11) получим задачу

$$(1.13) \quad P^2s\zeta = \Delta\zeta - \frac{P}{r^2} \frac{\partial(\psi, \zeta)}{\partial(r, \mu)} + 2P\eta \left(\mu \frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial\zeta}{\partial\mu} \right) +$$

$$+ P^2\eta \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\mu} + 1 \right) \zeta - \frac{\eta}{s} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\mu} + 1 \right)$$

$$(1.14) \quad P^2s\zeta_+ - c_{+0} - P^2\eta \frac{1}{1-\delta} \zeta_+ + \Psi_+^2 \zeta_+ =$$

$$= \frac{3}{2} P\eta \int_{-1}^1 \mu e^{P\eta\mu} \left(\frac{1}{P^2s} - \zeta \right) \Big|_{r=1} d\mu - \frac{3}{2} \int_{-1}^1 e^{P\eta\mu} \frac{\partial\zeta}{\partial r} \Big|_{r=1} d\mu$$

$$(1.15) \quad r = 1, \quad \frac{1}{P^2s} - \zeta = e^{-P\eta\mu} \zeta_+$$

$$(1.16) \quad r \rightarrow \infty, \quad \zeta \rightarrow 0$$

Решение задачи (1.13) — (1.16) будем искать в виде внешнего ζ^* и внутреннего ζ_* разложений для функции ζ и асимптотического разложения функции ζ_+ по числу Пекле в виде

$$\zeta_* = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(P) \zeta_n(r, \mu, s), \quad \zeta^* = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{(n)}(P) \zeta^{(n)}(\rho, \mu, s)$$

$$\zeta_+ = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{+n}(P) \zeta_{+n}(s)$$

Относительно функций $\alpha_n(P)$, $\alpha^{(n)}(P)$ и $\alpha_{+n}(P)$ предполагается лишь, что при $P \rightarrow 0$,

$$\frac{\alpha_{n+1}(P)}{\alpha_n(P)} \rightarrow 0, \quad \frac{\alpha^{(n+1)}(P)}{\alpha^{(n)}(P)} \rightarrow 0, \quad \frac{\alpha_{+n+1}(P)}{\alpha_{+n}(P)} \rightarrow 0$$

В области $1 \leq r < O(1/P)$ задача для функций ζ_* и ζ_+ имеет вид (1.13) — (1.15). В области $r > O(1/P)$ задача для функции ζ^* имеет вид (вводится сжатая радиальная координата $\rho = rP$),

$$(1.17) \quad s\zeta^* = \Delta^*\zeta^* - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial(\psi^*, \zeta^*)}{\partial(\rho, \mu)} + 2\eta \left(\mu \frac{\partial\zeta^*}{\partial\rho} + \frac{1-\mu^2}{\rho} \frac{\partial\zeta^*}{\partial\mu} \right) + \\ + \eta \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi^*}{\partial\rho} + \frac{\mu}{\rho^2} \frac{\partial\psi^*}{\partial\mu} + 1 \right) \zeta^* - \\ - \frac{\eta}{P^2s} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi^*}{\partial\rho} + \frac{\mu}{\rho^2} \frac{\partial\psi^*}{\partial\mu} + 1 \right), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad \zeta^* \rightarrow 0$$

Здесь Δ^* — оператор Лапласа в координатах ρ, θ .

Возникающие при решении задач (1.13) — (1.15) и (1.17) константы определяются в результате сращивания внутреннего и внешнего разложений для ζ .

2. Нулевое и первое приближения для ζ и ζ_+ . Замечая, что

$$(2.1) \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi^*}{\partial\rho} + \frac{\mu}{\rho^2} \frac{\partial\psi^*}{\partial\mu} + 1 = O(P^3)$$

для нулевого члена внешнего разложения $\zeta^{(0)}$ имеем задачу, получающуюся из задачи (1.17) в результате отбрасывания в уравнении последних двух слагаемых согласно (2.1). Этой задаче удовлетворяет тривиальное решение

$$\zeta^{(0)} = 0$$

Из вида граничного условия (1.15) следует, что в нулевом приближении $\alpha_0(P) = \alpha_{+0}(P) = P^{-2}$. Поэтому из (1.13), (1.15) для нулевого члена внутреннего разложения ζ_0 получаем задачу

$$\Delta\zeta_0 = 0; \quad r = 1, \quad \zeta_0 = -\zeta_{+0} + \frac{1}{s}$$

Решение этой задачи после сращивания ζ_0 с $\zeta^{(0)}$

$$(2.2) \quad \zeta_0 = \left(-\zeta_{+0} + \frac{1}{s} \right) \frac{1}{r}$$

Полученное решение позволяет определить ζ_{+0} из уравнения (1.14), оставляя в котором члены порядка $1/P^2$ и учитывая асимптотические разложения по P входящих в него экспонент, получим уравнение для ζ_{+0}

$$(2.3) \quad \Psi_+^2 \zeta_{+0} = -\frac{3}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial\zeta_0}{\partial r} \Big|_{r=1} d\mu$$

После определения ζ_{+0} из (2.3) явный вид ζ_0 определяется из (2.2). Окончательно получим

$$(2.4) \quad \zeta_{+0} = \frac{1-q}{s}, \quad \zeta_0 = \frac{q}{sr}, \quad q = \frac{\Psi_+^2}{\Psi_+^2 + 3}$$

Из (2.4) следует, что $\alpha^{(1)}(P) = 1/P$: Удерживая в (1.17) члены порядка $1/P$ и учитывая (1.12) и (2.1), получим задачу для определения первого члена внешнего разложения $\zeta^{(1)}$

$$(2.5) \quad \Delta^* \zeta^{(1)} - (1 - 2\eta) \left(\mu \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1 - \mu^2}{\rho} \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \mu} \right) - s \zeta^{(1)} = 0;$$

$$\rho \rightarrow \infty, \quad \zeta^{(1)} \rightarrow 0$$

Замена

$$\zeta^{(1)}(\rho, \mu) = \exp\left(\frac{1 - 2\eta}{2} \rho \mu\right) \zeta'^{(1)}(\rho, \mu)$$

приводит уравнение (2.5) к уравнению Гельмгольца

$$\Delta^* \zeta'^{(1)} - \left[\frac{(1 - 2\eta)^2}{4} + s \right] \zeta'^{(1)} = 0$$

Отсюда находим общее решение задачи (2.5) ($P_n(\mu)$ — полином Лежандра)

$$(2.6) \quad \zeta^{(1)} = \exp\left(\frac{1 - 2\eta}{2} \rho \mu\right) \rho^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n K_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2} \sqrt{(1 - 2\eta)^2 + 4s}\right) P_n(\mu)$$

$$K_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \sum_{m=0}^n (2x)^{-m} \frac{(m+n+1)!}{m!(n-m+1)!}$$

Здесь и в дальнейшем берется та ветвь функции $\sqrt{(1 - 2\eta)^2 + 4s}$, которая на действительной полуоси $0 < s < +\infty$ дает положительное значение корня.

Определяя коэффициенты A_n из условия срачивания $P^{-1}\zeta^{(1)}$ с $P^{-2}\zeta_0$, получим решение

$$(2.7) \quad \zeta^{(1)} = \frac{q}{s\rho} \exp\left\{\frac{\rho}{2} [(1 - 2\eta)\mu - \sqrt{(1 - 2\eta)^2 + 4s}]\right\}$$

Из (2.7) видно, что $\alpha_1(P) = 1/P$, тогда из граничного условия (1.15) получим $\alpha_1(P) = 1/P$. Из (1.13) следует уравнение для ζ_1

$$\Delta \zeta_1 = -\frac{q}{s} \left(\frac{1 - 2\eta}{r^2} - \frac{1}{r^5} \right) P_1(\mu)$$

общее решение которого

$$(2.8) \quad \zeta_1 = \frac{q}{s} \left(\frac{1 - 2\eta}{2} + \frac{1}{4r^3} \right) P_1(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n-1}) P_n(\mu)$$

Удерживая в (1.15) члены порядка $1/P$, получим граничное условие для ζ_1

$$r = 1, \quad \zeta_1 = -\zeta_{+1} + \zeta_{+0}\eta,$$

которое приводит к линейным соотношениям между коэффициентами a_n и b_n

$$(2.9) \quad b_0 = -a_0 - \zeta_{+1}, \quad b_1 = \frac{1}{s} a_1 - \frac{q}{s} \left(\frac{3}{4} - \eta \right) + \zeta_{+0}\eta$$

$$b_n + a_n = 0, \quad n = 2, 3,$$

Для определения неизвестных коэффициентов в (2.8) произведем сращивание первых приближений $\zeta_{*1} = P^{-2}\zeta_0 + P^{-1}\zeta_1$ при $r \rightarrow \infty$ и $\zeta^{*1} = P^{-1}\zeta^{(1)}$ при $\rho \rightarrow 0$. В результате сращивания и использования (2.9) получим для функции ζ_1

$$(2.10) \quad \zeta_1 = -\frac{q}{2s} \sqrt{(1-2\eta)^2 + 4s} + \left(\frac{q}{2s} \sqrt{(1-2\eta)^2 + 4s} - \zeta_{+1} \right) \times \\ \times \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \xi_{1,1} P_1(\mu) \\ \xi_{1,1} = q \left(\frac{1-2\eta}{2} - \frac{3}{4r^2} + \frac{1}{4r^3} \right) + \frac{\eta}{r^2}$$

Осталось определить ζ_{+1} . Из (1.14) имеем уравнение для ζ_{+1}

$$\Psi_{+2}\zeta_{+1} = \frac{3}{2} \eta \int_{-1}^1 \mu \left(\frac{1}{s} - \zeta_0 \right) \Big|_{r=1} d\mu - \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial r} \Big|_{r=1} d\mu - \\ - \frac{3}{2} \eta \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} \Big|_{r=1} d\mu$$

решая которое, после подстановки ζ_0 из (2.4) и ζ_1 из (2.10), найдем

$$(2.11) \quad \zeta_{+1} = \frac{q(1-q)}{2s} \sqrt{(1-2\eta)^2 + 4s}$$

Это позволяет определить из (2.10) явный вид ζ_1

$$(2.12) \quad \zeta_1 = \frac{q}{2s} \sqrt{(1-2\eta)^2 + 4s} \left(-1 + \frac{q}{r} \right) + \frac{1}{s} \xi_{1,1} P_1(\mu)$$

3. Второе приближение для ζ и ζ_+ . Из (2.4) и (2.12) следует, что $\alpha^{(2)}(P) = 1$. Используя (2.1), получим из (1.17) для $\zeta^{(2)}$ ту же задачу, что и для $\zeta^{(1)}$, общее решение которой имеет вид (2.6). После определения коэффициентов A_n при помощи сращивания $\zeta^{*2} = P^{-1}\zeta^{(1)} + \zeta^{(2)}$ при $\rho \rightarrow 0$ с $\zeta^{*1} = P^{-2}\zeta_0 + P^{-1}\zeta_1$ при $r \rightarrow \infty$ получим

$$(3.1) \quad \zeta^{(2)} = \frac{q}{2} \sqrt{(1-2\eta)^2 + 4s} \zeta^{(1)}$$

Из (3.1) и (1.14) следует, что $\alpha_2(P) = \alpha_{+2}(P) = 1$. Это позволяет получить уравнения для вторых приближений внутреннего разложения и разложения ζ_+ . Решения этих уравнений находятся при помощи процедуры, аналогично изложенной в п. 2. Выражения для ζ_{+2} и ζ_2 не приводятся из-за громоздкости и будут ниже учтены в окончательных выражениях для ξ , ξ_+ и Sh. I

4. Распределение концентрации. Приток вещества к области замкнутой циркуляции. Из теоремы о связи предельных значений оригиналов и изображений, которая для данного преобразования Лапласа имеет вид

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \xi(r, \mu, \tau) = \lim_{s \rightarrow 0} P^2 s \zeta(r, \mu, s)$$

получим, что в случае однородно распределенной концентрации вдали от пузыря ($\eta = 0$) и полного поглощения вещества в облаке ($q = 1$) при $\tau \rightarrow \infty$ устанавливается стационарное распределение концентрации, совпадающее с рассчитанным для этого случая в [4].

В общем случае, чтобы найти поле концентрации, необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа от найденных функций $\zeta^{(n)}$, ζ_n и ζ_{+n} . В результате получим для внешнего разложения ξ^*

$$(4.1) \quad \xi^* = q \exp\left(\frac{1-2\eta}{2} \rho \mu\right) \left\{ \int_0^\tau \exp\left(-\sqrt{\frac{\rho^2}{4P^2 t}}\right) \times \right. \\ \times \exp\left[-\frac{(1-2\eta)^2 P^2 t}{4}\right] \frac{dt}{2\sqrt{\pi t^3}} + \\ \left. + P \frac{q}{2} \int_0^\tau \Phi(P^2 t, \eta) \exp\left[-\frac{(1-2\eta)^2 P^2 (\tau-t)}{4}\right] \times \right. \\ \left. \times \exp\left[-\frac{\rho^2}{4P^2 (\tau-t)}\right] \frac{dt}{\sqrt{\pi (\tau-t)^3}} \right\} + O(P^3)$$

Здесь

$$(4.2) \quad \Phi(P^2 \tau, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi P^2 \tau}} \exp\left[-\frac{(1-2\eta)^2 P^2 \tau}{4}\right] + \\ + \frac{1-2\eta}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1-2\eta}{2} P \sqrt{\tau}\right)$$

Функция ξ вблизи области замкнутой циркуляции (внутреннее асимптотическое разложение) имеет вид

$$(4.3) \quad \xi_* = \frac{q}{r} + P \left[\Phi(P^2 \tau, \eta) \left(-q + \frac{q^2}{r}\right) + \xi_{1,1} P_1(\mu) \right] + \\ + P^2 \xi_2 + O(P^3)$$

$$(4.4) \quad \xi_2 \approx -\frac{\xi_{+2}(\tau)}{r} + \sum_{n=0}^2 \xi_{2,n}(r) P_n(\mu)$$

$$\xi_{2,0} = q \left[\frac{(1-2\eta)^2}{6} r - \frac{(1-2\eta)^2}{4} q + \frac{S_0}{r} + \frac{1-2\eta}{24r^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{16r^4} + \frac{1}{60r^5} \right] - \frac{T_0}{r} + \frac{\eta}{12r^4}$$

$$\xi_{2,1} = 2q \Phi(P^2 \tau, \eta) \left(-\frac{1-2\eta}{4} r + \frac{1-2\eta}{4} q + \frac{S_1}{r^2} + \frac{q}{8r^3} \right)$$

$$\xi_{2,2} = q \left[\frac{(1-2\eta)^2}{12} r - \frac{1-2\eta}{4r} + \frac{5(1-2\eta)}{24r^2} - \right. \\ \left. - \frac{S_2}{r^3} - \frac{1}{8r^4} + \frac{5}{168r^5} \right] - \frac{\eta(1-2\eta)}{3r} - \frac{T_2}{r^3} + \frac{\eta}{6r^4}$$

$$S_0 = \frac{(1-2\eta)^2}{4} q - \frac{(1-2\eta)^2}{6} - \frac{1-2\eta}{24} + \frac{11}{240}$$

$$T_0 = \frac{\eta}{12} + \frac{\eta^2(1-q)}{6}, \quad S_1 = \frac{1-2\eta}{4} - \frac{q(3-4\eta)}{8} + \\ + \frac{\eta(1-r)}{2}, \quad S_2 = \frac{(1-2\eta)^2}{12} - \frac{1-2\eta}{24} - \frac{2}{21}$$

$$T_2 = \frac{\eta(5-2\eta)}{6} + \frac{\eta^2(1-q)}{3}$$

Здесь $\xi_{1,1}$ определяется формулой (2.10), а ξ_{+2} определено выражением (4.6) (см. ниже). Приближенное выражение для ξ_2 получено применением обращения преобразования Лапласа к ζ_2 .

Асимптотическое выражение функции $\xi_+(\tau)$ имеет вид

$$(4.5) \quad \xi_+(\tau) = 1 - q + Pq(1 - q)\Phi(P^2\tau, \eta) + P^2\xi_{+2} + O(P^3)$$

Здесь функция ξ_{+2} является оригиналом $P^{-2}\zeta_{+2}(s)$, ее приближенное выражение

$$(4.6) \quad \xi_{+2} \approx \frac{1}{24}(1 - 2\eta)^2 q(1 - q)(6q - 7) + \frac{1}{2}\eta(1 - q) \times \\ \times \left[\eta + \frac{1}{2} + \frac{q}{3}(\eta - 1) + \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \delta} \right]$$

Распределение концентрации c вне области замкнутой циркуляции и концентрации c_+ внутри нее определяется выражениями (1.10) при помощи полученных разложений (4.1) — (4.6).

Массообмен облака будем характеризовать средним числом Шервуда, в котором в качестве характерной концентрации выбрана «начальная» концентрация c_0 . В безразмерных переменных среднее число Шервуда имеет вид

$$(4.7) \quad \text{Sh} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{r=1} d\mu$$

или, при использовании (1.10)

$$(4.8) \quad \text{Sh} = \exp\left(-P^2\eta \frac{1}{1 - \delta} \tau\right) \text{Sh}^\circ \\ \text{Sh}^\circ = \frac{1}{2} \left[P\eta \int_{-1}^1 \mu e^{P\eta\mu} (1 - \xi_*) \Big|_{r=1} d\mu - \int_{-1}^1 e^{P\eta\mu} \frac{\partial \xi_*}{\partial r} \Big|_{r=1} d\mu \right]$$

Окончательный результат для числа Шервуда удобно представить в виде асимптотического разложения Sh° по числу Пекле. Из (4.1) — (4.5) с учетом выражения для ξ_2 и асимптотического разложения входящих в (4.7) экспонент получим

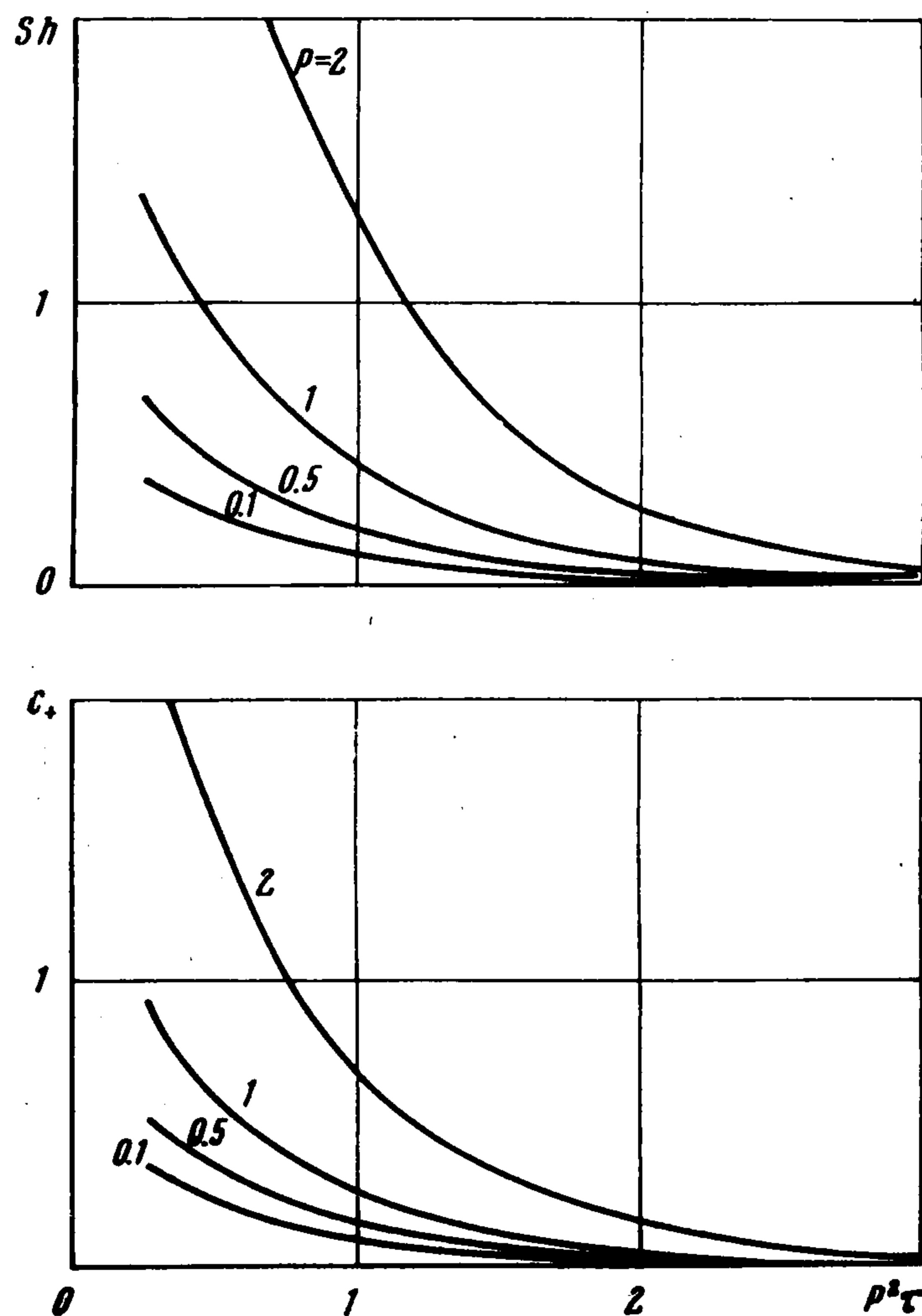
$$(4.9) \quad \text{Sh}^\circ = q + Pq^2\Phi(P^2\tau, \eta) + P^2\text{Sh}_2^\circ + O(P^3) \\ \text{Sh}_2^\circ \approx \frac{\eta^2(7 - 2q)}{6} - \frac{\eta(1 - q)}{4} + \xi_{+2}(\tau) - \\ - q \left[(1 - 2\eta)^2 \frac{4 - 3q}{12} - \frac{1 - 2\eta}{24} + \frac{29}{240} \right]$$

5. Область применимости результатов. Полученные разложения ξ , ξ_+ и Sh° по числу Пекле справедливы при любых η , q и $\delta \neq 1$. Метод сравниваемых асимптотических разложений не позволяет установить верхнюю границу чисел Пекле, при которых пригодны разложения (4.1), (4.3), (4.5) и (4.9). Однако процедура решения дает основания ожидать расширения границ применимости решения по числам Пекле при уменьшении параметров η и δ .

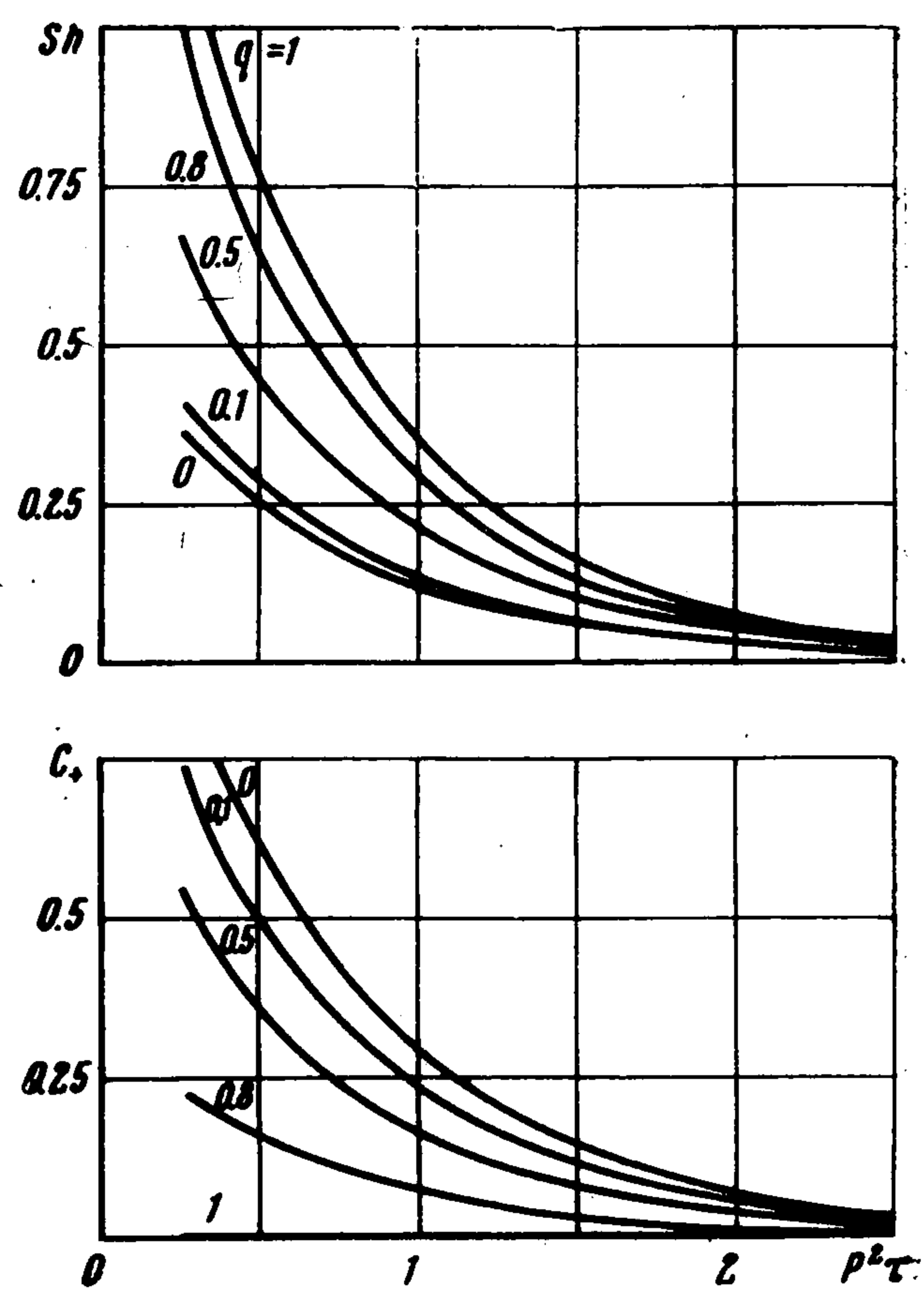
Решение задачи получено в пренебрежении влиянием стенок и входного участка реактора на процесс диффузии. Полный учет влияния входного участка приводит к значительным трудностям в связи с искажением формы облака и необходимостью учета диффузионного переноса в про-

цессе формирования пузыря. Однако можно показать, что если для сформированного пузыря начальное распределение концентрации на расстояниях $r > O(1/P)$ слабо отличается от поля концентраций (1.2) в отсутствие пузыря, учет влияния входного участка для времени $\tau > O(1/P^2)$ вносит лишь несущественную поправку в члены разложений $O(P^2)$. В противном случае полученные разложения пригодны до членов $O(P)$ включительно.

На практике в ряде случаев формирование устойчивого пузыря происходит на расстояниях порядка одного-двух радиусов от входа в ре-



Фиг. 1



Фиг. 2

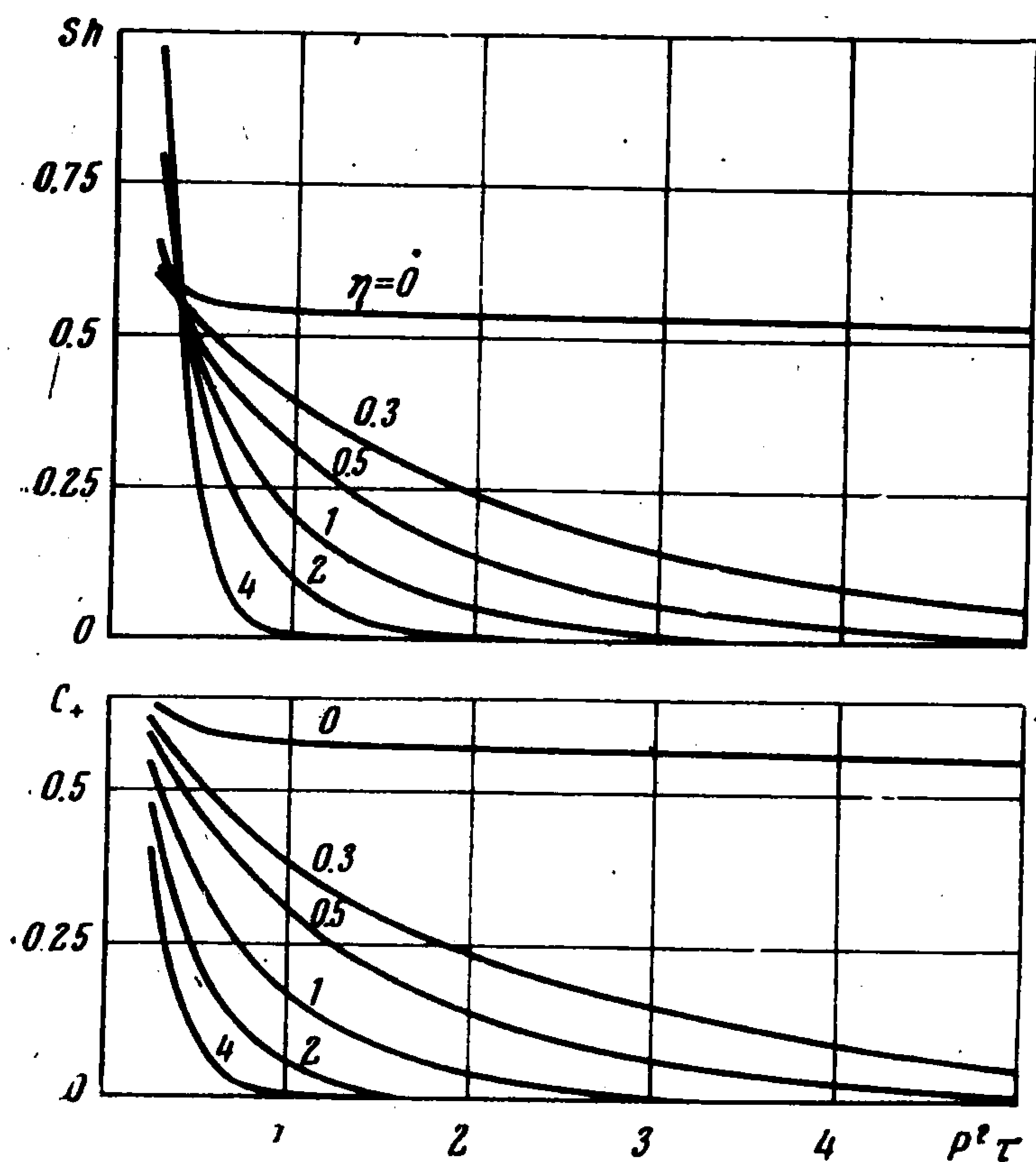
актор в результате коалесценции очень мелких пузырей. Концентрация внутри них и в окружающей среде выравнивается практически мгновенно, а влиянием входного участка на сформированный пузырь можно пренебречь, что дает возможность применить полученное решение с точностью до членов $O(P^2)$.

Полученное решение может быть использовано также для анализа массообмена изолированного пузыря со средой в лабораторных реакторах, когда ввод пузыря в однородный псевдооживленный слой осуществляется при помощи специального устройства на значительном расстоянии от входа в реактор. Влияние входного участка в этом случае несущественно, время формирования пузыря мало, распределение концентраций в начальный момент заметно отличается от (1.2) лишь на малых расстояниях от пузыря и решение пригодно до членов $O(P^2)$ включительно.

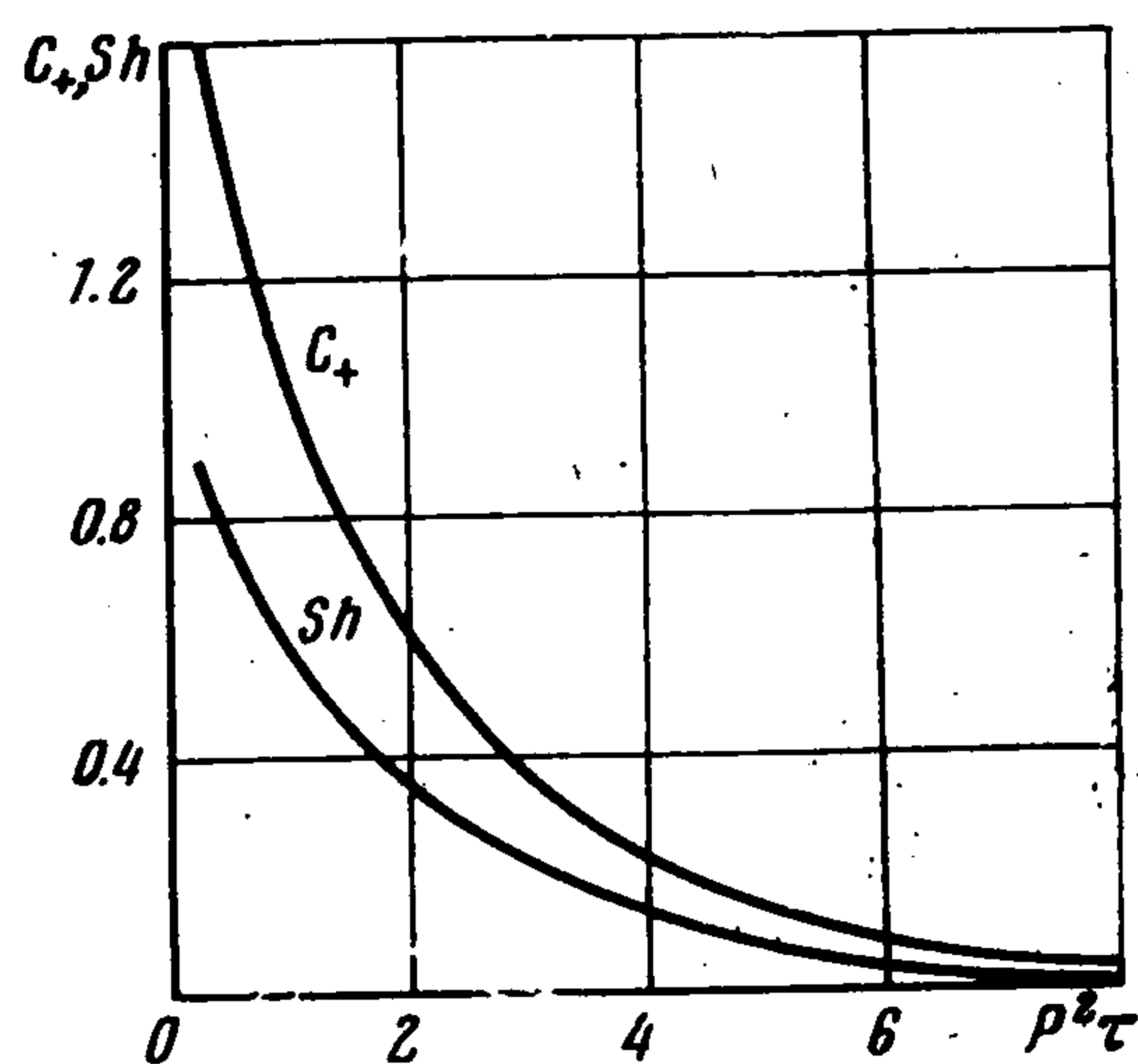
Существенным допущением является предположение о постоянстве размеров пузыря при его подъеме в реакторе, так как часто наблюдается рост или дробление пузырей, а также об изотропности эффективных коэффициентов диффузии в непрерывной фазе.

На фиг. 1—3 представлена зависимость концентрации внутри облака и среднего числа Шервуда от времени при некоторых значениях параметров P , q , η и при $\delta = 0.333$. В частности, на фиг. 1 иллюстрируется влия-

ние числа Пекле на зависимость от времени концентрации внутри облака и среднего числа Шервуда при $q = 0.5$ и $\eta = 1$. Зависимость решения от константы скорости реакции внутри



Фиг. 3.



Фиг. 4.

облака при $P = 0.5$ и $\eta = 1$ представлена на фиг. 2. Вид функций c_+ ($P^2\tau$) и Sh ($P^2\tau$) при разных значениях η (т. е. степени неравномерности профиля концентраций в реакторе) показан на фиг. 3.

При $\eta = 0$, $q = 1$ полученное решение соответствует случаю тепло- и массообмена сферы с однородным потоком идеальной жидкости при условии полного поглощения вещества на поверхности сферы (бесконечно быстрая реакция на поверхности, начинающаяся скачком в момент $\tau = 0$). При $\tau \rightarrow \infty$ устанавливается стационарный режим, и формулы для распределения концентраций и массообмена переходят в полученные для этого случая в [5].

Решение упрощается в частном случае систем мелких частиц, для которых отношение v_0 / u_b , как правило, очень мало. Область циркуляции практически совпадает с пузырем и не содержит частиц, так что $q = 0$. В этом случае

$$c_+ = \exp\left(-\eta \frac{1}{1-\delta} P^2 \tau\right) \left\{ 1 + P^2 \left[\frac{\eta}{3(1-\delta)} + \frac{\eta(3+8\eta)}{12} \right] + O(P^2) \right\}$$

$$Sh = P^2 \exp\left(-\eta \frac{1}{1-\delta} P^2 \tau\right) \left[\frac{\eta}{3(1-\delta)} + \frac{\eta^2}{2} + O(P) \right]$$

В заключение рассмотрим модельный пример. Численные значения приведенных ниже параметров соответствуют по порядку величин значениям для конкретных систем, имеющимся в литературе.

Пусть скорость начала псевдооживления $v_0 = 15$ см / сек (например, стеклянные шарики диаметром около 0.3 мм, псевдооживленные воздухом). Для пузыря радиусом $a_b = 1$ см, $u_b \approx 30$ см / сек, $\delta = 0.5$, $a_c = 1.59$ см. Эффективный коэффициент диффузии примем равным $D = 11.9$ см² / сек, так что $P = a_c(u_b - v_0) / D = 2$. Пусть $k = 5.9$ сек⁻¹. Используя соотношение (1.2), получим отсюда $\eta = 0.25$. Эффективную константу скорости реакции внутри облака получим из грубой оценки, приняв что $k_+ = kV_c / (V_c + V_b)$. Здесь V_c — объем облака, V_b — объем пузыря. Тогда $k_+ = 3k\delta / (1 + 2\delta) = 4.42$ сек⁻¹, $\Psi_+^2 = 0.94$, $q = 0.24$. Зависимость s_+ и Sh от времени для данной системы представлена на фиг. 4. Видно, в частности, что здесь массообмен пузыря с непрерывной фазой имеет существенно нестационарный характер на расстояниях от входа, не более чем на один — два порядка превышающих размеры пузыря.

Поступила 1 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Davidson J. F., Harrison D. Fluidised particles. Cambridge, CUP, 1963.
2. Drinkenberg A. A., Rietema K. Gas transfer from bubbles in a fluidised bed to the dense phase. I. Theory. Chem. Engng Sci., 1972, vol. 27, p. 1765.
3. Ruckenstein E., Dang V.-D., Gull W. N. Mass transfer with chemical reaction from spherical one or two component bubbles or drop. Chem. Engng Sci., 1971, vol. 26, No. 5; p. 647.
4. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. О массообмене между пузырями и непрерывной фазой в псевдооживленном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
5. Sano T. Heat transfer from a sphere immersed in a stream of an inviscid fluid at small Péclet number. J. Engng Math., 1972, vol. 6, p. 217.