Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 532.72

ЗАДАЧА С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФФУЗИОННОГО ПОГРАНСЛОЯ

Д. А. Попов

(Москва)

Рассматривается стационарная задача конвективной диффузии (теплопроводности) при течении жидкости со сдвиговым профилем скорости над бесконечной пластиной. На пластине приняты разрывные граничные условия типа: ноль потока — ноль концентрации. Задача решается методом Винера — Хопфа с учетом продольной диффузии. Получено точное решение в виде сложного интеграла и асимптотическое разложение плотности потока на пластину вблизи и вдали от точки разрыва граничных условий. Показано, что вблизи этой точки приближение диффузионного погранслоя (ПДПС) непригодно. Найден характер особенности плотности тока в точке разрыва и поправки к ПДПС.

1. Постановка задачи и метод Винера — Хопфа. Математическая постановка задачи следующая:

$$2Vy\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2},\quad 0<x<\infty,\quad y>0,\quad V>0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}(x,0)=0,\quad x<0;\quad C(x,0)=0,\quad x>0 \tag{1.2}$$

$$C(x,y)\to 1,\quad x\to-\infty \text{ или } y\to\infty$$

Ищется ограниченное решение этой задачи. Все переменные считаются безразмерными.

Поведение решения при $x\to-\infty$ мешает непосредственному применению преобразования Фурье. Чтобы обойти эту трудность, рассмотрим более общее уравнение

$$2(Vy+v)\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2},\quad v>0 \tag{1.3}$$

Полезность такого обобщения будет ясна из дальнейшего. Введем новую зависимую переменную

$$\varphi(x,y)=e^{-vx}[1-C(x,y)] \tag{1.4}$$

Для решения уравнения (1.3) с граничными условиями (1.2) можно получить следующую оценку:

$$1-C(x,y)\leqslant Ae^{2vx},\quad x\to-\infty \tag{1.5}$$

Эта оценка обеспечивает существование преобразования Фурье (в классическом смысле) для функции $\varphi(x,y)$. Нестрого эта оценка сразу получается из уравнения (1.3), если положить $V=0$ и отбросить при $x\to-\infty$ член $\partial^2 C\mid\partial y^2$. Ясно, что увеличение V может только усилить неравенство (1.5). С другой стороны, задача (1.3) для $V=0$ ниже (см. (2.9)) будет решена точно, и оценка (1.5) будет непосредственно подтверждена. Таким образом

$$\varphi(x, y) \leqslant \begin{cases} Ae^{vx}, & x \to -\infty \\ Be^{-vx}, & x \to +\infty \end{cases} \tag{1.6}$$

Задача для $\varphi(x, y)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - [v^2 + 2Vvy]\,\varphi = 2Vy\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad x < 0; \quad \varphi(x, 0) = e^{-vx}, \quad x > 0$$

$$\varphi \to 0, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$$

Для решения задачи (1.7) введем комплексное преобразование Фурье

$$\Phi(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}\varphi(x, y)\,dx, \qquad \alpha = \sigma + i\tau$$

Оценка (1.6) гарантирует, что $\Phi(\alpha, y)$ аналитична в полосе $-v < \tau < v$, и обращение этого преобразования имеет вид

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty} e^{-i\alpha x}\Phi(\alpha, y)\,d\alpha, \quad -v < \tau < v \tag{1.8}$$

Для $\Phi(\alpha, y)$ получаем следующее уравнение:

$$d^2\Phi/dy^2 + [2iVy(\alpha + iv) - \alpha^2 - v^2]\,\Phi = 0$$

Убывающее при $y \to +\infty$ решение этого уравнения выражается через функцию Эйри

$$\Phi(\alpha, y) = A(\alpha)\mathrm{Ai}\,[h(y)] \tag{1.9}$$

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(sz + \frac{1}{3}s^3\right) ds, \quad h(y) = \exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right) \frac{2iV(\alpha + iv)\,y - \alpha^2 - v^2}{[2V(\alpha + iv)]^{2/3}}$$

Функция $A(\alpha)$ пока произвольна. Нормировка функции Эйри выбрана, как в книге [1]. Предполагается, что $-\pi < \arg\alpha < \pi$, а ветви функций $(\alpha \pm iv)^r$ фиксированы условием $(\alpha \pm iv)^r \to \sigma^r$ при $\sigma \to +\infty$ в полосе $-v < \tau < v$. Разрезы проведены вдоль мнимой оси $(iv, i\infty)$, $(-i\infty, -iv)$.

В дальнейшем используются следующие свойства функции Эйри [1, 2].

1°. Функции $\mathrm{Ai}(z)$ и $\mathrm{Ai}'(z) = d\mathrm{Ai}(z)/dz$ целые, все их нули в плоскости z простые и лежат на отрицательной действительной полуоси.

2°. Имеют место асимптотические разложения

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\left[1 - \frac{5}{48}z^{-3/2} + O(z^{-3})\right], \quad -\pi < \arg z < \pi \tag{1.10}$$

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\theta^{-1/4}\left[\sin\left(\frac{2}{3}\theta^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{5}{48}\theta^{-3/2}\cos\left(\frac{2}{3}\theta^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O(\theta^{-3})\right], \quad z = -\theta, \quad \theta > 0$$

Можно проверить, что при указанном выборе ветвей $\Phi(\alpha, y) \to 0$ при $y \to +\infty$ и $-v < \tau < v$.

Для определения $A(\alpha)$ воспользуемся методом Винера — Хопфа [3]. Введем обозначения

$$\Phi_+(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\alpha x} \varphi(x, 0)\, dx, \quad \Phi_-(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} \varphi(x, 0)\, dx \tag{1.11}$$

$$\Phi_+'(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\alpha x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0)\, dx, \quad \Phi_-'(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0)\, dx$$

Предположение о существовании интеграла $\Phi_+'(\alpha, 0)$ соответствует предположению, что плотность потока вещества на пластину $j(x) = \partial C(x, 0) / \partial y$ имеет интегрируемую особенность при $x \to +0$. Отсюда следует, что $\Phi_+'(\alpha, 0) \to 0$ при $\alpha \to \infty$. Действительно [4], если $\partial\varphi(x, 0) / \partial y \sim Ax^\lambda$, $x \to +0$ и $-1 < \lambda < 0$, то

$$\Phi_+'(\alpha, 0) \sim A(2\pi)^{-1/2}\Gamma(\lambda + 1) \exp\left[\frac{\pi i}{2}(\lambda + 1)\right] \alpha^{-\lambda - 1}, \quad \alpha \to \infty \tag{1.12}$$

(Относительно предположения о характере особенности $j(x)$ при $x \to +\infty$ см. замечания в конце работы.)

Из четырех функций (1.11) неизвестны $\Phi_-(\alpha, 0)$, $\Phi_+'(\alpha, 0)$. Учитывая, что

$$\Phi_+(\alpha, 0) + \Phi_-(\alpha, 0) = A(\alpha) \operatorname{Ai}[h(0)]$$

$$\Phi_+'(\alpha, 0) + \Phi_-'(\alpha, 0) = A(\alpha) \frac{d}{dy} \operatorname{Ai}[h(0)]$$

и исключая из этих уравнений $A(\alpha)$, получим задачу Винера — Хопфа

$$\Phi_+'(\alpha, 0) + \Phi_-'(\alpha, 0) = f(\alpha)\, [\Phi_+(\alpha, 0) + \Phi_-(\alpha, 0)]$$

$$f(\alpha) = \exp\left(-\frac{i\pi}{6}\right)(2V)^{1/3}(\alpha + iv)^{1/3} \frac{\operatorname{Ai}'(z)}{\operatorname{Ai}(z)}, \qquad z \equiv h(0) = \frac{[\exp(i\pi/3)(\alpha^2 + v^2)}{(2V)^{2/3}(\alpha + iv)^{2/3}}$$

Предположим, что решена задача факторизации функции $f(\alpha)$, т. е. найдено представление $f(\alpha) = f_+(\alpha) f_-(\alpha)$, такое, что $f_+(\alpha)$ аналитична и не имеет нулей при $\tau > -v$, а $f_-(\alpha)$ аналитична и не имеет нулей при $\tau < v$. Тогда, используя соображения метода Винера — Хопфа [3] с учетом того, что $\Phi_-'(\alpha, 0) = 0$ и $\Phi_+'(\alpha, 0) \to 0$ при $\alpha \to \infty$, найдем

$$\Phi_+'(\alpha, 0) = G_+(\alpha) f_+(\alpha), \quad \Phi_-(\alpha, 0) = -\frac{1}{f_-(\alpha)} G_-(\alpha)$$

Функции $G_+(\alpha)$ и $G_-(\alpha)$ аналитичны соответственно при $\tau > -v$ и $\tau < v$ и определяются из условия

$$G(\alpha) \equiv f_-(\alpha)\Phi_+(\alpha, 0) = G_+(\alpha) + G_-(\alpha) \tag{1.13}$$

что дает [3]

$$G_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + ic_1}^{\infty + ic_1} \frac{G(t)}{t - \alpha}\, dt, \quad [G_-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + ic_2}^{\infty + ic_2} \frac{G(t)}{t - \alpha}\, dt \tag{1.14}$$

$$(-v < c_1 < \tau < c_2 < v)$$

Учитывая (1.13), получим

(1.15) $$\Phi(\alpha, 0) = \Phi_+(\alpha, 0) + \Phi_-(\alpha, 0) = G_+(\alpha) / f_-(\alpha)$$

(1.16) $$\Phi(\alpha, y) = \Phi(\alpha, 0)\frac{\mathrm{Ai}\,[h(y)]}{\mathrm{Ai}\,(z)} = \frac{G_+'(\alpha)\,\mathrm{Ai}\,[h(y)]}{\mathrm{Ai}\,(z)}$$

Входящая в выражение для $j(x)$ величина $\partial\varphi(x, 0) / \partial y$ определяется непосредственно через $\Phi_+'(\alpha, 0)$

(1.17) $$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\Phi_+'(\alpha, 0)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha$$

Таким образом, решение задачи сводится к факторизации функции $f(\alpha)$.

2. Факторизация. Рассмотрим аналитические свойства функции $f(\alpha)$. Используя первое из соотношений (1.10), найдем

(2.1) $$f(\alpha) = -\sqrt{\alpha^2+v^2}\,[1 + {}^1/_4 z^{-3/2} + O(z^{-3})], \quad \mathrm{Im}\,(\alpha + iv) > 0$$

Отметим, что $f(\alpha) = -\sqrt{\alpha^2 + v^2}$ отвечает точному решению задачи (1.7) при $V = 0$, что естественно, так как если $V \to 0$, то $z \to \infty$. Как уже отмечалось, все нули функций $\mathrm{Ai}\,(z)$ и $\mathrm{Ai}'\,(z)$ в плоскости z лежат на отрицательной действительной полуоси. Пусть $-r_k$ $(r_k > 0)$, $k = 1, 2, \ldots$ — нули $\mathrm{Ai}\,(z)$, а $-r_k'$ $(r_k' > 0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ — нули $\mathrm{Ai}'\,(z)$. Обращаем внимание на различие в их нумерации.

Введем величины t_k, t_k'

$$r_k^{3/4} = \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\,t_k, \qquad r_k'^{3/4} = \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\,t_k', \qquad t_0' \equiv t$$

Из (1.10) легко получить асимптотические разложения

$$t_k = \sqrt{k}\left[1 - \frac{1}{8k} - \left(\frac{1}{128} - \frac{5}{144\pi^2}\right)\frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right]$$

$$t_k' = \sqrt{k}\left[1 + \frac{1}{8k} - \left(\frac{1}{128} + \frac{7}{144\pi^2}\right)\frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right]$$

Учитывая принятый выбор ветвей, получим, что полюса α_k функции $f(\alpha)$, совпадающие с нулями $\mathrm{Ai}\,[z(\alpha)]$, простые. В плоскости α они лежат на положительной мнимой оси и определяются из условия

$$\alpha_k = iv(s_k + 1)$$

где s_k — положительный корень уравнения

$$r_k = (2V)^{2/3}(v)^{-4/3} s(s + 2)^{1/3}$$

Нули α_k' функции $f(\alpha)$ (также простые) лежат на этой же прямой

$$\alpha_k' = iv(s_k' + 1), \qquad r_k' = (2V)^{2/3}(v)^{-4/3}(s' + 2)^{1/3} s'$$

В наиболее интересном случае $\sqrt{2Vv^{-1}} \gg 1$

(2.2) $$\alpha_k = ir_k^{3/4}\sqrt{2v} = i\sqrt{3\pi V}\,t_k, \qquad \alpha_k' = i\sqrt{3\pi V}\,t_k'$$

Других особенностей $f(\alpha)$ в верхней полуплоскости не имеет.

В нижней полуплоскости $f(\alpha)$ имеет разрез $(-i\infty, -iv)$ вдоль отрицательной мнимой оси и не имеет нулей и полюсов. Введем функцию

(2.3) $$g(\alpha) = -f(\alpha) / \sqrt{\alpha^2 + v^2} = -z^{-1/2}\,\mathrm{Ai}'\,(z) / \mathrm{Ai}\,(z)$$

Ее разложения при больших и малых z (больших и малы α) имеют вид

$$g(\alpha) = 1 + {}^1/_4 z^{-3/2} + O(z^{-3}) \tag{2.4}$$

$$g(\alpha) = Bz^{-1/2}\left[1 + Bz + \left(\frac{B^2}{2} - B\right)z^2 + O(z^3)\right]$$

$$B = -\frac{\mathrm{Ai}'(0)}{\mathrm{Ai}(0)} = \frac{3^{1/3}\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)}$$

Учитывая свойства $f(\alpha)$, получим, что $g(\alpha)$ аналитична и не имее нулей в полосе $-v < \tau < v$ и $g(\alpha) \to 1$ при $\alpha \to \infty$ в этой полосе. Следовательно, функция $g(\alpha)$ удовлетворяет теореме C [3] и факторизуется стандартным образом [3]

$$g(\alpha) = g_+(\alpha)g_-(\alpha), \quad g_+(\alpha) = \exp h_+(\alpha), \quad g_-(\alpha) = \exp h_-(\alpha) \tag{2.5}$$

$$h_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ic'-\infty}^{ic'+\infty}\frac{\ln g(\xi)}{\xi - \alpha}\,d\xi, \quad h_-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ic''-\infty}^{ic''+\infty}\frac{\ln g(\xi)}{\xi - \alpha}\,d\xi \tag{2.6}$$

$$-v < c' < \tilde{c}_1 < \tau < c_2 < c'' < v$$

Ветвь логарифма в (2.6) выбрана таким образом, чтобы $\ln g(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$. Факторизация $f(\alpha)$ теперь не представляет труда

$$f_\pm(\alpha) = \mp\sqrt{\alpha \pm iv}\, g_\pm(\alpha)$$

Интеграл (1.14) в выражении для $G_+(\alpha)$ с учетом равенства

$$\Phi_+(\alpha, 0) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\alpha + iv}$$

легко вычисляется

$$G_+(\alpha) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{f_-(-iv)}{\alpha + iv}$$

Это позволяет выразить $\Phi(\alpha, 0)$ и $\Phi_+'(\alpha, 0)$ непосредственно через $g_+(\alpha)$ и $g_-(\alpha)$

$$\Phi_+'(\alpha, 0) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}(-2iv)^{1/2}g_-(-iv)\frac{g_+(\alpha)}{(\alpha + iv)^{1/2}} \tag{2.7}$$

$$\Phi(\alpha, 0) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{(-2iv)^{1/2}g_-(-iv)}{(\alpha - iv)^{1/2}(\alpha + iv)\,g_-(\alpha)} \tag{2.8}$$

Выражение $(-2iv)^{1/2}$ здесь берется на правой стороне разреза. Наличие этого множителя показывает, что при переходе к пределу $v \to 0$ необходимо соблюдать осторожность. Заметим, что соотношения (1.8), (1.16), (2.5), (2.6), (2.8) дают полное формальное решение задачи (1.7).

В случае $V = 0$, как показывают равенства (2.1), (2.4), надо в (2.7) и (2.8) положить $g_+(\alpha) = g_-(\alpha) = 1$. Тогда, используя соотношения (2.7) и (2.8) и соответствующие формулы обращения, получим

$$\varphi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{vx}\Gamma\left(\frac{1}{2}, -2vx\right), \quad x < 0, \quad V = 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = -\sqrt{\frac{2v}{x\pi}}\,e^{-xv}, \quad x > 0, \quad V = 0$$

Если $-2vx \gg 1$ $(x < 0)$, о

$$\varphi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{vx}(-2vx)^{-1/2}\left[1 + O\left(\frac{1}{|vx|}\right)\right]$$

что подтверждает оценку (1.6).

В дальнейшем предполагается, что $\sqrt{2V}/v \gg 1$, и в явном виде v будет удерживаться только в членах, содержащих особенности при $v \to 0$.

3. Вычисление плотности потока. Покажем, что интеграл $h_-(\alpha)$ (2.6) может быть точно вычислен. Основным моментом является то, что функция $\mathrm{Ai}'(z) / \mathrm{Ai}(z)$, входящая в $g(\alpha)$, в верхней полуплоскости α не имеет ветвления, что и определяет выбор $h_-(\alpha)$ для вычисления.

Дифференцируя $h_-(\alpha)$ по α и интегрируя один раз по частям [5], найдем

$$\frac{dh_-}{d\alpha} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ic''-\infty}^{ic''+\infty} \frac{1}{\xi - \alpha}\frac{1}{g}\frac{dg}{d\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ic''-\infty}^{ic''+\infty} \frac{1}{\xi - \alpha}\frac{dz}{d\xi}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{\mathrm{Ai}'(z)}{\mathrm{Ai}(z)} - z\frac{\mathrm{Ai}(z)}{\mathrm{Ai}'(z)}\right]$$

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\frac{\exp(i\pi/3)(\xi^2 + v^2)}{(2V)^{2/3}(\xi + iv)^{2/3}} = \frac{\exp(i\pi/3)}{(2V)^{2/3}}\left[\frac{2\xi}{\xi + iv} - \frac{2}{3}\frac{\xi^2 + v^2}{(\xi + iv)^{5/3}}\right]$$

Непосредственно видно, что подынтегральная функция в последнем интеграле не имеет ветвления в верхней полуплоскости. Замыкая путь интегрирования в верхней полуплоскости и используя рассуждения такого же типа, как при доказательстве леммы Жордана [6], получим

$$\frac{dh_-}{d\alpha} = \frac{1}{2(iv - \alpha)} - \frac{1}{\alpha_0' - \alpha} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_k - \alpha} - \frac{1}{\alpha_k' - \alpha}\right) \tag{3.1}$$

Здесь α_k, α_k' определяются соотношениями (2.2). Непосредственно проверяется, что ряд (3.1) сходится. Интегрируя равенство (3.1), найдем

$$h_-(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln(\alpha - iv) + \ln(\alpha - \alpha_0') + \sum_{k=1}^{\infty}[\ln(\alpha - \alpha_k') - \ln(\alpha - \alpha_k) - \delta_k] + c \tag{3.2}$$

Константы δ_k должны быть выбраны таким образом, чтобы ряд (3.2) сходился (c — произвольная константа). Нетрудно показать, что сходимость будет обеспечена при $\delta_k = (4k)^{-1}$. Другой выбор δ_k эквивалентен умножению на константу.

Учитывая равенство (2.5), получим выражение для $g_-(\alpha)$ в виде бесконечного произведения

$$g_-(\alpha) = \exp h_-(\alpha) = e^c(\alpha - iv)^{-1/2}(\alpha - \alpha_0')\Pi \tag{3.3}$$

$$\Pi = \Pi(\beta) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{t_k' + \beta}{t_k + \beta}\exp\left(-\frac{1}{4}k\right), \quad \beta = \frac{i\alpha}{\sqrt{3\pi V}}$$

Формулы (1.8), (1.16), (2.8), (3.3) дают полное решение задачи (1.1), (1.2) в виде одного сложного интеграла.

В дальнейшем понадобятся разложения $\Pi^{-1}(\beta)$ при $|\beta| \ll 1$ и $|\beta| \gg 1$

$$\ln \Pi^{-1}(\beta) = \ln \Pi^{-1}(0) + \gamma_1\beta + \gamma_2\beta^2 + \ldots + \gamma_n\beta^n + \ldots \tag{3.4}$$

$$\Pi^{-1}(\beta) = e^{\gamma/4}\beta^{1/2}\left[1 - \frac{d}{\beta} - \frac{1}{36\pi^2}\frac{\ln\beta}{\beta^2} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)\right] \tag{3.5}$$

Константы γ_n и d определяются из соотношений

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t_k)^n - (t_k')^n}{(t_k t_k')^n}, \qquad d = \sum_{k=1}^{\infty}\left(t_k' - t_k - \frac{1}{4\sqrt{k}}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$$

Здесь γ — постоянная Эйлера, $\zeta(z)$ — дзета-функция Римана.

Заметим, что получение разложения (3.5) является не совсем тривиальной задачей.

Учитывая, что $g_+(\alpha) = g(\alpha) / g_-(\alpha)$, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = \frac{-i}{2\pi}(-2iv)^{1/2}g_-(-iv)e^{-c}\int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\frac{g(\alpha)(\alpha - iv)^{1/2}e^{-i\alpha x}}{(\alpha - \alpha_0')\Pi(\beta)(\alpha - iv)^{1/2}}d\alpha \tag{3.6}$$

С помощью соотношений (3.5) и (2.4) можно получить асимптотическое разложение предэкспоненты в интеграле (3.6) для $|\alpha| \gg 1$. Интегрируя почленно это разложение, найдем (при $v \to 0$)

$$\begin{aligned} j(x) = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = e^{\gamma/4}t\Pi(0)\pi^{-1/2}x^{-1/3}(3\pi V)^{1/4} \times \\ \times\left[1 + 2(-t + d)u - \frac{u^2\ln u}{27\pi^{5/2}} + O(u^2)\right], \quad u = \sqrt{3\pi V}x \end{aligned} \tag{3.7}$$

Таким образом, получены три первых члена разложения $j(x)$ при $x \to +0$.

Чтобы получить разложение при больших x, деформируем контур интегрирования в (3.6) таким образом, чтобы он охватывал с двух сторон разрез в нижней полуплоскости. Тогда (при $v \to 0$) получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = \\ &= \frac{\exp(-i\pi/6)}{2\pi}\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{1/3}t\Pi(0)\sqrt{3\pi V}\int_0^{\infty}\frac{\exp(-u\xi)\,\xi^{-2/3}}{\xi + t}\Pi^{-1}(\xi)\psi(\xi)\,d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(\xi) = \mathrm{Ai}'\left[\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right)\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2/3}\xi^{4/3}\right] \Big/ \mathrm{Ai}\left[\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right)\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2/3}\xi^{4/3}\right] + \\ + \exp\left(\frac{i\pi}{3}\right)\mathrm{Ai}'\left[\exp\left(-\frac{i\pi}{3}\right)\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2/3}\xi^{4/3}\right] \Big/ \mathrm{Ai}\left[\exp\left(-\frac{i\pi}{3}\right)\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2/3}\xi^{4/3}\right] \end{aligned}$$

Используя лемму Ватсона [7] и разложение (3.4), получим окончательное выражение для плотности потока

$$\begin{aligned} j(x) = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = \frac{(2V)^{1/3}3^{1/3}}{\Gamma(1/3)}x^{-1/3}\left[1 + \frac{d_1}{3}\frac{1}{u} + \frac{2A}{3}\frac{1}{u^{4/3}} + \right. \\ \left. + \frac{4d_2}{9}\frac{1}{u^2} + \frac{10}{9}d_1A\frac{1}{u^{7/3}} + \frac{28}{27}d_3\frac{1}{u^3} + \frac{20}{87}d_2A\frac{1}{u^{10/3}} + O\left(\frac{1}{u^4}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.8}$$

Постоянные A, d_1, d_2, d_3 определяются с помощью соотношений

$$A = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right)\Big/\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right), \quad d_1 = \gamma_1 - \frac{1}{t}$$

$$d_2 = \gamma_2 + \frac{\gamma_1^2}{2} + \frac{\gamma_1}{t} + \frac{1}{t^2},$$

$$d_3 = \gamma_3 + \gamma_1\gamma_2 + \frac{\gamma_1^3}{6} - \frac{1}{t}\left(\gamma_2 + \frac{\gamma_1^2}{2}\right) + \frac{\gamma_1}{t^2} - \frac{1}{t^3}$$

Первый член в выражении (3.8) совпадает с ПДПС [8]. Следующие члены дают поправки к этому приближению, связанные с учетом продольной диффузии. Выражение (3.7) показывает, что истинный характер поведения плотности тока $j(x) \sim V^{1/4}x^{-1/2}$ при $x \to +0$ отличается от зависимости, даваемой ПДПС ($j(x) \sim V^{1/3}x^{-1/3}$). Переход между двумя этими асимптотиками происходит в области $x \sim V^{-1/2}$, т. е. $u \sim 1$.

В заключение сделаем несколько общих замечаний. Не меняя граничных условий, рассмотрим более общее уравнение

$$aVy^{n-2}\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \quad n \geqslant 2, \quad a > 0, \quad V > 0 \tag{3.9}$$

Здесь a — число порядка единицы, V — параметр задачи. Уравнению (1.1), например, отвечает $a = 2$, $n = 3$. В задаче (3.9), как и в (1.1), нет масштаба длины; переходя к переменным

$$\bar{x} = xV^m, \quad \bar{y} = yV^m, \quad m = \frac{1}{n-1}$$

получим уравнение, не содержащее V

$$a\bar{y}^{n-2}\frac{\partial C}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{y}^2} \tag{3.10}$$

Таким образом

$$C = C(xV^m, \ yV^m), \quad j(x) = V^m f(xV^m) \tag{3.11}$$

Предполагая, что в окрестности точки разрыва граничных условий $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ при любом V характер решения уравнения (3.9) определяется старшими производными, получим первый член разложения ограниченного решения в ряд по степеням r в виде

$$C_0 = Ar^{1/2}\sin(1/2\varphi) \tag{3.12}$$

Относительно константы A пока ничего не известно. Приближение (3.12) для $j(x)$ дает $j(x) \sim x^{-1/2}$. Тогда, учитывая (3.11), получим

$$j(x) \sim V^m (xV^m)^{-1/2} \tag{3.13}$$

Видно, что при $n = 3$ с точностью до константы порядка единицы это выражение совпадает с первым членом в разложении (3.7). Из масштабной инвариантности (3.11), конечно, также сразу следует $A \sim V^{m/2}$. Отбрасывание конвективного члена наиболее естественно, если использовать уравнение в виде (3.10). Это указывает на истинный характер приближения (3.12): оно пригодно при $\bar{r} = rV^m \ll 1$. Заметим, что эти рассуждения подтверждают сделанное ранее предположение (1.12) об интегрируемом характере особенности $j(x)$ при $x \to +0$.

Для уравнения (3.9) ПДПС, как известно, сводится к отбрасыванию члена $\partial^2 C / \partial y^2$. Тогда $C(0, y) = 1$ и

$$C(x, y) = \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\gamma\left(\frac{1}{n}, \frac{a}{n^2}\frac{Vy^n}{x}\right),$$

где $\gamma(\alpha, z)$ — неполная гамма-функция. Для плотности тока ПДПС дает

$$j(x) = \frac{n}{\Gamma(1/n)}\left(\frac{a}{n^2}\right)^{1/n}\left(\frac{V}{x}\right)^{1/n} \tag{3.14}$$

В случае $n = 3$, $a = 2$ это выражение совпадает с первым членом разложения (3.8). Заметим, что при $n = 2$ (поршневой профиль) приближение (3.14) имеет тот же вид, что и (3.13). Это объясняет, почему ПДПС для поршневого профиля дает точное выражение для плотности тока. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить (3.14) с выражением, полученным из (2.9) при замене $v \to V$.

Общее соотношение (3.13) означает, что при выбранных граничных условиях независимо от вида профиля скорости (выбора n) $j(x) \sim x^{-1/2}$, $x \to +0$, а от вида профиля зависит только степень, с какой параметр V входит в это выражение.

К задаче (1.1), (1.2) интересно было бы применить метод сращивания асимптотических разложений. Однако приведенные результаты показывают, что в любом случае ПДПС нельзя срастить с первым членом (3.12) прямого координатного разложения. Заметим, что, как указал Б. А. Купершмидт, уравнение Лапласа имеет решение ($C \sim r^{2/3}\sin(^2/_3\,\varphi)$, которое сращивается с ПДПС при $x > 0$ $\varphi \sim 0$. Однако это решение дает неверную асимптотику $j(x)$ при $x \to +0$ и не удовлетворяет граничному условию $\partial C(x, 0) / \partial y = 0$, $x < 0$. Кроме того, характер точных ответов (3.7), (3.8), в частности вид входящих в них констант, заставляет сомневаться в возможности их получения каким-либо простым приближенным методом.

Автор благодарит В. В. Грушина и Б. А. Купершмидта за полезные обсуждения.

Поступила 7 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джеффрис Г.*, *Свирлс Б.* Методы математической физики. М., «Мир», 1970.
2. *Бабич В. М.*, *Булдырев В. С.*, Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
3. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.
5. *Вайнштейн Л. А.* Теория дифракции и метод факторизации. М., «Сов. радио», 1966.
6. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М., «Наука», 1965.
7. *Копсон Э. Т.* Асимптотические разложения. М., «Мир», 1966.
8. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1965.