Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 532.516

К ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ТЕЛА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Миронов

(Москва)

Необходимые условия минимума сопротивления тела в вязкой жидкости получены для случаев, когда течение жидкости описывается либо точными уравнениями Навье — Стокса, либо приближенными уравнениями Озеена. Исследуются некоторые особенности оптимальных тел.

Задача оптимизации формы тела в потоке вязкой жидкости в стоксовом приближении рассматривалась ранее в работе [1], где были выведены необходимые условия, которым должна удовлетворять форма тела минимального сопротивления, а также исследованы некоторые качественные особенности оптимальных форм.

1. Стационарное обтекание вязкой несжимаемой жидкостью некоторого тела S описывается уравнениями Навье — Стокса и граничными условиями прилипания на поверхности тела. В дальнейшем для удобства преобразований рассматривается конечный объем жидкости Ω, ограниченный изнутри поверхностью тела S, а снаружи некоторой поверхностью Σ, на которой задан вектор скорости $\mathbf{u}$. В случае обтекания тела неограниченной массой жидкости минимальное расстояние от границы тела S до поверхности Σ следует устремить к бесконечности.

Рассмотрим следующую вариационную задачу: среди тел заданного объема Q найти такое тело S, чтобы скорость диссипации энергии G была минимальна. При этом будем считать, что распределение скоростей на поверхности Σ не зависит от формы тела. Заметим, что если на поверхности Σ задан поступательный поток $\mathbf{u} = \mathrm{const}$, то величина силы сопротивления будет равна G / u и задача о минимуме скорости диссипации энергии будет эквивалентна задаче о минимуме силы сопротивления.

В безразмерных переменных уравнения движения жидкости, граничные условия и минимизируемый функционал имеют вид

$$\triangle \mathbf{v} - \nabla p - R(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = 0, \quad \nabla \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_S = 0, \quad \mathbf{v}|_\Sigma = \mathbf{u} \tag{1.1}$$

$$G(S) = \int_\Omega \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega \tag{1.2}$$

2. Получим необходимое условие минимума функционала (1.2) при дифференциальных связях (1.1). Пусть поверхность некоторого тела S_0 задана в параметрической форме $x_i = x_{0i}(q, r)$, где q, r — параметры. Рассмотрим семейство тел S_ε, заданных уравнениями

$$x_i = x_{0i}(q, r) + \varepsilon n_i f(q, r), \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

где n_i — компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности S_0, $f(q, r)$ — фиксированная функция. Обозначим через $\mathbf{v}_\varepsilon$, p_ε решение краевой задачи (1.1) с граничными условиями на поверхности S_ε. Представим величины $\mathbf{v}_\varepsilon$ и p_ε в виде

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + o(\varepsilon), \quad p_\varepsilon = p_0 + \varepsilon p_1 + o(\varepsilon) \tag{2.1}$$

Функции $\mathbf{v}_0$ и p_0 удовлетворяют краевой задаче (1.1) для тела S_0.

Граничные условия для скорости снесем на поверхность S_0 и учтем краевые условия для $\mathbf{v}_0$. На внешней границе жидкости Σ краевые условия считаются независящими от формы тела S. Таким образом, для функций $\mathbf{v}_1$ и p_1, согласно (1.1), (2.1), имеем краевую задачу

$$\triangle \mathbf{v}_1 - \nabla p_1 - R\left[(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{v}_0\right] = 0, \quad \nabla \mathbf{v}_1 = 0 \tag{2.2}$$

$$\mathbf{v}_1|_S = -f\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial n}, \quad \mathbf{v}_1|_\Sigma = 0$$

В принятых обозначениях функционал (1.2), вычисленный для тела S_ε, имеет вид

$$G(S_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_{\varepsilon i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{\varepsilon j}}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega = G(S_0) + \tag{2.3}$$

$$+\varepsilon\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{1j}}{\partial x_i}\right) d\Omega - \frac{1}{2}\varepsilon\int\limits_{S_0} f\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i}\right)^2 dS$$

Преобразуя первый интеграл в (2.3) интегрированием по частям и учитывая граничные условия для функций $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$, получим

$$G(S_\varepsilon) = G(S_0) + \varepsilon\int\limits_{S_0} f\left|\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial n}\right|^2 dS - 2\varepsilon\int\limits_{\Omega_0}\mathbf{v}_1\triangle\mathbf{v}_0 d\Omega + o(\varepsilon) \tag{2.4}$$

Пусть p^* и $\mathbf{v}^*$ — некоторые скалярная и векторная функции, определенные в Ω_0, и пусть функция $\mathbf{v}^*$ удовлетворяет нулевым краевым условиям $\mathbf{v}^*|_\Sigma = \mathbf{v}^*|_S = 0$. Первое уравнение (2.2) умножим скалярно на $\mathbf{v}^*$, а уравнение неразрывности умножим на p^*. Сложив полученные выражения и проинтегрировав по области Ω_0, имеем

$$0 = \int\limits_{\Omega_0}\{v_i^*\left[\triangle v_{1i} - \nabla_i p - R(v_{0j}\nabla_j v_{1i} + v_{1j}\nabla_j v_{0i}\right) + p^*\nabla_i v_{1i}\} d\Omega$$

Интегрируя это выражение по частям два раза и используя краевые условия для функций v_{1i} и v_i^*, получим

$$0 = \int\limits_{S_0} v_{1i}\frac{\partial v_i^*}{\partial n} dS + \int\limits_{\Omega_0}\{v_{1i}\left[\triangle v_i^* - \nabla_i p^* + R(v_{0j}\nabla_j v_i^* - v_j^*\nabla_i v_{0j})\right] + \tag{2.5}$$

$$+ p_1\nabla_j v_j^*\} d\Omega$$

Определим теперь функции v^* и p^* как решение краевой задачи

$$\triangle v_i^* - \nabla_i p^* + R(v_{0j}\nabla_j v_i^* - v_j^*\nabla_i v_{0j}) = 2\triangle v_{0i} \tag{2.6}$$

$$\nabla_i v_i^* = 0, \quad v_i^*|_\Sigma = v_i^*|_S = 0 \tag{2.7}$$

Тогда выражение (2.5) перепишется в виде

$$0 = \int\limits_{S_0} v_{1i}\frac{\partial v_i^*}{\partial n} dS + 2\int\limits_{\Omega_0} v_{1i}\triangle v_{0i} d\Omega \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.4) и учитывая граничные условия для v_{1i}, получим

$$G(S_\varepsilon) = G(S_0) + \varepsilon \int_{S_0} f\left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n}[\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}^*]\right) dS$$

Поскольку минимум функционала $G(S)$ ищется на классе тел единичного объема, то функция f, определяющая вариацию границы S_0, должна удовлетворять условию

$$\int_{S_0} f dS = 0 \tag{2.9}$$

Условие же обращения в нуль первой вариации функционала $G(S)$ приводит к равенству

$$\int_{S_0} f\left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial n} \cdot \frac{\partial}{\partial n}[\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}^*]\right) dS = 0 \tag{2.10}$$

Из сравнения выражений (2.9) и (2.10) видно, что оптимальное тело должно удовлетворять условию

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial n} \cdot \frac{\partial}{\partial n}[\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}^*]\right)\Big|_{S_0} = \mathrm{const} \tag{2.11}$$

Другими словами, равенство (2.11) является необходимым условием экстремума функционала $G(S)$ на классе тел постоянного объема.

Аналогично можно получить необходимое условие экстремума функционала $G(S)$ при других изопериметрических условиях. В частности, если тело минимального сопротивления ищется среди тел с заданной площадью поверхности, то вариация границы должна удовлетворять условию

$$\int_{S_0} H f dS = 0$$

где H — средняя кривизна поверхности тела, вычисленная в соответствующей точке. Поэтому необходимое условие экстремума в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{H}\left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial n} \cdot \frac{\partial}{\partial n}[\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}^*]\right)\Big|_{S_0} = \mathrm{const}$$

3. В случае $R \to 0$, отвечающем приближению Стокса, уравнения (1.1) и (2.6) приобретают вид

$$\triangle \mathbf{v} = \nabla p, \qquad \triangle \mathbf{v}^* = \nabla p^* + 2\triangle \mathbf{v}$$

После подстановки первого уравнения во второе получим

$$\triangle \mathbf{v}^* = \nabla (p^* + 2p) \tag{3.1}$$

Но краевая задача (2.7), (3.1) имеет лишь тривиальное решение $\mathbf{v}^* = 0$, $p^* + 2p = \mathrm{const}$. Поэтому необходимое условие минимума сопротивления (2.11) в этом случае приобретает вид

$$\left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n}\right|^2_S = \mathrm{const}$$

что соответствует результатам работы [1].

Для приближенного описания движения вязкой несжимаемой жидкости в случае, когда на бесконечности задан равномерный поступательный поток $\mathbf{u} = \mathrm{const}$, часто используют уравнения Озеена, имеющие вид

$$R(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \triangle\mathbf{v}, \qquad \nabla\mathbf{v} = 0 \tag{3.2}$$

Для получения необходимого условия минимума функционала (1.2) при дифференциальных связях (3.2) удается проделать ту же процедуру, что и в случае, когда поле скоростей определяется из уравнений Навье — Стокса. Опустив промежуточные выкладки, приведем окончательный результат. Необходимое условие минимума сопротивления для тел постоянного объема имеет вид

$$\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial n}\cdot\frac{\partial}{\partial n}[\mathbf{v}-\mathbf{v}^*]\right) = \mathrm{const}$$

где функция $\mathbf{v}^*$ является решением краевой задачи

$$\triangle\mathbf{v}^* - \nabla p^* + R(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}^* = 2\triangle\mathbf{v}, \quad \nabla\mathbf{v}^* = 0, \quad \mathbf{v}^*|_S = \mathbf{v}^*|_\infty = 0 \tag{3.3}$$

Вычитая из уравнения (3.3) первое уравнение (3.2) и вводя обозначения $\mathbf{u}' = -\mathbf{u}$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}^* - \mathbf{v}$, $p' = p^* + p$, получим

$$R(\mathbf{u}'\nabla)\mathbf{v}' = -\nabla p' + \triangle\mathbf{v}', \quad \nabla\mathbf{v}' = 0, \quad \mathbf{v}'|_\infty = \mathbf{u}', \quad \mathbf{v}'|_S = 0$$

Иными словами, функция $\mathbf{v}'$ является решением системы уравнений Озеена в случае, когда на бесконечности задан поступательный поток $\mathbf{u}' = -\mathbf{u}$. Отсюда виден механический смысл функции $\mathbf{v}^*$: это есть просто сумма скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ при обтекании тела поступательными потоками со скоростями на бесконечности $\mathbf{u}$ и $-\mathbf{u}$ соответственно.

4. Рассмотрим плоскопараллельное течение жидкости. В этом случае, как следует из уравнений неразрывности, векторные поля $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}^*$ допускают функции тока ψ и ψ^*

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad v_x^* = \frac{\partial\psi^*}{\partial y}, \quad v_y^* = -\frac{\partial\psi^*}{\partial x}$$

Здесь x, y — декартовы координаты в плоскости течения. Нетрудно получить уравнения для функций ψ и ψ^*

$$R\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\triangle\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\triangle\psi}{\partial y}\right) = \triangle^2\psi \tag{4.1}$$

$$\triangle^2\psi^* - 2\triangle^2\psi = R\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\triangle\psi^*}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\triangle\psi^*}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right) - 2\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\right]$$

Граничные условия для функций ψ и ψ^* и условие оптимальности запишутся в виде

$$\psi|_S = \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_\Sigma = -u_y, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_\Sigma = u_x \tag{4.2}$$

$$\psi^*|_S = \left.\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\right|_S = \psi^*|_\Sigma = \left.\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\right|_\Sigma = 0, \quad \triangle\psi(\triangle\psi - \triangle\psi^*)|_S = \mathrm{const} \tag{4.3}$$

Исследуем асимптотику поведения решения краевой задачи (4.1) — (4.3) вблизи критической точки (точки ветвления линий тока). Введем в плоскости xy полярную систему координат ρ, θ с началом в критической точке, причем ось $\theta = 0$ направим вдоль линии тока $\psi = 0$. Разложим функции ψ и ψ^* по степеням ρ

(4.4) $$\psi = \rho^n f(\theta) + o(\rho^n), \quad \psi^* = \rho^m g(\theta) + o(\rho^m)$$

Если распределение скоростей u на поверхности Σ симметрично относительно оси $\theta = 0$ и если оптимальное тело единственно, то оно должно быть также симметричным относительно этой оси. Поэтому будем предполагать симметрию оптимального тела относительно оси $\theta = 0$. Отсюда следует, в частности, что функции ψ и ψ^* должны быть нечетными по θ.

Поверхность оптимального тела зададим уравнением

$$\theta = \pm\theta_1 + O(\rho)$$

где $\theta_1 = \mathrm{const}$. Тогда краевые условия для функций ψ и ψ^* можно записать в виде

(4.5) $$\psi|_S = \rho^n f(\pm\theta_1) = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_S = \rho^{n-1} f'(\pm\theta_1) = 0$$

$$\psi^*|_S = \rho^m g(\pm\theta_1) = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\right|_S = \rho^{m-1} g'(\pm\theta_1) = 0$$

Подставив выражения (4.4) в уравнения (4.2) и (4.3), получим

(4.6) $$N_n(f) + \rho^n M_n(f) = 0, \; N_m(g) + \rho^n L_{mn}(g, f) = 2\rho^{n-m} N_n(f)$$
$$N_n(f) = (f'' + n^2 f)'' + (n-2)^2 (f'' + n^2 f)$$

Здесь N_n, (f), $M_n(f)$, $L_{mn}(g, f)$ — некоторые дифференциальные выражения, не зависящие от ρ, функция ψ в критической точке обращается в нуль, поэтому можно полагать $n > 0$ и вторые члены в левых частях уравнений (4.6) отбросить. Имеем

$$N_n(f) = 0, \; N_m(g) = 2\rho^{n-m} N_n(f)$$

Подставим разложения (4.4) в условие оптимальности (4.3)

$$[\rho^{2n-4} (f'')^2 + \rho^{m+n-4} f'' q'']_{\theta=\pm\theta_1} = \mathrm{const}$$

Из этой формулы следует, что показатели m и n должны удовлетворять одному из условий: либо $n > 2$ и $m + n = 4$, либо $n = 2$ и $m + n > 4$. Рассмотрим первый случай. Тогда решение системы уравнений (4.6) имеет вид

(4.7) $$f = \alpha \sin (2 + \xi)\theta + \beta \sin \xi\theta$$
$$g = \gamma \sin (2 - \xi)\theta + \delta \sin \xi\theta$$

где $\xi = 2 - m = n - 2$, α, β, γ, δ — произвольные постоянные. Подставляя далее выражения (4.7) в граничные условия (4.5), получим систему уравнений для ξ, θ_1, α, β, γ, δ

$$\alpha \sin (2 + \xi)\theta_1 + \beta \sin \xi\theta_1 = 0$$
$$\alpha (2 + \xi) \cos (2 + \xi)\theta_1 + \beta\xi \cos \xi\theta_1 = 0$$
$$\gamma \sin (2 - \xi)\theta_1 + \delta \sin \xi\theta_1 = 0$$
$$\gamma (2 - \xi) \cos (2 - \xi)\theta_1 + \delta\xi \cos \xi\theta_1 = 0$$

Можно проверить, что для $\xi \neq 0$ и $0 < \theta_1 \leqslant \pi$ эта система уравнений не имеет ненулевого решения для постоянных α, β, γ, δ. Следовательно, для оптимального тела показатель n не может быть больше двух, т. е. реализуется случай $n = 2$, $m + n \geqslant 4$. Тогда функция f имеет вид $f = \alpha \sin 2\theta + \beta\theta$. Подставив это выражение в граничные условия для функции ψ, получим

$$\alpha \sin 2\theta_1 + \beta\theta_1 = 0, \quad 2\alpha\cos 2\theta_1 + \beta = 0$$

Приравнивая определитель этой системы уравнений относительно α и β к нулю, получим уравнение для $\theta_1 : \operatorname{tg} 2\theta_1 = 2\theta_1$. Приближенное значение корня этого уравнения равно $\theta_1 \approx 128.7^\circ$. Таким образом, в плоскопараллельном случае оптимальное тело имеет в критической точке угол, равный $2(\pi - \theta_1) \approx 102.6^\circ$.

5. Рассмотрим осесимметричное течение. Введем цилиндрическую систему координат r, z. Тогда функции $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}^*$ допускают функции тока ψ и ψ^*, определяемые равенствами.

В этом случае из уравнений (1.1) и (2.6) можно получить уравнения для функций ψ и ψ^*

$$K^2\psi = rR\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^2}K\psi\right) - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}K\psi\right)\right]$$

$$K^2\psi^* - 2K^2\psi = rR\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{1}{r^2}K\psi^*\right) - \right.$$

$$\left. -2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi^*}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{r}\right)\right]$$

$$K = r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Граничные условия для функций тока и условие оптимальности в этом случае приобретают вид

$$\psi|_S = \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_\Sigma = ru_r, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\Big|_\Sigma = -ru_z$$

$$\psi^*|_S = \left.\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\right|_S = \psi^*|_\Sigma = \left.\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\right|_\Sigma = 0, \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2} - \frac{\partial^2\psi^*}{\partial n^2}\right)\Big|_S = \mathrm{const}$$

В осесимметричном случае можно провести исследование асимптотического поведения функций ψ, ψ^* вблизи критической точки, аналогичное исследованию, проведенному в плоскопараллельном случае. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат

$$\psi = a\rho^3(\cos\theta + 1/2)(\cos\theta - 1)^2 + o(\rho^3) \tag{5.1}$$

$$\psi^* = b\rho^3(\cos\theta + 1/2)(\cos\theta - 1)^2 + o(\rho^3)$$

a, b — произвольные постоянные, ρ — расстояние до критической точки, θ — угол, отсчитываемый от оси симметрии. Из формул (5.1) следует, что оптимальное тело вблизи критической точки имеет форму конуса с углом раствора 120°.

Заметим, что члены, отброшенные в уравнениях (4.6), имеют порядок ρ^2R и поэтому при выполнении неравенства $\rho^2R \ll 1$ (в осесимметричном случае $\rho^3R \ll 1$) течение с большой степенью точности можно считать стоксовым. Поэтому как в плоскопараллельном случае, так и в осесимметричном величина угла θ_1 не зависит ни от числа Рейнольдса, ни от того является ли особая точка передней или задней.

В заключение автор благодарит Ф. Л. Черноусько за постановку задачи и внимание к работе и Н. В. Баничука за полезные беседы.

Поступила 18 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pironneau O.* On optimum profiles in Stokes flow. J. Fluid Mech., 1973, vol. 59, No. 1, p. 117.