

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЛАБОНЕОДНОРОДНЫХ СОСТОЯНИЙ
С МАЛОЙ ДОБАВКОЙ ТИПА БЕЛОГО ШУМА**

Л. Б. Айзин

(Новосибирск)

На основании представлений, развитых в работе [1], рассматривается, при некоторых ограничениях, устойчивость слабонеоднородного состояния, параметрически возмущенного малой случайной добавкой типа белого шума. Показано, что в случае, когда характерная длина волны как угодно мала по сравнению с расстоянием, на котором она существенно меняется, механизм образования собственных функций, ответственных за устойчивость состояния, аналогичен механизму, приведенному в работе [1]. Роль отражателей в данной задаче играют не границы, как в [1], а точки, в которых выполняется условие существования глобальной собственной функции для однородной задачи. Получен критерий устойчивости рассматриваемого состояния. Обсуждается вопрос о применимости полученных результатов в случае, когда отношение характерной длины волны к расстоянию, на котором она существенно меняется, нельзя считать как угодно малым.

1. Постановка задачи аналогична данной в работе [1]. Рассматривается однородная задача

$$(1.1) \quad \sum_{ikm} \left[a_{ikml}(\varepsilon x) + h d_{ikml}(\varepsilon x) F\left(\frac{x}{\delta}\right) \right] D_{ik} \Psi_m = 0, \quad D_{ik} = \frac{\partial^i}{(\partial x)^i} \frac{\partial^k}{(\partial t)^k}$$

$$\left(\sum_{ikm} f_{ikml} D_{ik} \Psi_m \right)_{x=0}, \quad l = 1, 2, \dots, n$$

$$\left(\sum_{ikm} f_{ikml} D_{ik} \Psi_m \right)_{x=L/\varepsilon}, \quad l = n + 1, \dots, N, \quad L \sim 1$$

Здесь N — порядок системы (1.1) по x , a_{ikml} , d_{ikml} — функции с характерными масштабами и модулями порядка единицы, F — действительная стационарная случайная функция с характерными масштабом и модулем порядка единицы, ε , h , δ — действительные малые параметры

$$(1.2) \quad \langle F(\theta) \rangle = 0, \quad \langle F(\theta) F(\theta') \rangle = \exp[-(\theta - \theta')^2]$$

$$\varepsilon^\alpha < h < \varepsilon, \quad \varepsilon^\alpha < \delta < \varepsilon^{\alpha_1}, \quad \alpha > \alpha_1 > 0$$

Угловые скобки означают усреднение по ансамблю.

Считается, что на действительной оси дисперсионное соотношение для системы (1.1) без правого члена в квадратной скобке

$$(1.3) \quad \det \left[\sum_{ik} a_{ikml}(\varepsilon x) \lambda^i p^k \right] = 0$$

удовлетворяет условию И. Г. Петровского [равномерно по x [1, 2]]. Т. е. существует p_0 такое, что $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ($i = 1, \dots, s$) и $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ ($i = s + 1, \dots, N$) при $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$ равномерно по x .

Считается, что задача поставлена корректно [1, 3], т. е. число граничных условий в нуле равно s , а число граничных условий в $x = L/\varepsilon$ равно $N - s$.

Считается, что вид оператора (1.1) позволяет свести задачу об устойчивости решения к отысканию решений вида $\Psi_m = \exp(pt) \Psi_m(x)$.

2. Задача (1.1) после подстановки $\Psi_m = \exp(pt) \Psi_m(x)$ и замены неизвестных сводится к следующей:

$$(2.1) \quad y_i' - \frac{\lambda_i}{\varepsilon} y_i = c_{ik} y_k + \frac{h}{\varepsilon} d_{ik} F\left(\frac{x}{\varepsilon \delta}\right) y_k$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} b_{ki} y_i(0) &= 0, \quad k = 1, \dots, s \\ b_{ki} y_i(L) &= 0, \quad k = s + 1, \dots, N \end{aligned}$$

Здесь сделана замена $x \rightarrow x/\varepsilon$, $\lambda_i(x, p)$ — корни уравнения (1.3).

Рассмотрим семейство кривых $\operatorname{Re}(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ ($i \leq s, k > s$) в плоскости p . При непрерывном изменении x в интервале (x_1, x_2) эти кривые заполняют некоторую область, лежащую левее p_0 . Обозначим $\Gamma(x_1, x_2)$ огибающую этого семейства. Считается, что $\Gamma(0, L)$ или хотя бы часть $\Gamma(0, L)$, лежащая при наибольших $p_r = \operatorname{Re} p$, обладает свойством: $\lambda_i(p) \neq \lambda_k(p)$ ($i \leq s, k > s, p \in \Gamma(0, L)$).

Для дальнейшего понадобится следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть существует $\Delta > 0$, такое, что

$$\max_{i \leq r} \operatorname{Re} \lambda_i + 3\Delta \leq \min_{i > r} \operatorname{Re} \lambda_i$$

равномерно по x , $x \in [x_1, x_2]$. Тогда для решений системы (2.1), таких, что

$$y_{im}(x_1) = \delta_{im} \quad (i \leq r, m \leq r), \quad y_{im}(x_2) = 0 \quad (i > r, m \leq r)$$

справедливы следующие оценки:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} |y_{im}(x_2)| &\leq 2I_1(x_1, x_2), \quad |y_{im}(x_1)| \leq 2\varepsilon M / \Delta \\ I_1(x_1, x_2) &= \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} f_1 dx\right), \quad f_1 = \max_{i < r} \operatorname{Re} \lambda_i + \Delta \\ M &= \max\left(\max_i \sum_k \max_x |c_{ik}|, \max_i \sum_k \max_x |d_{ik}|\right) \end{aligned}$$

Доказательство оценок (2.3) проводится следующим образом. Интегрированием и заменой $y_i = u_i I_1(x_1, x)$ уравнение (2.1) приводится к виду

$$u_i = u_i^{(0)} + U_{ik}(x_1, x) u_k, \quad i \leq r$$

$$u_i = U_{ik}(x_2, x) u_k, \quad i > r$$

$$U_{ik}(x_1, x) = \int_{x_1}^x \left(c_{ik} + \frac{h}{\varepsilon} d_{ik} F\right) \exp\left[\frac{1}{\varepsilon} \int_t^x (\lambda_i - f_1) dt\right] dt$$

$$u_i^{(0)} = \delta_{im} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_1}^x (\lambda_i - f_1) dx\right)$$

Функции u_i ищутся в виде $u_i = u_i^{(0)} + u_i^{(1)} + \dots$. Легко получить оценки для $u_i^{(n)}$. Из них и следуют приведенные выше оценки для y_{im} . Аналогичным образом показывается, что для решений системы (2.1),

таких, что

$$y_{im}(x_2) = \delta_{im}, \quad i > r, \quad m > r; \quad y_{im}(x_1) = 0, \quad i \leq r, \quad m > r$$

справедливы оценки

$$(2.4) \quad |y_{im}(x_1)| \leq 2I_2(x_2, x_1), \quad |y_{im}(x_2)| \leq 2\varepsilon M / \Delta$$

$$I_2(x_2, x_1) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_2}^{x_1} f_2 dx\right), \quad f_2 = \min_{i>r} \operatorname{Re} \lambda_i - \Delta$$

Используя оценки (2.3), (2.4), можно доказать необходимое в дальнейшем утверждение 2.

Утверждение 2. Пусть p лежит справа от $\Gamma(0, a)$ и $\det(b_{ik}(p)) \neq 0$ ($i \leq s, k \leq s$). Тогда граничные условия (2.2) можно перенести из 0 в a , где они будут иметь вид

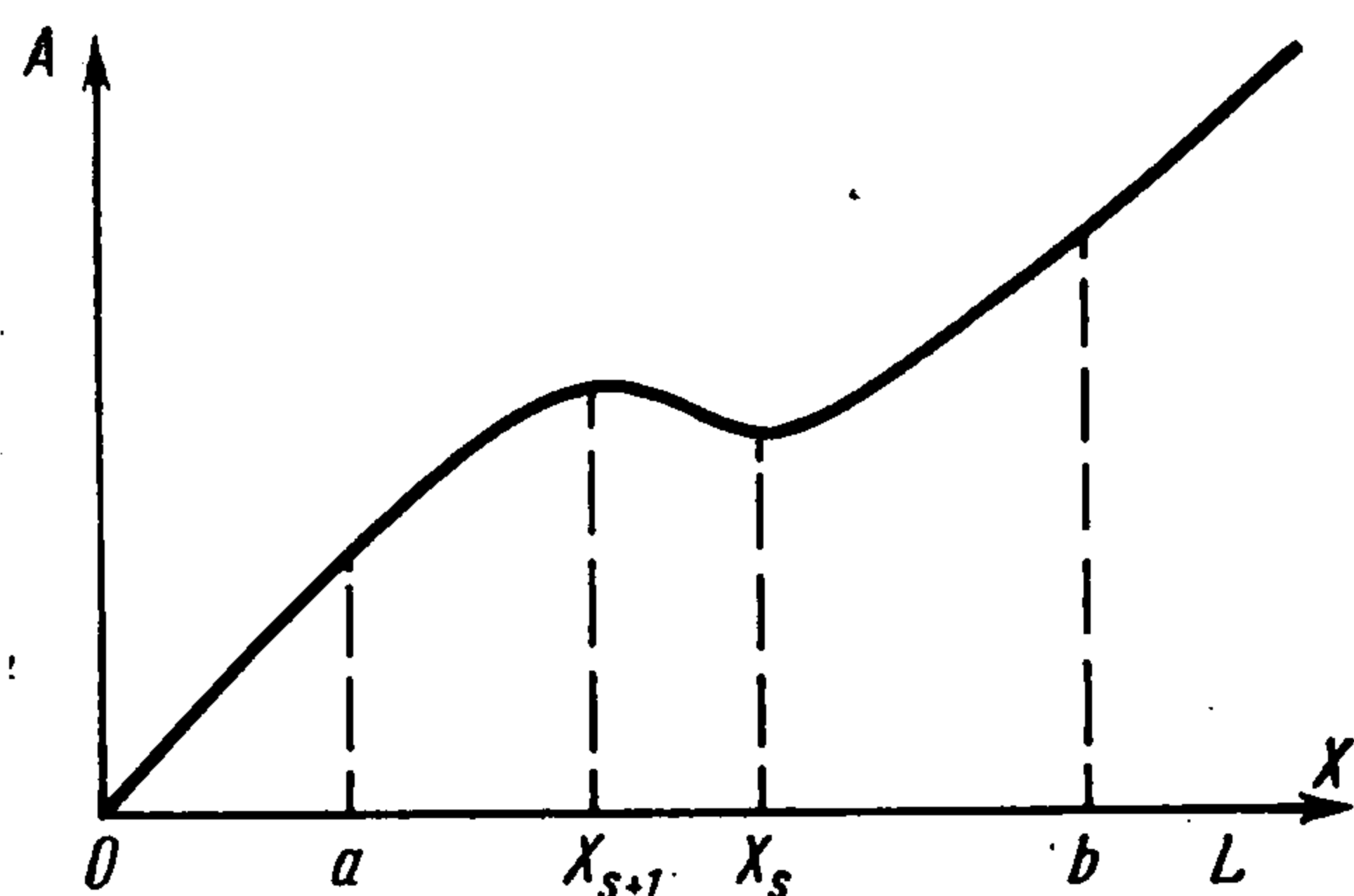
$$(\delta_{ik} + \varepsilon T_{ik}) y_k(a) = 0, \quad i \leq s \quad (|T_{ik}| \leq 1)$$

При аналогичных условиях можно снести влево граничные условия из L / ε .

При p , лежащих правее $\Gamma(0, L)$

$$\max_{i \leq s} \operatorname{Re} \lambda_i + 3\Delta \leq \min_{i > s} \operatorname{Re} \lambda_i$$

Записывая уравнение на собственные значения в форме определителя [1] и используя оценки утверждения 1, можно получить утверждение 3.



Фиг. 1

При значениях p , лежащих левее $\Gamma(0, L)$, достаточно близко от точек кривой $\operatorname{Re}(\lambda_s - \lambda_{s+1}) = 0$, принадлежащих $\Gamma(0, L)$, поведение величины

$$A = \operatorname{Re} \int_0^x (\lambda_{s+1} - \lambda_s) dt$$

показано на фиг. 1. На некотором $[a, b]$, таком, что

$$\operatorname{Re} \int_a^{\lambda_s} (\lambda_{s+1} - \lambda_s) dt > 0, \quad \operatorname{Re} \int_{\lambda_{s+1}}^b (\lambda_{s+1} - \lambda_s) dt > 0$$

выполняются условия

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \max_{i < s} \operatorname{Re} \lambda_i + 2\Delta &\leq \operatorname{Re} \lambda_s \leq \min_{i > s+1} \operatorname{Re} \lambda_i - 2\Delta \\ \max_{i < s} \operatorname{Re} \lambda_i + 2\Delta &\leq \operatorname{Re} \lambda_{s+1} \leq \min_{i > s+1} \operatorname{Re} \lambda_i - 2\Delta \end{aligned}$$

Утверждение 3. Значение p , лежащее справа от $\Gamma(0, L)$, может быть собственным значением задачи (2.1), (2.2) в том и только в том случае, если

$$\begin{aligned} \det(b_{ik}(p)) = 0, \quad i \leq s, \\ k \leq s \text{ или } \det(b_{ik}(p)) = 0, \\ i > s, \quad k > s \end{aligned}$$

Неустойчивость, порождаемая такими собственными значениями, называется граничной [1].

При этих значениях p для исследования уравнения на собственные значения оценок (2.3), (2.4) уже недостаточно. Два решения системы (2.1), s и $s + 1$, отыскиваются в виде рядов по h / ε . Считается, что на $[a, b]$ система (2.1) при $h = 0$ имеет решения вида

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x \lambda_s dt\right) (\delta_{is} + \varepsilon B_{is}), \quad \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_b^x \lambda_{s+1} dt\right) (\delta_{is+1} + \varepsilon B_{is+1})$$

Если p лежит достаточно близко к $\Gamma(0, L)$, то решения указанного вида, очевидно, существуют

$$(2.6) \quad y_{is}(a) = \delta_{is}, \quad i \leq s; \quad y_{is}(b) = 0, \quad i > s + 1; \quad y_{s+1s}(x_{s+1}) = 0$$

$$y_{is}(x) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x \lambda_s dt\right) (\delta_{is} + \varepsilon B_{is}) +$$

$$+ \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x \lambda_{0s} dt\right) \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^l \int_a^b \dots \int_a^b F(t_1) \dots F(t_l) \Phi_{ils} dt_1 \dots dt_l$$

$$\lambda_{0s} = \begin{cases} \lambda_s, & x \leq x_s \\ \lambda_{s+1}, & x > x_s, \end{cases} \quad |\Phi_{ils}| \leq 2(M + 2M^2) \exp[LM(b-a)]$$

$$(2.7) \quad \int_a^b F \Phi_{s+1, 1s} dt = \int_{x_{s+1}}^x F \varphi(x_s, t) d_{s+1s} dt$$

$$\left| \int_a^b F \Phi_{i1s} dt \right| \leq \exp\left[\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x \operatorname{Re}(\lambda_s - \lambda_{0s}) dt\right], \quad i \neq s + 1$$

$$\varphi(x_s, t) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_s}^t (\lambda_{s+1} - \lambda_s) dt\right)$$

Решение y_{is+1} можно получить аналогичным образом, только в формулах (2.6), (2.7) необходимо заменить индекс s на $s + 1$ и $s + 1$ на s , а заменить на b и b на a . Кроме того, необходимо изменить знаки всех неравенств в (2.6), за исключением неравенства для Φ_{ils} .

При $\varepsilon \rightarrow 0$ случайные величины $y_{s+1s}(b)$ и $y_{ss+1}(a)$ стремятся в среднеквадратичном [4] к величинам

$$(2.8) \quad z_{s+1s} = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_a^b \lambda_{0s} dt\right) z_1, \quad z_1 = \frac{h}{\varepsilon} \int_{x_{s+1}}^b F d_{s+1s} \varphi(x_s, t) dt$$

$$(2.9) \quad z_{ss+1} = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_b^a \lambda_{0s+1} dt\right) z_2, \quad z_2 = \frac{h}{\varepsilon} \int_{x_s}^a F d_{ss+1} \varphi(t, x_{s+1}) dt$$

Т. е.

$$(2.10) \quad \frac{\langle |y_{s+1s}(b) - z_{s+1s}|^2 \rangle}{\langle |z_{s+1s}|^2 \rangle} \rightarrow 0, \quad \frac{\langle |y_{ss+1}(a) - z_{ss+1}|^2 \rangle}{\langle |z_{ss+1}|^2 \rangle} \rightarrow 0$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ из (2.6), (2.7) и вида корреляционной функции нетрудно получить

$$\begin{aligned} \langle |z_{s+1s}|^2 \rangle &\simeq \\ &\simeq \pi h^2 \delta \varepsilon^{-1/2} |d_{ss+1}(x_{s+1})|^2 \left(\frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda_{s+1} - \lambda_s)}{\partial x} \right)_{x=x_{s+1}}^{-1/2} \exp \left(\frac{2}{\varepsilon} \operatorname{Re} \int_a^b \lambda_{0s} dt \right) \\ \langle |y_{s+1s} - z_{s+1s}|^2 \rangle &\sim h^3 \delta^2 \varepsilon^{-1/2} \exp \left(\frac{2}{\varepsilon} \operatorname{Re} \int_a^b \lambda_{0s} dt \right) \end{aligned}$$

Из этих оценок следует первая из формул (2.10), совершенно аналогичный результат можно получить и для второй формулы.

3. При p , лежащих слева от $\Gamma(0, L)$ достаточно близко от нее, граничные условия, согласно утверждению 2, можно перенести из 0 в a и из L в b и рассматривать задачу на $[a, b]$. Чтобы записать уравнение на собственные значения, необходимо знать на a, b полную систему решений уравнения (2.1). Так как на a, b выполняются неравенства (2.5), то $N - 2$ решения системы (2.1) можно взять из утверждения 1, причем для них будут выполнены оценки (2.3), (2.4); f_1 и f_2 в этом случае имеют вид

$$f_1 = \max_{i < s} \operatorname{Re} \lambda_i + \Delta, \quad f_2 = \min_{i > s+1} \operatorname{Re} \lambda_i - \Delta$$

Оставшиеся два решения (2.1) берутся согласно формулам (2.6), (2.7). Уравнение, определяющее собственные значения, имеет вид

$$(3.1) \quad \begin{vmatrix} Q_{im}(a) & Q_{is+1}(a) & Q_{im}(a) \\ i \leq s, m \leq s & i \leq s & i \leq s, m > s+1 \\ Q_{im}(b) & Q_{is}(b) & Q_{im}(b) \\ i > s, m < s & i > s & i > s, m > s \end{vmatrix} = 0$$

$$(Q_{il}(c) = (\delta_{ik} + \varepsilon T_{ik}) y_{kl}(c))$$

Уравнение (3.1) можно записать в виде

$$(3.2) \quad 1 - \varphi(x_{s+1}, x_s) z_1 z_2 + \gamma = 0$$

Из оценок (2.3), (2.4), вида s и $s + 1$ решений и формулы (2.10) следует, что γ мало по сравнению с двумя другими членами (3.2). Поэтому ниже будет рассматриваться уравнение

$$(3.3) \quad 1 - \varphi(x_{s+1}, x_s) z_1 z_2 = 0$$

Уравнение (3.3) эквивалентно системе

$$(3.4) \quad \frac{|\varphi(x_s, x_{s-1})|^2}{\langle |z_1|^2 \rangle \langle |z_2|^2 \rangle} = \theta, \quad \theta = \frac{|z_1|^2 |z_2|^2}{\langle |z_1|^2 \rangle \langle |z_2|^2 \rangle}$$

$$(3.5) \quad \int_{x_{s+1}}^{x_s} \operatorname{Im}(\lambda_s - \lambda_{s+1}) dt = \varepsilon k \pi$$

В (3.5) опущены малые члены $\varepsilon\varphi_1$ и $\varepsilon\varphi_2$; φ_1 и φ_2 — это аргументы z_1 и z_2 .

Для дальнейшего необходимо! знать плотность вероятности величины θ .

При $\varepsilon \rightarrow 0$ действительные и мнимые части z_1 и z_2 имеют вид стохастических интегралов и распределены по нормальному закону [4]. Любая линейная комбинация мнимой и действительной частей z_1 , а также и z_2 , имеет вид стохастических интегралов и распределена нормально. Отсюда следует, что двухточечные плотности $\rho(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z)$ имеют нормальный вид. Располагая $\rho(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z)$, можно получить $\rho(|z|^2)$. Располагая $\rho(|z_1|^2)$ и $\rho(|z_2|^2)$ и считая, что z_1 и z_2 независимы, нетрудно получить искомую плотность $\rho(\theta)$ (z_1 определяется окрестностью x_{s+1} , а z_2 — окрестностью x_s , F коррелирует на расстояниях порядка $\varepsilon\delta$, поэтому если $x_s - x_{s+1} \geq \varepsilon\delta$, то z_1 и z_2 можно считать независимыми). Прделанные на основании приведенных рассуждений выкладки дают

$$(3.6) \quad \rho(\theta) = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \exp\left(\frac{\theta}{4t} - t\right) dt$$

Выражая из (3.5) p_i через p_r и подставляя в (3.4), получим уравнение для p_r .

Введем $\psi(p_r)$ следующим образом:

$$(3.7) \quad \psi(p_r) = \frac{|\varphi(x_s, x_{s+1})|^2}{\langle |z_1|^2 \rangle \langle |z_2|^2 \rangle} - \theta$$

Будем говорить, что $\psi(p_r)$ имеет нуль на отрезке $[p_r - \Delta p_r, p_r + \Delta p_r]$, если с вероятностью $1 - \varepsilon$ имеем $\psi(p_r + \Delta p_r) > 0$ и $\psi(p_r - \Delta p_r) < 0$. Запишем $\psi(p_r)$ в окрестности точки p_r , в которой первый член в (3.7) равен единице

$$(3.8) \quad \psi(p_r + \Delta p_r) \simeq \exp\left(-\frac{2\Delta p_r}{\varepsilon} S\right) - \theta$$

$$S = \int_{x_{s+1}}^{x_s} \frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda_s - \lambda_{s+1})}{\partial p_r} dt$$

Пусть P_1 — вероятность того, что $\psi(p_r + \Delta p_r^{(1)}) < 0$, и P_2 — вероятность того, что $\psi(p_r + \Delta p_r^{(2)}) > 0$

$$P_1 = \int_{c_1}^{\infty} \rho(\theta) d\theta, \quad P_2 = \int_0^{c_2} \rho(\theta) d\theta, \quad c_l = \exp\left(-\frac{2\Delta p_r^{(l)}}{\varepsilon} S\right), \quad l=1, 2$$

Из уравнений $P_1 = \varepsilon$, $P_2 = \varepsilon$ находятся $\Delta p_r^{(1)}$ и $\Delta p_r^{(2)}$

$$(3.9) \quad \Delta p_r^{(1)} \simeq -\varepsilon \ln |\ln \varepsilon| S^{-1}, \quad \Delta p_r^{(2)} = -\varepsilon \ln \varepsilon S^{-1}$$

Из (3.4), (3.5), (3.9) следует, что собственные значения задачи (2.1), (2.2) с наибольшим p_r лежат на расстояниях

$$(3.10) \quad |\Delta p_r| < |\varepsilon \ln \varepsilon S^{-1}|$$

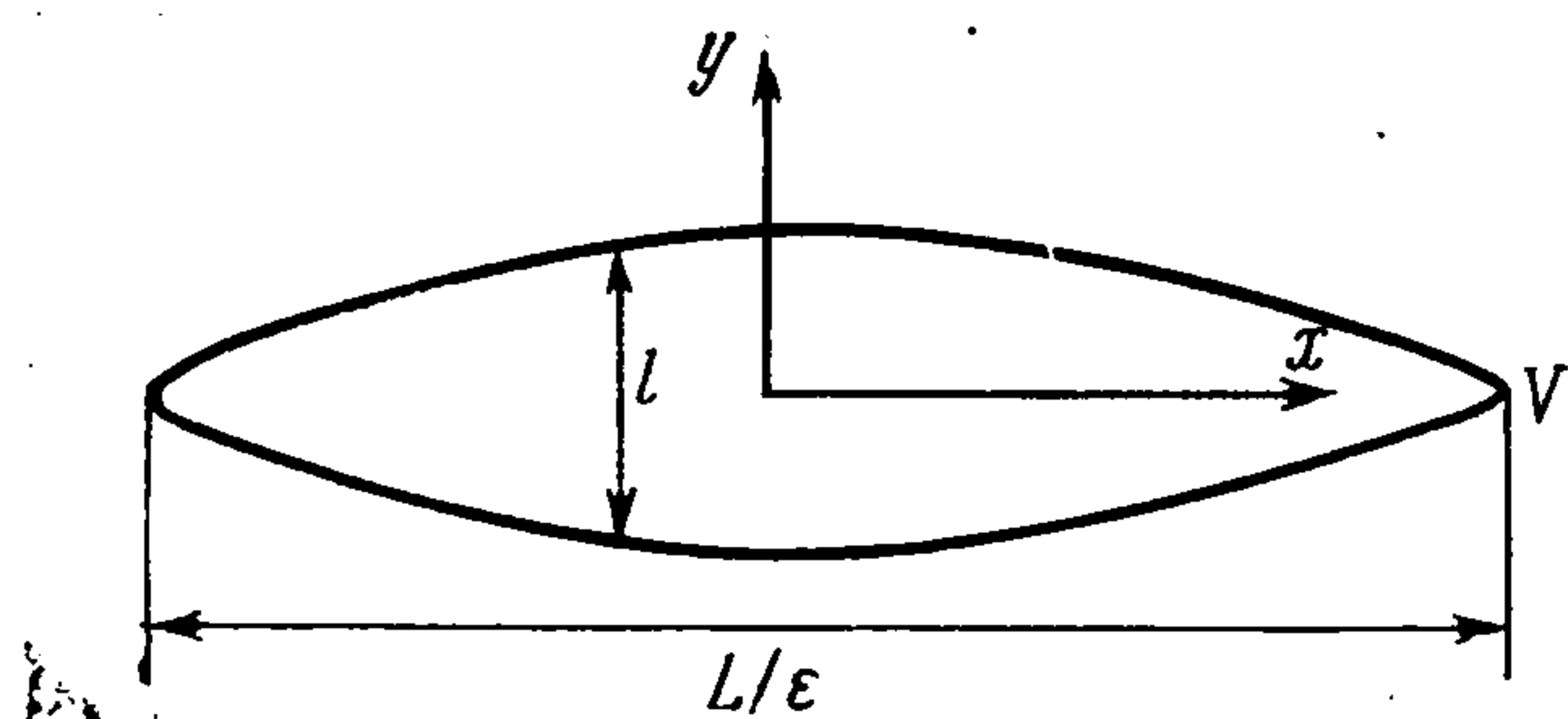
от любой точки кривой, определяемой уравнением

$$(3.11) \quad |\varphi(x_s, x_{s+1})|^2 \langle |z_1|^2 \rangle \langle |z_2|^2 \rangle = 1$$

Можно показать, пользуясь (3.6), что, с вероятностью порядка единицы, нули (3.8) лежат слева и справа от кривой (3.11). Из (3.10) при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно определить ширину полосы Δp_r и расстояние между кривой собственных значений, определяемой (3.11) и $\Gamma(0, L)$ Δp_{r0}

$$(3.12) \quad \Delta p_r \sim \varepsilon^{2/3} \ln^{-1/3}(h^2 \delta \varepsilon^{-1/2}), \quad \Delta p_{r0} = \varepsilon^{2/3} \ln^{2/3}(h \delta \varepsilon^{1/2})$$

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение задачи (1.1) устойчиво, если $\Gamma(0, L)$ лежит в левой полуплоскости p , и неустойчиво, если $\Gamma(0, L)$ заходит в правую полуплоскость.



Фиг. 2

Приведенные формулы, кроме (3.12), можно применять в некоторых задачах, где ε мало, но конечно. Это можно делать, если в полуплоскости $p_r > 0$ условие $\operatorname{Re}(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ ($i \leq s, k > s$) выполняется только для одной пары ($i = s, k = s + 1$) (что обеспечивает на некотором $[a, b]$

($a < x_{s+1}, b > x_s$) выполнение неравенств (2.5)), и система (2.1) при $h = 0$ имеет на $[a, b]$ решения вида

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x \lambda_s dx\right) (\delta_{is} + \varepsilon B_{is}), \quad \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_b^x \lambda_{s+1} dx\right) (\delta_{is+1} + \varepsilon B_{is+1})$$

что дает возможность записать s и $s + 1$ решения в виде (2.6). Устойчивость в этом случае определяется положением кривой (3.11).

Пример. Рассмотрим устойчивость стержня, имеющего вид длинной тонкой пластинки переменной ширины (длина L/ε , ширина $l(\varepsilon x)$, толщина $d \ll l$), движущегося с большой сверхзвуковой скоростью в газе (фиг. 2).

Сила, действующая на единицу площади поверхности стержня, приближенно равна [5]

$$q = B \left(\frac{\partial W}{\partial x} V - \frac{\partial W}{\partial t} \right)$$

($W(x, y, t)$ — координата поверхности стержня).

При малом B (т. е. при малом давлении газа) можно пренебречь влиянием силы q на поперечные колебания стержня и учитывать только ее влияние на крутильные колебания. Это связано с тем, что крутящий момент M , создаваемый силой q , пропорционален l^3 , а крутильная жесткость $c \sim l$. Упрощение, достигаемое за счет сказанного, не изменяет сути явления, но позволяет упростить дисперсионное соотношение.

Уравнения колебаний имеют вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -hF \left(\frac{x}{\delta} \right) m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2}{3} Bl^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = hF \left(\frac{x}{\delta} \right) m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Здесь EJ — изгибная жесткость, c — крутильная жесткость, I — момент единицы длины стержня относительно его центра инерции, m — масса единицы длины стержня и l являются функциями от εx ; $hF(x/\delta)$ — расстояние между центром тяжести и центром жесткости сечения стержня (белый шум). Вообще говоря, у медленно меняющихся функций могут быть малые случайные добавки, но так как они ничего нового по сравнению с $hF(x/\delta)$ не дают, то они опущены.

Нетрудно убедиться, что приведенная выше система по виду совпадает с системой (1.1) и удовлетворяет всем необходимым ограничениям. Уравнение (1.3) для этого случая принимает вид

$$EJ\lambda^4 + mp^2 = 0, \quad c\lambda^2 + \frac{2}{3}Bl^3(\lambda V - p) - Ip^2 = 0$$

$\Gamma(0, L)$ определяется из уравнения

$$\operatorname{Re} \left[\frac{Bl^3}{3c} + \left(\frac{Bl^6V^2}{9c^2} + \frac{2}{3} \frac{Bl^3}{c} p + \frac{I}{c} p^2 \right)^{1/2} + \left(-\frac{m}{EJ} \right)^{1/4} p^{1/2} \right] = 0$$

$\Gamma(0, L)$ лежит в правой полуплоскости, если $\max_x (IV^2/c) > 1$.

Таким образом, достаточно длинный стержень устойчив при $\max_x (IV^2/c) < 1$ и неустойчив при $\max_x (IV^2/c) > 1$.

Развитые соображения можно применять также в задачах, сводящихся к бесконечным системам обыкновенных дифференциальных уравнений, например к задачам гидродинамической устойчивости.

Автор благодарен А. Г. Куликовскому за ряд ценных замечаний и В. Я. Левченко за обсуждение вопросов, связанных с данной работой.

Поступила 20 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
2. Петровский И. Г. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1938, т. 1, вып. 7.
3. Herch R. Boundary conditions for equations of evolution. Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1964, vol. 16, No. 4.
4. Розанов Ю. А. Случайные процессы. М., «Наука», 1971.
5. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.