Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК (538.4 + 532.5) : 534

ВЗРЫВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Е. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман

(Горький)

Рассматривается распространение волны конечной амплитуды в квадратично-нелинейной среде с отрицательной вязкостью. Показано, что за конечное время в решении возникают особенности. Приводится точное решение задачи Коши для специального случая.

Эффекты отрицательной вязкости, приводящие к росту энергии волнового движения, интенсивно изучаются в последнее время в электродинамике, физике плазмы, земной атмосферы, теории океанической циркуляции и течений в открытых руслах [1–4]. Усиление волны за счет передачи энергии от турбулентных движений к регулярным возможно в любой среде с пространственно-временными флуктуациями при условии достаточной малости времени корреляции [5,6]. Из-за роста амплитуды волны нелинейные эффекты становятся важными; с их учетом рассматривалось взаимодействие конечного числа гармоник [2,4], а также структура стационарных движений [3].

В данной работе показано, что в среде с гидродинамической квадратичной нелинейностью и отрицательной вязкостью решение задачи Коши при сколь угодно «хорошей» форме начального возмущения существует на конечном интервале времени. Приводится пример такого решения.

Уравнение, приближенно описывающее распространение волны малой, но конечной амплитуды в среде с отрицательной вязкостью, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

Здесь u — некоторая физическая переменная, описывающая состояние среды (величина αu имеет размерность скорости), α и δ — постоянные. Уравнение (1) может быть получено с помощью рекуррентной процедуры из уравнений Навье—Стокса при учете малой отрицательной вязкости [7]. Отметим, что заменой переменных $t \to -t$, $x \to -x$, $u \to -u$ (1) сводится к известному уравнению Бюргерса [8]. Следовательно, решение уравнения (1) может быть использовано для восстановления по заданной ударной волне поля при $t < 0$ в среде с обычной вязкостью.

Поставим для (1) задачу Коши с начальным условием

$$u(x, 0) = U(x) \tag{2}$$

причем будем считать функцию U достаточно гладкой.

В случае $\delta < 0$ (что соответствует обычной вязкости) характер процесса, как известно, определяется числом Рейнольдса Re [8]. Если $\mathrm{Re} \ll 1$, то нелинейность несущественна и волна быстро затухает. При $\mathrm{Re} \gg 1$ волна на начальном этапе деформируется как простая, крутизна переднего склона возрастает и ограничивается диссипацией, причем структура ударного фронта хорошо описывается стационарным решением уравнения Бюргерса.

Если же $\delta > 0$ и $\mathrm{Re} \gg 1$, то волна деформируется сначала как простая, но далее становится существенной отрицательная вязкость, которая в отличие от обычной вязкости оказывает дестабилизирующее действие. Обсудим сначала структуру стационарных ударных волн в такой среде. Из (1) легко получить стационарное решение

$$u_0 = V\left[\operatorname{th}\frac{aVz}{2\delta} + 1\right], \qquad z = x - \alpha Vt \tag{3}$$

зависящее от параметра V. Как видно из (3), подобное решение не может аппроксимировать передний фронт произвольного возмущения при $\mathrm{Re} \gg 1$, как это имеет место в случае положительной вязкости. Можно показать, что стационарная волна (3) неустойчива, так как малые возмущения стремятся уйти от «разрыва». Характерное время развития неустойчивости можно оценить, линеаризуя (1) около стационарного решения (3) и представляя возмущения в виде

$$\delta u = u - u_0 = \sum_m \psi_m(z)\, e^{\lambda_m t} \operatorname{sch}\frac{\alpha Vz}{2\delta} \tag{4}$$

где ψ — собственная функция уравнения Шредингера

$$\delta\frac{d^2\psi}{dz^2} + [E - U_*(z)]\,\psi = 0 \tag{5}$$

$$E = \lambda - \frac{\alpha^2V^2}{4\delta}, \qquad U_* = -\frac{\alpha^2V^2}{2\delta}\operatorname{sch}^2\frac{\alpha Vz}{2\delta}$$

Решение (5) хорошо известно [9], в результате находим, что спектр уравнения (5) состоит из двух дискретных уровней $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_1 = 3\alpha^2V^2/16\delta$ и сплошного участка при $\lambda \geqslant \alpha^2V^2/4\delta$.

Возмущение с $\lambda_0 = 0$ соответствует смещению стационарной волны как целого (ср. [10]), а остальные — деформации профиля волны. Отсюда следует, что «время жизни» стационарной волны не превышает $16\delta / 3\alpha^2V^2$, что по порядку величины совпадает с длительностью стационарного перепада. Таким образом, в среде с отрицательной вязкостью невозможно длительное существование стационарных ударных волн.

Исследование эволюции нестационарных возмущений удобно провести на основе линейного уравнения

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \delta\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0 \tag{6}$$

получаемого из (1) заменой [8]

$$u = \frac{2\delta}{\alpha\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}, \qquad \theta = \mathrm{const}\,\exp\int_0^x \frac{\alpha u(t, x')}{2\delta}\,dx' \tag{7}$$

Прежде всего заметим, что решение задачи Коши для уравнения (6) эквивалентно решению обратной задачи теории теплопроводности. В силу линейности (6) представим решение в виде интеграла Фурье — Стилтьеса

$$\theta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(k) \exp[\delta k^2 t + ikx]\, dk \tag{8}$$

где $\theta(k)$ — спектр функции $\theta(x, 0)$. Отсюда следует, что если при $k \to \infty$ величина $\theta(k) \exp(\delta k^2 \tau)$ стремится к нулю достаточно быстро для любого τ, то функция $\theta(x, t)$ ограничена в любой момент времени. При больших t и ограниченных x интеграл в (8) может быть вычислен с помощью метода перевала. В результате получаем ($k_0(t)$ — точка перевала)

$$\theta(x, t) \sim e^{\gamma(t)} \cos[k_0(t)\, x - \nu(t)] \tag{9}$$

$$2\delta k_0 t = -\frac{d}{dk_0} \ln|\theta(k_0)|, \quad \gamma(t) = \delta k_0^2 t + \ln|\theta(k_0)|$$

причем ν пропорциональна аргументу $\theta(k_0)$. Используя (9), находим асимптотическое выражение для u

$$u(x, t) \sim -\frac{2\delta k_0}{\alpha} \operatorname{tg}(k_0 x - \nu) \tag{10}$$

Следовательно, поле $u(x, t)$ в точках $k_0 x = \nu \pm \pi/2$ обращается в бесконечность при конечном t. Это время («время взрыва») соответствует моменту первого пересечения уровня $\theta = 0$ функцией $\theta(x, t)$, которая, как следует из (7), вначале была знакопостоянной и, конечно, для класса функций с достаточно гладким спектром.

Если при больших k функция $\theta(k) \sim \exp(-\delta k^2 \tau)$, то решение ограничено лишь при $t < \tau$, и время взрыва совпадает с τ. Наконец, если $\theta(k)$ спадает медленнее, чем $\exp(-\delta k^2 \tau)$, то интеграл в (8) расходится при сколь угодно малом t, и анализ решения невозможен с помощью (8).

Таким образом, поле $u(t, x)$ обращается в бесконечность за конечное время. Ранее этот результат был получен только для конечного числа взаимодействующих синусоидальных волн [2,4]. Отметим, что в линейной теории возможен случай, когда поле остается конечным в любой момент времени (ср. (9)), для этого нужно потребовать ограниченность спектра (достаточно быстрое его спадение в области больших волновых чисел) начальных возмущений. Ясно, что малые искажения формы волны (изменение высокочастотной части ее спектра) могут привести к неограниченности поля, так как усиление растет на высоких частотах. С этим фактически связана некорректность обратной задачи теории теплопроводности [11]. В нелинейной среде неограниченность поля возникает при сколь угодно хорошей форме начального возмущения. Физически это связано с развитием цепной реакции возникновения высокочастотных гармоник, генерируемых из-за нелинейности и усиливаемых тем сильнее, чем выше их частота. Подчеркнем, что этим доказывается также некорректность обратной задачи теории простых волн в среде с малой положительной вязкостью, так что не удается восстановить вид волны в классе ограниченных функций при $t \to -\infty$.

Характер развития неустойчивости и время взрыва можно исследовать с помощью моментов поля. Пусть, например, $U(x)$ такова что

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x)\, dx = 0$$

Вводя моменты $P_m(t)$ и используя (6), найдем для этого случая

(11) $$P_0(t) = P_0 = \mathrm{const}, \quad P_1(t) = P_1(0) - 2\delta P_0 t \quad \text{и т. д.}$$

$$P_m(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2m} [\theta(x, t) - \theta(\pm\infty, 0)]\, dx$$

При $t = 0$ все моменты имеют один и тот же знак, например, положительный, однако с течением времени некоторые из них, а именно, все нечетные становятся отрицательными. Это означает, что в первоначально положительном импульсе возникает область с отрицательными значениями поля. В силу (7) смене знака функции $\theta(x, t)$ соответствует появление разрывов в функции $u(x, t)$. Заметим, что ограниченность моментов P_m вблизи T_* указывает на интегрируемый характер возникающих особенностей. Из (11) следует оценка для момента взрыва T_*

$$T_* \leqslant T_1 = P_1(0) / 2\delta P_0$$

Например, для гауссова импульса время взрыва соответствует времени стягивания его в дельта-функцию. Время взрыва можно найти также для всех автомодельных решений, получаемых из известных [12] заменой $\delta \to -\delta$ и $t \to \tau - t$ (τ — время взрыва). С помощью моментов удается оценить время взрыва и для других типов начальных условий знакопостоянной или периодической функции $U(x)$.

В заключение приведем точное решение задачи для функции вида

$$U(x) = \frac{U_0 \sin kx}{1 + {}^1/_2 \mathrm{Re} \cos kx} \quad \left(\mathrm{Re} = \frac{\alpha U_0}{k\delta} < 2\right)$$

которое имеет вид

$$u(x, t) = \frac{U_0 \exp(\delta k^2 t) \sin kx}{1 + {}^1/_2 \mathrm{Re} \exp(\delta k^2 t) \cos kx}$$

Заметим, что в рассматриваемом примере функция θ представима суммой только двух слагаемых, а функция $u(x, t)$ в любой момент времени представима бесконечным рядом Фурье

$$\theta(x, t) = 1 + {}^1/_2\, \mathrm{Re} \exp(\delta k^2 t) \cos kx$$

$$u(x, t) = \frac{4U_0}{\mathrm{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(2 \exp \frac{(-\delta k^2 t)}{\mathrm{Re}}\right)^n \times$$
$$\times [1 - \sqrt{1 - (\mathrm{Re}/2)^2 \exp(2\delta k^2 t)}]^n \sin nkx$$

Решение остается непрерывным при $t < T_* = -(\delta k^2)^{-1} \ln \mathrm{Re}/2$, причем вблизи T_* спектр волны резко расширяется в области больших волновых чисел.

Итак, волна произвольной амплитуды в квадратично-нелинейной среде с отрицательной вязкостью остается ограниченной лишь на конечном интервале времени. Заметим, что уравнение (1) выводится лишь для малых, хотя и конечных амплитуд (см. [7]), так что в области взрыва необходимо учитывать факторы, приводящие к поглощению либо на высоких частотах, либо при больших амплитудах. При этом возможна стабилизация нелинейного процесса на каком-то определенном уровне.

Авторы благодарят В. М. Генкина, В. Н. Гольдберга, К. А. Горшкова, Л. А. Островского за полезное обсуждение полученных результатов.

Поступила 6 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Старр В.* Физика явлений с отрицательной вязкостью. М., «Мир», 1971.
2. *Машкович С. А., Вейль И. Г.* О крупномасштабных атмосферных процессах с «отрицательной вязкостью». Метеорология и гидрология, 1970, № 8.
3. *Johnson R. S.* Shallow water waves on a viscous fluid — the undular bore. Phys. Fluids, 1972, vol. 15, No. 10.
4. *Рабинович М. И., Реутов В. П.* Взаимодействие параметрически связанных волн в неравновесных средах. Изв. вузов. Радиофизика, 1973, т. 16, № 6.
5. *Гавриленко В. Г., Дорфман Я. М.* К теории рассеяния волн в средах с пространственно-временными флуктуациями. Изв. вузов. Радиофизика, 1972, т. 15, № 2.
6. *McGorman R. E., Mysak L. A.* Internal waves in a randomly stratified fluid. Geophys. Fluid Dynam., 1973, vol. 4, No. 3, p. 243.
7. *Островский Л. А., Пелиновский Е. Н.* О приближенных уравнениях для волн в средах с малыми нелинейностью и дисперсией. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
8. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.
10. *Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б.* Об устойчивости распространения пламени. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
11. *Латтес Р., Лионс Ж. Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М., «Мир», 1970.
12. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Некоторые нестационарные задачи теории волн конечной амплитуды в диссипативных средах. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 4.