Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 534

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В. С. Нустров

(Свердловск)

Рассматривается случай резонанса для систем, близких к нелинейным системам, допускающим параметрическое периодическое решение. Среди собственных значений матрицы линейной части системы есть нулевые и чисто мнимые. Доказывается (при некоторых условиях) отсутствие периодического решения для исходной системы, для которого порождающее решение является тривиальным.

1. Рассмотрим систему

$$dx/dt = Ax + X(x) + \mu F(t, x, \mu) \tag{1.1}$$

Здесь x — $(l+n)$-мерный вектор, A — постоянная матрица, X — аналитическая функция относительно x в достаточно малой окрестности начала координат (порядка не ниже второго); функция F аналитически зависит от x и малого положительного параметра μ, F относительно t непрерывна и периодична с периодом 2π.

Пусть уравнение

$$|A - E\rho| = 0 \tag{1.2}$$

имеет $l - 2m$ нулевых корней и $2m$ корней вида

$$\pm N_j\lambda\sqrt{-1} \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{1.3}$$

(N_j — целые числа), а система (1.1) при $\mu = 0$ допускает периодическое решение, зависящее от произвольного постоянного вектора α, с периодом T

$$\alpha = \operatorname{col}(\alpha_1, \ldots, \alpha_\xi) \tag{1.4}$$

$$T = 2\pi\lambda^{-1}(1 + h(\alpha)) \tag{1.5}$$

Принимается, что у всех выделенных собственных значений матрицы A элементарные делители простые и среди чисел N_j хотя бы одно равно единице.

Рассматривается вопрос о существовании периодических решений уравнений (1.1) $x(t, \mu)$, $x(t, 0) = 0$, в условиях главного резонанса [1], когда известно, что нет решений, разлагающихся в ряды по целым степеням μ.

Существование параметрического периодического решения уравнений (1.1) при $\mu = 0$ с периодом (1.5) может быть обеспечено, например, наличием $\xi - 1$ первых интегралов [2].

Уравнения (1.1) представляют собой более общий класс систем, чем близкие к системам Ляпунова [1,3]. В иной постановке, чем в [1], последние системы рассматривались в работе [1] и статье [4]. В работе [5] при анализе уравнений (1.1) предполагалось, что в (1.3) λ — целое число.

---

[1] Клейменов А. Ф. Колебания систем с запаздыванием, близких к системам Ляпунова. Канд. диссертация, Свердловск, 1969.

В данной заметке исследуется случай, когда λ не является целым числом, но среди величин $N_j\lambda$ есть $m - r$ целых чисел $q_1, \ldots, q_{m-r}$. (Среди чисел q_i могут быть кратные; исключается случай [5], когда все числа q_i кратны одному из них.) Тогда систему (1.1) можно представить в виде

$$dv/dt = Bv + V(v, z) + \mu P(t, v, z, \mu) \tag{1.6}$$

$$dz/dt = Cz + Z(v, z) + \mu Q(t, v, z, \mu) \tag{1.7}$$

$$B = \operatorname{diag}(B_0, B_1, \ldots, B_{m-r}), \qquad B_i = \begin{Vmatrix} 0 & -q_i \\ q_i & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.8}$$

$$(i = 1, \ldots, m - r)$$

Здесь v — $(l - 2r)$-мерный, z — $(n + 2r)$-мерный векторы, функции V, Z, P, Q — такого же типа, что и X, F в (1.1), B_0 — нулевая $(l - 2m)\cdot$ $\cdot(l - 2m)$ — матрица, среди собственных чисел матрицы C нет величин вида $\pm q\sqrt{-1}$, q — целое число.

В рассматриваемом случае в (1.4) $\xi \leqslant l - 2r$, так как вместо (1.6), (1.7) при $\mu = 0$ можно исследовать систему

$$dv/dt = Bv + V(v, z(v))$$

где $z = z(v)$ — решение уравнения

$$(\partial z/\partial v, \ (Bv + V)) = Cz + Z$$

В дальнейшем используются следующие обозначения:

а) $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — матрицы периодических решений системы

$$dv/dt = Bv$$

и сопряженной ей;

б) p_* — ближайшее к λ целое число $(p_* \neq 0)$;

в) $v = \operatorname{col}(v^{(1)}, v^{(2)}), \qquad v^{(1)} = \operatorname{col}(v_1, \ldots, v_{l-2m})$
$v^{(2)} = \operatorname{col}(v_{l-2m+1}, \ldots, v_{l-2r})$

(аналогичные обозначения используются ниже для некоторых других функций)

г) $[f(t)] = f(2\pi) - f(0)$

Предполагается, что выполнено условие главного резонанса [1,5]

$$\delta = \operatorname{col}(\delta_1, \ldots, \delta_{l-2r}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi'(t) P(t, 0, 0, 0)\, dt \neq 0 \tag{1.9}$$

2. *Теорема 2.1*. Если среди чисел $q_1, \ldots, q_{m-r}$ нет кратных величине $\lambda(\lambda - p_*)^{-1}$ и выполнены условия

$$V^{(1)}(v, 0) = 0, \qquad \delta^{(1)} \neq 0 \tag{2.1}$$

то система (1.6) не имеет периодических решений $x(t, \mu)$, $x(t, 0) = 0$.

Например, при существовании нужного числа интегралов для уравнений (1.6), (1.7) при $\mu = 0$ первое из условий (2.1) можно считать выполненным [3,5].

Периодического решения по целым степеням μ при условии (1.9) не существует. Докажем отсутствие периодического решения по дробным степеням μ.

Доказательство проводится по известной схеме [1,5], укажем основные моменты.

Искомое периодическое решение уравнений (1.6), (1.7) с начальными условиями $v(0) = \alpha$, $z(0) = \beta$, где β — достаточно малый постоянный вектор, запишем в виде

$$v(t, \alpha, \beta, \mu) = \varphi(t)\alpha + v_*(t, \alpha, \beta) + \mu \sum_{\nu\geqslant 0} A^{(\nu)}(t, \alpha, \beta) + \mu^2(\cdots) \tag{2.2}$$

$$z(t, \alpha, \beta, \mu) = f(t)\beta + z_*(t, \alpha, \beta) + \mu(\ldots)$$

Здесь v_*, z_*, $A^{(\nu)}$ — аналитические функции относительно α, β (порядок v_*, z_* не ниже второго, порядок $A^{(\nu)}$ равен ν), $f(t)$ — некоторая $(n + 2r) \times (n + 2r)$-матрица, зависящая от t.

Имеем [1,5]

$$[\mathring{A}] = 2\pi\delta, \quad z(t, \alpha, \beta, 0) \equiv 0 \qquad Z(v, 0) \equiv 0 \tag{2.3}$$

Из условий периодичности $[z] = 0$ с учетом (2.3) определим аналитический вектор

$$\beta = \beta(\alpha, \mu), \qquad \beta(\alpha, 0) = 0$$

и подставим в уравнение $[v] = 0$, имеющее вид

$$v(2\pi, \alpha, \beta(\alpha, 0), 0) - \alpha + \mu(2\pi\delta + \Phi(\alpha, \mu)) = 0 \tag{2.4}$$

где Φ — аналитическая функция α, μ.

Используя формулу (1.5), заменим величину 2π следующим образом:

$$2\pi = p_* T + \Omega, \qquad \Omega = \varkappa - 2\pi\rho_*\lambda^{-1}h(\alpha)$$
$$\varkappa = 2\pi(\lambda - p_*)\lambda^{-1}$$

После разложения в ряд по степеням Ω (с учетом уравнения (1.6)) условие (2.4) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(\varkappa B)^n \alpha + \cdots + \mu(2\pi\delta + \Phi(\alpha, \mu)) = 0 \tag{2.5}$$

где не выписаны члены порядка выше первого относительно α.

Используя формулу (1.8), вычислим коэффициент при α — сходящийся абсолютно матричный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(\varkappa B)^n = \exp(\varkappa B) - 1 = \operatorname{diag}(B_0, \Gamma)$$

$$\Gamma = \operatorname{diag}(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{m-r}), \quad \Gamma_i = \begin{Vmatrix} \cos\varkappa q_i - 1 & -\sin\varkappa q_i \\ \sin\varkappa q_i & \cos\varkappa q_i - 1 \end{Vmatrix}$$
$$(i = 1, \ldots, m - r)$$

В обозначениях в) уравнение (2.5) можно окончательно записать в виде системы (в уравнении (2.6) члены, не зависящие от μ, обращаются в нуль в силу первого условия (2.1) и равенства $\beta(\alpha, 0) = 0$)

$$\mu R(\alpha, \mu) \equiv \mu(2\pi\delta^{(1)} + \Phi^{(1)}(\alpha, \mu)) = 0 \tag{2.6}$$

$$\Gamma\alpha^{(2)} + \cdots + \mu(2\pi\delta^{(2)} + \Phi^{(2)}(\alpha, \mu)) = 0 \tag{2.7}$$

При условии, что среди чисел $q_1, \ldots, q_{m-r}$ нет кратных величине $\lambda(\lambda - p_*)^{-1}$, имеем

$$|\Gamma| = 2^{m-r} \prod_{i=1}^{m-r} (1 - \cos\varkappa q_i) \neq 0$$

Из уравнения (2.7) найдем аналитический вектор

$$\alpha^{(2)} = \alpha^{(2)}(\alpha^{(1)}, \mu), \qquad \alpha^{(2)}(0, 0) = 0 \tag{2.8}$$

и подставим в (2.6). Получим условие

$$R_*(\alpha^{(1)}, \mu) \equiv 2\pi\delta^{(1)} + \Phi_*^{(1)}(\alpha^{(1)}, \mu) = 0$$

которому нельзя удовлетворить никаким вектором $\alpha^{(1)}(\mu)$, $\alpha^{(1)}(0) = 0$ (в условиях резонанса $\delta^{(1)} \neq 0$).

Заметим, что полученный вывод справедлив при любом $\xi \leqslant l - 2r$ в (1.4).

3. Если первое условие (2.1) не выполнено, то в уравнении (2.6) будут присутствовать члены, не зависящие от μ. Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 3.1. Если среди чисел $q_1, \ldots, q_{m-r}$ нет кратных величине $\lambda(\lambda - p_*)$ и $V^{(1)}(v, 0) \neq 0$, то число и вид искомых периодических решений (по дробным степеням μ) системы (1.6), (1.7) определяется числом и видом решений нового уравнения (2.6) (после подстановки (2.8)).

Замечания. 1°. Ограничение (2.1) на вектор $\delta^{(1)}$ не накладывается. В случае, когда $\delta^{(1)} = 0$, затруднено только практическое применение теоремы 3.1, так как необходимо будет вычислить первые члены в разложении функции $\Phi^{(1)}(\alpha, \mu)$ [5].

2°. Можно выяснить закономерность образования членов младшего порядка (не зависящих от μ) в уравнении (2.6) (см., например, вычисление коэффициента при α в (2.5)). Однако получение этих членов в явном виде оказывается нецелесообразным ввиду их громоздкости. Удобнее рассматривать уравнение (2.6) в приложении к конкретным системам. При этом следует учитывать, что в (2.8) порядок функции $\alpha^{(2)}(\alpha^{(1)}, 0)$ не ниже порядка функции $V^{(2)}(v^{(1)}, 0, 0)$ в (1.6). Последнее обстоятельство существенно облегчает составление уравнения (2.6).

Пусть, например, с точностью до членов более высокого порядка

$$V^{(2)}(v^{(1)}, 0, 0) = V^{2s}(v^{(1)}) + \ldots, \qquad \underset{k \geqslant s}{h(\alpha) = h^{(k)}(\alpha) + \ldots}$$

где $V^{(2s)}$ — члены s-го порядка относительно $v^{(1)}$, $h^{(k)}$ — члены k-го порядка относительно α. Из уравнения (2.7) найдем вектор $\alpha^{(2)}(\alpha^{(1)}, \mu)$

$$\alpha^{(2)}(\alpha^{(1)}, 0) = \alpha^{(2s)}(\alpha^{(1)}) + \ldots$$

Если разложение функции $V^{(1)}(v^{(1)}, 0, 0)$ начинается с членов порядка $p \leqslant s$

$$V^{(1)}(v^{(1)}, 0, 0) = V^{(1p)}(v^{(1)}) + \ldots$$

то уравнение (2.6) имеет вид

$$V^{(1p)}(\alpha^{(1)}) + \ldots + \mu\,(2\pi\delta^{(1)} + \Phi_*^{(1)}(\alpha^{(1)}, \mu)) = 0$$

Автор благодарит С. Н. Шиманова за внимание к работе и полезные советы.

Поступила 4 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. *Шиманов С. Н.* Обобщение одного предложения Ляпунова о существовании периодических решений. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
3. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
4. *Старжинский В. М.* Системы Ляпунова с демфпированием. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
5. *Нустров В. С.* О периодических решениях систем, близких к нелинейным системам при главном резонансе. Изв. вузов, Сер. матем., 1970, вып. 3.