

**СТАБИЛИЗАЦИЯ СВОБОДНОГО ВРАЩЕНИЯ
АСИММЕТРИЧЕСКОГО ВОЛЧКА С ПОЛОСТЯМИ,
ЦЕЛИКОМ ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ**

Е. П. Смирнова

(Ленинград)

Рассматривается движение асимметрического волчка с полостями, занятыми вязкой несжимаемой жидкостью. Изучается стабилизирующее влияние жидкости на вращение волчка вокруг заданной оси. Найдено характерное время стабилизации и наилучшая ориентация полости относительно твердого тела.

1. Уравнения движения и их исследование. В системе координат, оси которой направлены по главным осям инерции системы тело — жидкость, уравнения движения волчка при малых числах Рейнольдса приводятся к виду [1]

$$(1.1) \quad I\dot{\omega} + [\omega, I\omega] = \frac{\rho}{\nu} \{P\ddot{\omega} + [\omega, P\dot{\omega}]\}$$

Здесь I — тензор инерции системы, ω — угловая скорость волчка, ρ и ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости. Правая часть (1.1) описывает момент сил, вызванный движением жидкости относительно волчка. В ней отброшены члены более высокого порядка малости по ρ/ν . Тензор $P = \|P_{ij}\|$ определяется только формой полости. Он симметричен, $P_{ii} > 0$, в случае нескольких полостей он равен сумме тензоров для отдельных полостей. Вычисление компонент этого тензора для заданной полости представляет собой отдельную задачу. Для некоторых форм полости они получены в [1].

Движение твердого тела в случае симметричной полости, когда тензор P кратен единичному тензору, изучалось в [1]. Здесь будет рассмотрен случай произвольного тензора P .

Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$M\dot{\omega} + [\omega, M] = 0, \quad M = I\omega - \frac{\rho}{\nu} P\dot{\omega}$$

где M — полный момент импульса системы. Отсюда сразу видны два соотношения

$$(1.2) \quad MM\dot{\omega} = 0, \quad M\dot{\omega} = 0$$

т. е. закон сохранения момента импульса и закон диссипации энергии системы

$$(1.3) \quad \Gamma^2 - 2 \frac{\rho}{\nu} (\Gamma, P\dot{\omega}) = \text{const}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dt} - \frac{\rho}{\nu} \frac{d}{dt} (\omega, P\dot{\omega}) = - \frac{\rho}{\nu} (\dot{\omega}, P\dot{\omega}) < 0$$

$$E = \frac{1}{2} (\omega, I\omega) - \frac{\rho}{\nu} (\omega, P\dot{\omega})$$

Здесь E — полная энергия системы, $\Gamma = I\omega$ и $H = 1/2 (\omega, I\omega)$ — момент импульса и энергия системы в предположении, что жидкость неподвижна относительно твердого тела. Так как уравнение (1.1) справедливо с точностью до членов порядка ρ^2 / ν^2 , дальнейшее исследование его проводится с той же точностью. Учет членов более высокого порядка потребовал бы нахождения следующего гидродинамического приближения.

Если положить $\nu = \infty$, движение системы будет движением Эйлера — Пуансо (см., например, [2]), которое зависит от трех параметров: Γ^2 , H и момента начала отсчета времени. Все эти параметры при бесконечной вязкости не зависят от времени. При конечной, но большой вязкости уравнения (1.3) содержат малый параметр, поэтому можно воспользоваться асимптотическими методами, развитыми в [3, 4]. Движение волчка рассматривается при этом как движение свободного волчка, в котором параметры H и Γ медленно меняются со временем. Поэтому период эффективного движения Эйлера — Пуансо тоже является медленно меняющейся функцией времени, и удобно усреднить соотношения (1.3) по периоду невозмущенного движения Эйлера — Пуансо. Пренебрегая при усреднении зависимостью параметров от времени, получим

$$(1.4) \quad \Gamma^2 = \text{const}, \quad \frac{dH}{dt} = -\frac{\rho}{\nu} (\omega^{\cdot}, P\omega^{\cdot}) < 0$$

Здесь и в дальнейшем под Γ^2 и H подразумеваются величины, усредненные по периоду Эйлера — Пуансо.

Гидродинамическая задача решалась в предположении, что ω , ω^{\cdot} и следующие производные — величины порядка единицы. Поэтому из решений уравнений (1.1) и (1.3) следует отбирать те, которые удовлетворяют этим условиям. Им соответствуют решения приближенного варианта уравнений (1.1), предложенного в [1]

$$(1.5) \quad \begin{aligned} I\omega^{\cdot} + [\omega, I\omega] &= \frac{\rho}{\nu} \{Pb + [\omega, Pa]\} \\ a &= -I^{-1}[\omega, I\omega], \quad b = -I^{-1}[a, I\omega] - I^{-1}[\omega, Ia] \end{aligned}$$

где a и b с точностью до ρ^2 / ν^2 совпадают с ω^{\cdot} и $\omega^{\cdot\cdot}$.

Исследуем устойчивость стационарных состояний системы, т. е. вращений вокруг главных осей инерции. Пусть движение близко к вращению вокруг i -й оси: $\omega = \Omega_i + \delta$. Тогда уравнение (1.5) принимает вид

$$\begin{aligned} I\delta^{\cdot} - \frac{\rho}{\nu} Pb_{\delta} + [\Omega_i, I\delta] + I_i[\delta, \Omega_i] - \frac{\rho}{\nu} [\Omega_i, Pa_{\delta}] &= 0 \\ a_{\delta} &= -I^{-1}[\delta, I_i\Omega_i] - I^{-1}[\Omega_i, I\delta] \\ b_{\delta} &= -I^{-1}[a_{\delta}, I_i\Omega_i] - I^{-1}[\Omega_i, Ia_{\delta}] \end{aligned}$$

Положив $i = 1$, получим три дифференциальных уравнения первого порядка, два из которых зависят только от δ_2 и δ_3 , а третье — от всех трех δ_j . При раскрытии характеристического уравнения следует отбросить члены $\sim \rho^2 / \nu^2$. Оказывается, что при этом корни его зависят лишь от

диагональных компонент тензора $\|P_{ik}\|$ и равны

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\rho}{\nu} \frac{I_1}{2I_2I_3} \Omega_1^2 \left(P_{22} \frac{I_1 - I_3}{I_2} + P_{33} \frac{I_1 - I_3}{I_3} \right) \pm \pm i\Omega_1 \sqrt{\frac{I_1 - I_2}{I_3} \frac{I_1 - I_3}{I_2}}$$

Отсюда следует, что если I_1 не является наибольшим моментом инерции, стационарные вращения неустойчивы.

Рассматривая случай, когда I_1 — максимальный момент инерции, надо учесть, что есть еще один корень характеристического уравнения $\lambda_3 = 0$. Поэтому для исследования устойчивости составим функцию Ляпунова

$$V = 2I_1E - M^2 + (M^2 - I_1^2\Omega_1^2)^2$$

Она равна нулю при стационарном движении, а в случае малых отклонений от него равна сумме многочлена

$$V_1 = I_2(I_1 - I_2)\delta_2^2 + I_3(I_1 - I_3)\delta_3^2 + (I_1^2\delta_1^2 + I_2^2\delta_2^2 + I_3^2\delta_3^2 + 2I_1^2\delta_1\Omega_1)^2$$

и многочлена, пропорционального ρ/ν (см., например, [5]). При $I_1 > I_2, I_3$ функция V является, таким образом, положительно-определенной функцией $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. А из равенств (1.2) и (1.3) следует, что $V^* \leq 0$.

Таким образом, по теореме Ляпунова вращение вокруг оси X_1 устойчиво, что согласуется с результатами [1] и известными теоремами [5].

2. Усредненное движение свободного волчка. Итак, для ω будем использовать формулы Эйлера — Пуансо, в которых энергия — медленно меняющаяся функция времени. Уравнения (1.5) все еще остаются достаточно сложными, поэтому удобнее найти H из уравнения (1.4). Для определенности будем считать, что $I_1 > I_2 > I_3$. Обозначим

$$a = \frac{I_1 - I_2}{I_3}, \quad b = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad c = \frac{I_1 - I_3}{I_2}$$

Рассмотрим по отдельности случаи $2HI_2 < \Gamma^2$ (траектории Γ охватывают ось X_1) и $2HI_2 > \Gamma^2$ (траектории Γ охватывают ось X_3).

В первом случае, как обычно, введем вместо энергии безразмерную величину

$$(2.1) \quad k_1^2 = \frac{2HI_1 - \Gamma^2}{\Gamma^2 - 2HI_3} \frac{I_1 b}{I_3 a}, \quad 0 \leq k_1^2 \leq 1.$$

а вместо времени — безразмерную переменную $\xi = (t - t_0) / T_0$, где T_0 — характерное время усредненного движения.

Подставляя в (1.4) формулы Эйлера — Пуансо и усредняя по периоду, запишем это уравнение в виде $(E(k_1^2), K(k_1^2))$ — полные эллиптические интегралы)

$$(2.2) \quad \frac{dk_1^2}{d\xi} = (1 - \kappa)(1 - k_1^2) - \frac{E(k_1^2)}{K(k_1^2)} [(1 - \kappa) + k_1^2(1 + \kappa)]$$

где использованы обозначения

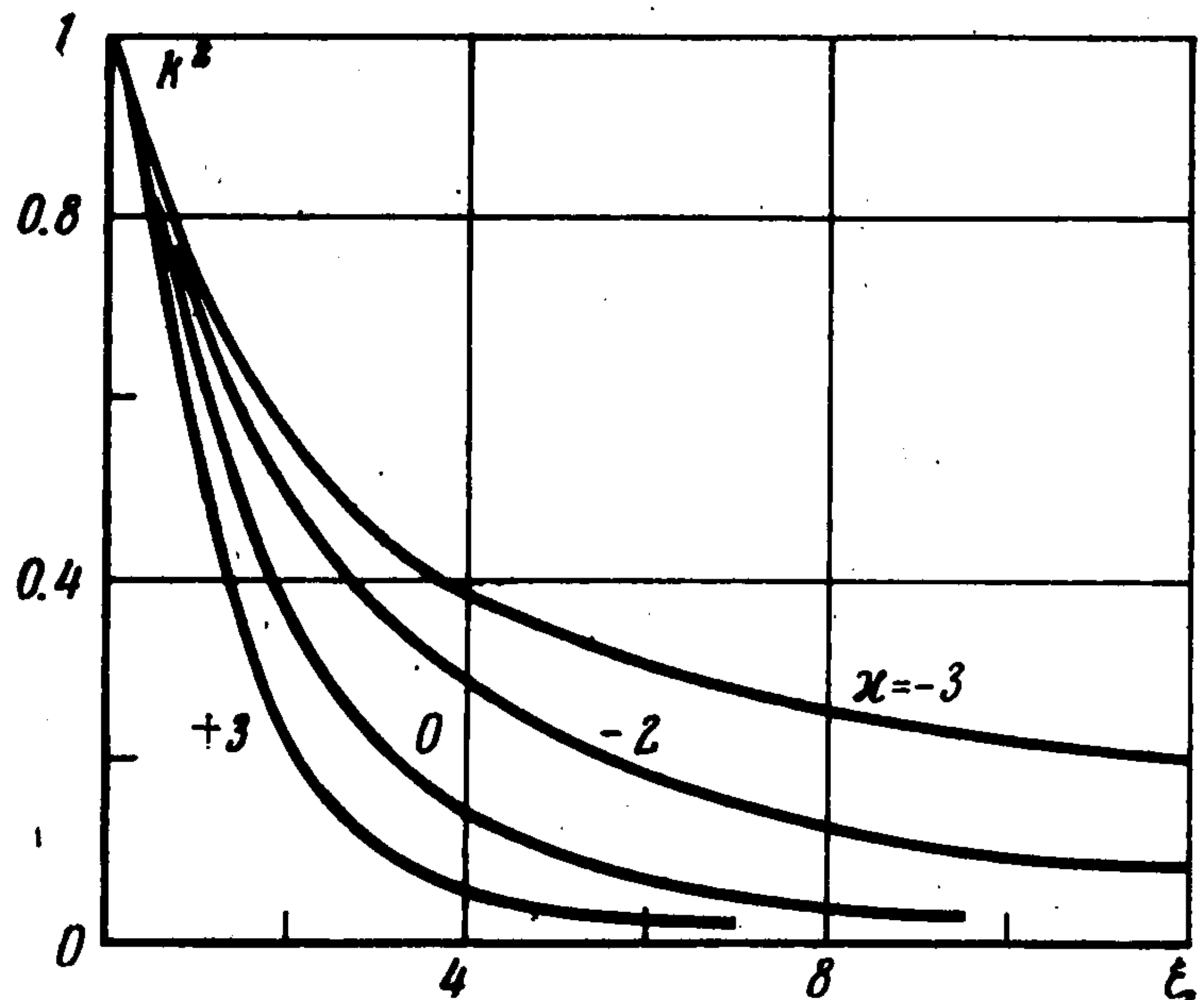
$$(2.3) \quad \kappa = 3 \frac{P_{33a} - P_{11b}}{P_{33a} + 2P_{22c} + P_{11b}}$$

$$T_0 = \frac{\nu}{\rho} \frac{I_1 I_2 I_3}{\Gamma^2} \frac{3}{P_{33a} + 2P_{22c} + P_{11b}}$$

Члены, содержащие недиагональные компоненты $\| P_{ik} \|$, выпадают при усреднении. Таким образом, в рассматриваемом приближении движение волчка зависит только от компонент тензора $\| P_{ik} \|$ по главным осям инерции, что согласуется с результатами по вычислению характеристических чисел при движении, близком к стационарному.

Уравнение (2.2) совпадает с уравнением, полученным в [1] для случая тензора P , кратного единичному тензору, но здесь κ может принимать любые значения на отрезке $(-3, +3)$ вместо $[-1, +1]$. Величина k_1^2 монотонно убывает от 1 до 0, когда ξ растет от 0 до ∞ .

Решение уравнения (2.2) легко найти численно. Соответствующие графики приведены на фигуре. Очевидно, k_1^2 убывает с ростом ξ тем быстрее, чем больше κ . Для больших значений ξ (малых k_1^2) можно воспользоваться разложением E и K в ряд (см., например, [6]). Ограничиваясь квадратичными членами, получим



$$(2.4) \quad \frac{dk_1^2}{d\xi} = -k_1^2 \frac{3 + \kappa}{2}, \quad k_1^2 = \text{const} \exp\left(-\frac{3 + \kappa}{2} \xi\right) =$$

$$= C_1 \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)$$

$$(2.5) \quad T_1 = \frac{\nu}{\rho} \frac{I_1 I_2 I_3}{\Gamma^2} \frac{1}{P_{22c} + P_{33a}}$$

Для случая $2HI_2 > \Gamma^2$ удобно ввести величину

$$(2.6) \quad k_3^2 = \frac{\Gamma^2 - 2HI_2}{2HI_1 - \Gamma^2} \frac{I_3 a}{I_1 b} = \frac{1}{k_1^2}, \quad 0 \leq k_3^2 \leq 1$$

Уравнение для k_3^2 совпадает с уравнением (2.2), однако соответствующие выражения для κ и T_0 отличаются от (2.3) знаком. При малом k_3^2 получаем

$$(2.7) \quad k_3^2 = C_3 \exp\left(\frac{t}{T_3}\right), \quad T_3 = \frac{\nu}{\rho} \frac{I_1 I_2 I_3}{\Gamma^2} \frac{1}{P_{22c} + P_{11b}}$$

Заметим, что k_3^2 растет с ростом t , приближаясь к единице.

Рассмотрим теперь, как происходит во времени усредненное движение системы. Пусть в некоторый момент вектор Γ близок к оси X_3 . Это

означает, что $H \approx \Gamma^2 / 2I_3$. Движение определяется формулами (2.6), (2.7), и Γ уходит от оси X_3 , приближаясь к оси X_2 , где $k_2^2, k_1^2 \approx 1$ ($H \approx \approx \Gamma^2 / 2I_2$). В дальнейшем H продолжает убывать со временем, приближаясь к значению $H = \Gamma^2 / 2I_1$. При этом Γ подходит к оси X_1 . Таким образом, только движение вокруг оси X_1 является устойчивым, в соответствии с результатами п.1 и общими теоремами [5]. Движение вектора Γ совпадает с описанным в [1], отличаясь лишь бóльшим интервалом возможных значений κ .

Очевидно, что полное характерное время восстановления ориентации по порядку величины равно $T_1 + T_3$ и, таким образом, $\sim \nu$. Отметим также, что $1 / T_0 = 1 / T_1 + 1 / T_3$, следовательно, $T_0 < T_1, T_3$.

Ясно, что наиболее выгодное расположение полости с жидкостью внутри твердого тела определяется требованием, чтобы и T_1 , и T_3 были как можно меньше. Если диагональные элементы P_{ik} сильно различаются между собой и если тензор инерции всей системы слабо зависит от положения полости с жидкостью, то, как видно из (2.5) и (2.7), нужно ориентировать полость относительно твердого тела так, чтобы значение P_{22} оказалось наибольшим из собственных значений P_{ik} . Это замечание относится, в частности, к случаю тороидальной полости, где одно из диагональных значений P_{ik} существенно больше двух других.

Вообще говоря, при $k^2 \rightarrow 1$ период Эйлера — Пуансо неограниченно растет, и усреднение теряет смысл. Но такова ситуация лишь в узкой полосе значений энергии, когда $\ln(1 - k^2)^{-1} \gtrsim \nu$. Нетрудно проверить, что при усредненном движении этот участок проходится за время порядка единицы. Эта область соответствует положению Γ вблизи оси X_2 , где даже обычное движение Эйлера — Пуансо неустойчиво. Поскольку реальное движение содержит еще осцилляции, отсутствующие в усредненном движении, то в действительности эта область проходится еще быстрее. Так как полное время ориентации $\sim \nu$, то движение вблизи оси X_2 не дает в него существенного вклада.

Вблизи оси X_1

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{\Gamma}{I_1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{I_3^2 a}{I_1^2 b} k_1^2 \right) \rightarrow \frac{\Gamma}{I_1} \\ \omega_2 &= \frac{\Gamma}{I_1} k_1 \sqrt{\frac{c}{b}} \sin \left(t \frac{\Gamma}{I_1} \sqrt{ac} \right) \rightarrow 0 \\ \omega_3 &= \frac{\Gamma}{I_1} k_1 \sqrt{\frac{a}{b}} \cos \left(t \frac{\Gamma}{I_1} \sqrt{ac} \right) \rightarrow 0 \\ \cos \theta &= 1 - \frac{1}{2} \frac{I_3^2 a}{I_1^2 b} k_1^2 \rightarrow 1\end{aligned}$$

где θ — угол между Γ и осью X_1 .

Рассмотрим кратко случай симметричного волчка. Безразмерный параметр, соответствующий энергии, оказывается здесь просто экспоненциальной функцией времени. Характерное время процесса равно

$$\begin{aligned}T_2 &= \frac{\nu}{\rho} \frac{I_1 I_2^2}{a(P_{22} + P_{33}) \Gamma^2} \quad \text{при } I_1 > I_2 = I_3 \\ T_4 &= \frac{\nu}{\rho} \frac{I_1^2 I_3}{b(P_{22} + P_{11}) \Gamma^2} \quad \text{при } I_1 = I_2 > I_3\end{aligned}$$

что совпадает с характерным временем движения волчка около оси X_1 или X_2 соответственно.

Если $I_1 > I_2 = I_3$, то при любом начальном вращении вектор Γ идет по спирали к оси X_1 . В случае же $I_1 = I_2 > I_3$ вектор Γ стремится к некоторой оси, лежащей в плоскости X_1X_2 . Положение этой оси определяется начальными условиями.

Автор благодарит В. И. Зубова за обсуждения, вызвавшие появление этой работы, и Е. П. Чурова за руководство.

Поступила 11 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1968.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 1. Механика. М., Физматгиз, 1958.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. Физматгиз, 1963.
4. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М., Изд-во МГУ, 1971.
5. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
6. Янке Б., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Физматгиз, 1959.