

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Г. П. Черепанов

(Москва)

В связи с тем, что разрушение конструкций обычно начинается в местах наиболее резкой концентрации напряжений вблизи отверстий, представляет интерес определение формы равнопрочных контуров отверстий, на которых неизбежная технологически концентрация напряжений была бы наименьшей по сравнению со всеми другими контурами.

Предлагается эффективное точное решение некоторых обратных плоских задач теории упругости об определении равнопрочных контуров отверстий. Вначале дается постановка задачи и приводятся основные соотношения. Затем общая задача для любого числа отверстий в бесконечной плоскости сводится к стандартной задаче Дирихле для внешности того же числа параллельных разрезов на параметрической плоскости. Этим методом найдено эффективное точное решение для случая одного и двух отверстий, а также для случая периодического и двокопериодического ряда отверстий. Рассматривается вопрос о применении полученных решений к теории конструкций минимального веса.

1. Постановка задачи и основные соотношения. Рассмотрим напряженное состояние в бесконечной изотропной и однородной упругой пластине, ослабленной криволинейными отверстиями, число которых может быть любым. Предположим, что к краям отверстий приложены постоянные нормальные и касательные усилия

$$(1.1) \quad \sigma_n = p, \quad \tau_{nt} = \tau$$

а на бесконечности действует однородное поле постоянных напряжений (в случае двокопериодического ряда отверстий условия, заменяющие (1.2), приводятся ниже в п. 5)

$$(1.2) \quad \sigma_x = \sigma_x^\infty, \quad \sigma_y = \sigma_y^\infty, \quad \tau_{xy} = \tau^\infty$$

Здесь x, y — прямоугольные декартовы координаты, t и n — касательная и нормаль к контуру отверстия (образующие правую систему nt).

Поставим следующую задачу: найти форму отверстий и их взаимное расположение, такие, чтобы тангенциальное нормальное напряжение σ_t , действующее на этих контурах, было постоянной величиной, одинаковой для всех отверстий. Таким образом, требуем, чтобы на всех контурах отверстий выполнялось условие

$$(1.3) \quad \sigma_t = \sigma = \text{const}$$

Такие отверстия называются равнопрочными [1]. Величина σ , как и сами отверстия, подлежит определению. На равнопрочных отверстиях пластическая зона возникает, очевидно, одновременно по всему контуру.

Постановка и решение некоторых задач такого типа имеется в работах [1-11]. Ниже в п. 6 обсуждается тесная связь этих задач с теорией конструкций минимального веса.

Компоненты напряжений представим [12] через потенциалы Колосова — Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\operatorname{Re} \Phi(z) & (z = x + iy) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi'(z)] \end{aligned}$$

Функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, согласно условиям (1.2) при стремлении z в бесконечность, ведут себя так:

при $z \rightarrow \infty$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \Phi(z) &= 1/4(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + O(z^{-2}) \\ \Psi(z) &= b + O(z^{-2}), \quad b = 1/2(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) + i\tau^\infty \end{aligned}$$

Случай бесконечносвязной области является особым и должен рассматриваться отдельно.

Используя известные соотношения

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \sigma_t + \sigma_n &= \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_t - \sigma_n + 2i\tau_{tn} &= e^{2i\alpha}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \end{aligned}$$

где α — угол между внешней нормалью к контуру и осью x , отсчитываемый от x к n , а также представления (1.4), граничные условия (1.1) и (1.3) на неизвестных контурах L_0 отверстий можно представить в виде

$$(1.7) \quad 4\operatorname{Re} \Phi(z) = \sigma + p, \quad z \in L_0$$

$$(1.8) \quad \bar{z}\Phi'(z) + \Psi'(z) = ae^{-2i\alpha}, \quad z \in L_0 \quad (a = 1/2(\sigma - p) + i\tau)$$

Если аналитическая функция ограничена всюду внутри области (в том числе в бесконечно удаленной точке), а на границе области ее действительная часть постоянна, то сама эта функция постоянна. Следовательно, решение краевой задачи (1.7), (1.5) для функции $\Phi(z)$ имеет вид

$$(1.9) \quad \Phi(z) = 1/4(\sigma + p), \quad \sigma = \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty - p$$

Краевое условие (1.8) с учетом формулы (1.9) запишется в виде

$$(1.10) \quad e^{2i\alpha}\Psi'(z) = a, \quad z \in L_0$$

причем $\Psi(z) = b + O(z^{-2})$ при $z \rightarrow \infty$.

2. Метод решения краевой задачи. Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ при помощи конформного преобразования, осуществляемого аналитической функцией $\omega(\zeta)$

$$(2.1) \quad z = \omega(\zeta)$$

Напомним основные факты [13] из теории конформных отображений многосвязных областей: а) всякую n -связную область, включающую бесконечно удаленную точку, всегда можно конформно отобразить на внешность некоторых n разрезов, параллельных действительной оси, с соответствием бесконечно удаленных точек, б) при $n \geq 3$ это отображение единственно, если задать поведение отображающей функции на бесконечности $\omega(\zeta) = \zeta + O(1)$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Будем считать, что искомая функция $\omega(\zeta)$ задает взаимнооднозначное соответствие упругой области на плоскости z и внешности соответствующего числа разрезов M на плоскости ζ , параллельных действительной оси (см. фиг. 1, где изображен случай двусвязной области).

Определим $e^{2i\alpha}$. Дадим приращение точке z в направлении нормали к контуру L_0

$$(2.2) \quad dz = e^{i\alpha} |dz|$$

Соответствующая точка плоскости ζ в силу конформности отображения переместится по нормали к разрезу, т. е. к действительной оси

$$(2.3) \quad d\zeta = \pm i |d\zeta|$$

При помощи (2.2) и (2.3) находим

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\zeta) d\zeta}{|\omega'(\zeta)| |d\zeta|} = \pm i \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}$$

Следовательно

$$(2.4) \quad e^{2i\alpha} = -\omega'(\zeta) / \overline{\omega'(\zeta)}$$

Краевая задача (1.11) при помощи (2.4) запишется теперь так:

$$(2.5) \quad -\psi(\zeta) \omega'(\zeta) = a \overline{\omega'(\zeta)}, \quad \zeta \in M$$

Здесь

$$\psi(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)]$$

Функции $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ подлежат определению из краевой задачи (2.5).

Возьмем действительную и мнимую части в выражении (2.5), в результате получим

$$(2.6) \quad \operatorname{Re} F'(\zeta) = 0, \quad \zeta \in M$$

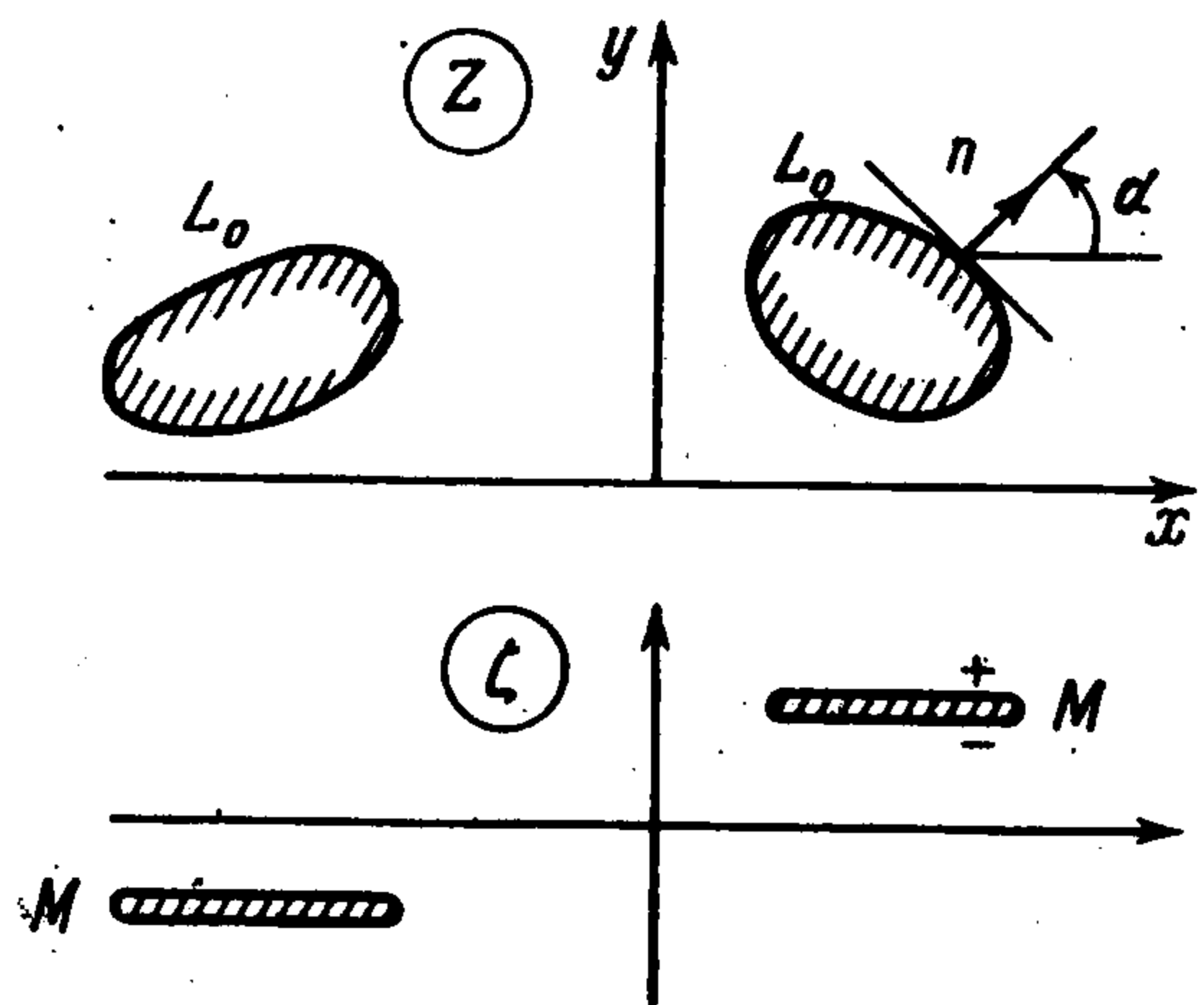
$$(2.7) \quad \operatorname{Im} G'(\zeta) = 0, \quad \zeta \in M$$

Здесь

$$(2.8) \quad F'(\zeta) = \psi(\zeta) \omega'(\zeta) + \bar{a} \omega'(\zeta), \quad G'(\zeta) = \psi(\zeta) \omega'(\zeta) - \bar{a} \omega'(\zeta)$$

Функции $F'(\zeta)$ и $G'(\zeta)$ аналитичны всюду во внешности разрезов M . В окрестности бесконечно удаленной точки они ограничены, так как функции $\psi(\zeta)$ и $\omega'(\zeta)$ ограничены при $\zeta \rightarrow \infty$.

Поведение функций $F'(\zeta)$ и $G'(\zeta)$ в концах разрезов M определяется требованиями, накладываемыми на искомые контуры отверстий L_0 . Будем требовать, чтобы все контуры L_0 были гладкими, т. е. не содержали точек возврата и угловых точек. При этом дополнительном условии функция $\psi(\zeta)$ будет ограничена всюду в окрестности точек разрезов M , а функция $\omega'(\zeta)$ будет ограничена всюду, за исключением концов разрезов M , в окрестности которых функция $\omega'(\zeta)$, очевидно, будет иметь степненную особенность порядка $1/2$. В соответствии с этим условием на основе (2.8) аналитические функции $F'(\zeta)$ и $G'(\zeta)$ будут ограничены во всей плоскости ζ , за исключением



Фиг. 1

концов разрезов M , в которых они будут иметь степенную особенность порядка $1/2$. Например, если точка ζ_M — конец одного из разрезов M , то

$$(2.9) \quad F'(\zeta) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta - \zeta_M}}\right), \quad G'(\zeta) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta - \zeta_M}}\right) \quad \text{при } \zeta \rightarrow \zeta_M$$

Краевые задачи (2.6) и (2.7) представляют собой классические задачи Дирихле для внешности разрезов, причем решение этих задач ищется в классе функций, ограниченных на бесконечности и имеющих особенность вида (2.9) в концах разрезов. Именно к такой математической задаче приводит гидродинамическая проблема обтекания решеток профилей потенциальным потоком идеальной несжимаемой невесомой жидкости [14]. При этом функциям F и G соответствует комплексный потенциал скорости потока жидкости.

Таким образом, краевая задача (2.6) или (2.7) в математическом отношении совершенно аналогична следующей гидродинамической задаче: система M плоских профилей нулевой толщины в плоскости ζ обтекается потенциальным бесциркуляционным потоком идеальной несжимаемой жидкости (скорость потока на бесконечности ограничена), требуется найти комплексный потенциал течения.

После того как функции $F(\zeta)$ и $G(\zeta)$ будут найдены, искомые функции $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ определяются при помощи (2.8) по следующим формулам (C_0 — произвольная постоянная):

$$(2.10) \quad \omega(\zeta) = \frac{1}{2a} \int [F'(\zeta) - G'(\zeta)] d\zeta = \frac{1}{2a} [F(\zeta) - G(\zeta)] + C_0$$

$$(2.11) \quad \psi(\zeta) = a \frac{F'(\zeta) + G'(\zeta)}{F'(\zeta) - G'(\zeta)}$$

Выясним еще одно условие, которое вытекает из физического требования отсутствия дислокаций при обходе контура каждого отверстия. Из выражения для комплексного вектора смещения [12] и формулы (1.9) отсюда легко получить следующие условия, которым должна удовлетворять функция $\omega(\zeta)$:

$$(2.12) \quad \oint \omega'(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta = 0$$

Здесь контурный интеграл берется по контуру, охватывающему один из разрезов M . Число условий (2.12) равно числу разрезов. Деформируя контур интегрирования в верхний и нижний берега соответствующего разреза и используя (2.5), отсюда получаем

$$(2.13) \quad \oint \overline{\omega'(\zeta)} d\zeta = 0$$

Так как разрезы M параллельны мнимой оси, то $d\zeta = d\bar{\zeta}$, следовательно, условие (2.13) означает, что функция $\omega(\zeta)$ должна быть однозначной при обходе любого из разрезов M . Однако это условие уже содержится в требовании конформности отображения, осуществляемого функцией $\omega(\zeta)$. Поэтому требование отсутствия дислокаций в многосвязной упругой области в данном случае вытекает из требуемого условия однозначности функции $\omega(\zeta)$.

Поле упругих напряжений, согласно формулам (1.4), (1.9), (1.10), (2.5) и (2.8), находится из следующих соотношений:

$$(2.14) \quad \sigma_x + \sigma_y = \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty, \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = \frac{F'(\zeta) + G'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

Таким образом, развитый подход позволяет находить эффективное решение обратных задач плоской теории упругости для любого числа отверстий и при любом их расположении.

3. Одно или два отверстия. Двухсвязную и трехсвязную область всегда можно конформно отобразить на внешность соответствующего числа разрывов вдоль действительной оси [15].

Одно отверстие. В случае одного отверстия на плоскости будет один разрыв, который без потери общности можно считать разрывом $(-1, +1)$ вдоль действительной оси.

Пусть при $\zeta \rightarrow \infty$ имеем $\omega(\zeta) = c_1 \zeta + O(\zeta^{-1})$.

Величину c_1 можно считать действительной. Это условие вместе с заданием длины разрыва, согласно теореме Римана, исчерпывает возможный произвол в описании конформного преобразования двух заданных областей.

Согласно (2.8), будет

при $\zeta \rightarrow \infty$

$$(3.1) \quad F'(\zeta) = (b + \bar{a})c_1 + O(\zeta^{-2}), \quad G'(\zeta) = (b - \bar{a})c_1 + O(\zeta^{-2})$$

Решение краевых задач (2.6) и (2.7) для внешности указанного разрыва при условиях (2.9) и (3.1) имеет следующий вид [14]:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} F'(\zeta) &= ic_1 \operatorname{Im}(b + \bar{a}) + \frac{c_1 \zeta \operatorname{Re}(b + \bar{a}) + d_1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ G'(\zeta) &= c_1 \operatorname{Re}(b - \bar{a}) + \frac{ic_1 \zeta \operatorname{Im}(b - \bar{a}) + id_2}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned}$$

Здесь при $\zeta \rightarrow \infty$ имеем $\sqrt{\zeta^2 - 1} = \zeta + O(\zeta^{-1})$. Действительные постоянные d_1 и d_2 произвольны.

Интегрируя выражения (3.2), находим

$$(3.3) \quad \begin{aligned} F(\zeta) &= ic_1 \zeta \operatorname{Im}(b + \bar{a}) + c_1 \sqrt{\zeta^2 - 1} \operatorname{Re}(b + \bar{a}) + d_1 \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \\ G(\zeta) &= c_1 \zeta \operatorname{Re}(b - \bar{a}) + ic_1 \sqrt{\zeta^2 - 1} \operatorname{Im}(b - \bar{a}) + id_2 \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \end{aligned}$$

Отсюда при помощи (2.10), полагая $C_0 = 0$, получаем

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \omega(\zeta) &= \frac{c_1}{2} (m_1 \zeta + m_2 \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \frac{d_1 - id_2}{2\bar{a}} \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \\ (m_1 &= 1 - \bar{b}/\bar{a}, \quad m_2 = 1 + \bar{b}/\bar{a}) \end{aligned}$$

Функция $\omega(\zeta)$ должна быть однозначной во внешности разрыва $(-1, +1)$. Согласно решению (3.4), это условие выполняется лишь в том случае, если $d_1 = d_2 = 0$, что и предполагается в дальнейшем.

Уравнение контура отверстия в параметрическом виде получается из формулы (3.4) при $d_1 = d_2 = 0$

$$(3.5) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} c_1 (\xi \operatorname{Re} m_1 \mp \sqrt{1 - \xi^2} \operatorname{Im} m_2) \\ y &= \frac{1}{2} c_1 (\xi \operatorname{Im} m_1 \pm \sqrt{1 - \xi^2} \operatorname{Re} m_2) \quad (-1 < \xi < 1) \end{aligned}$$

или в комплексном виде

$$(3.6) \quad z = \frac{1}{2} c_1 (m_1 \xi \pm im_2 \sqrt{1 - \xi^2})$$

где ξ — действительный параметр, меньший единицы (верхний знак в (3.5) отвечает верхнему берегу разрыва, нижний — нижнему).

Исключая в формулах (3.5) параметр ξ , приходим к кривой второго порядка, которая представляет собой эллипс, так как на основании уравнения (3.6) любым значениям параметра ξ , по модулю меньшим единицы, отвечают конечные значения комплексного вектора кривой.

Найдем основные параметры этого эллипса, представляющего собой искомый контур отверстия. Фокусы эллипса представляют собой точки ветвления на двулистной римановой поверхности функции $\zeta = \zeta(z)$, обратной функции (3.4). Отсюда находим комплексные векторы фокусов

$$(3.7) \quad z_F = \pm \frac{1}{2} c_1 \sqrt{m_1^2 - m_2^2}$$

Центр эллипса (середина отрезка, соединяющего фокусы) совпадает с началом координат. Угол, под которым большая ось эллипса наклонена к оси абсцисс, равен

$$(3.8) \quad \alpha_F = \frac{1}{2} \arg(m_1^2 - m_2^2)$$

Точка $z_1 = \frac{1}{2} c_1 m_1$, согласно (3.6), лежит на эллипсе. Согласно фокальному свойству эллипса, сумма расстояний от этой точки до фокусов равна большому диаметру эллипса $2a_1$, т. е.

$$(3.9) \quad a_1 = \frac{1}{4} c_1 (|\sqrt{m_1^2 - m_2^2} + m_1| + |m_1 - \sqrt{m_1^2 - m_2^2}|)$$

Полудлина малой оси эллипса равна $\sqrt{a_1^2 - |z_F|^2}$.

Таким образом, контуры искомого отверстия представляют собой семейство подобных эллипсов (так как c_1 — произвольный действительный параметр), ориентация и основные параметры которых даны формулами (3.7) — (3.9). В случае $\tau^\infty = \tau = 0$, когда величины m_1 и m_2 будут действительными, результат соответствует полученному ранее в работе [1] другим методом.

Два отверстия. Внешность двух отверстий в плоскости конформно отобразим на внешность двух разрезов (λ_1, λ_2) и (λ_3, λ_4) вдоль действительной оси плоскости ζ с соответствием бесконечно удаленных точек. Не ограничивая общность, коэффициент c_1 в условии на бесконечности (3.1) можно считать действительным и положительным. Решение задач Дирихле (2.6) и (2.7) для указанных разрезов при условиях на бесконечности (3.1) имеет вид

$$(3.10) \quad \begin{aligned} F'(\zeta) &= ic_1 \operatorname{Im}(b + \bar{a}) + \frac{1}{R} [c_1 \zeta^2 \operatorname{Re}(\bar{a} + b) + d_1 \zeta + d_2] \\ G'(\zeta) &= c_1 \operatorname{Re}(b - \bar{a}) + \frac{1}{R} [ic_1 \zeta^2 \operatorname{Im}(b - \bar{a}) + id_3 \zeta + id_4] \\ R &= \sqrt{(\zeta - \lambda_1)(\zeta - \lambda_2)(\zeta - \lambda_3)(\zeta - \lambda_4)} \end{aligned}$$

Здесь $d_1 - d_4$ — произвольные действительные постоянные, корень в формулах (3.10) ведет себя как $\zeta^2 + O(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow \infty$. Постоянные λ_1 и λ_2 можно положить равными $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$ в данном случае.

В формулах (3.10) содержится всего семь неопределенных действительных постоянных. Четыре из них определяются из двух комплексных условий однозначности функции $\omega(\zeta)$ (см. формулу (2.14)). Постоянная c_1 , задающая масштаб в физической плоскости z , неопределенна по самой постановке задачи. Остаются две постоянные, для определения которых на искомые контуры и их взаимное расположение нужно накладывать дополнительные требования.

Таким образом, в общем несимметричном случае контуры искоемых отверстий образуют семейство, зависящее от двух произвольных действительных параметров. Громоздкий результат интегрирования в эллиптических функциях опустим.

Рассмотрим подробнее симметричный случай, когда $\tau^\infty = \tau = 0$ (фиг. 2). В этом случае контуры обоих отверстий будут симметричны относительно осей абсцисс и ординат. Для определенности будем считать, что одно отверстие целиком расположено в левой полуплоскости ($x < 0$), а другое — симметрично в правой ($x > 0$). В рассматриваемом симметричном случае в формулах (3.10) можно положить (без ограничения общности)

$$(3.11) \quad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, d_1 = d_3 = d_4 = 0 \\ (\operatorname{Im} a = 0, \operatorname{Im} b = 0)$$

Последнее соотношение является следствием симметрии задачи и условия $dy/d\xi = 0$ при $|\xi| < 1$.

В результате получим

$$(3.12) \quad F'(\zeta) = \frac{c_1 \zeta^2 (b+a) + d_2}{V(\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - 4)}, \quad G'(\zeta) = c_1 (b - a)$$

Отсюда при помощи формулы (2.10) вычисляем функцию $\omega(\zeta)$ (постоянная C_0 выбрана из условия, чтобы $\omega(0) = 0$)

$$(3.13) \quad \omega(\zeta) = \frac{c_1}{2a} \left[\zeta (a - b) + 2(a + b) E\left(\arcsin \zeta, \frac{1}{2}\right) - \right. \\ \left. - (a + b) \left(2 + \frac{1}{2} d_2\right) F\left(\arcsin \zeta, \frac{1}{2}\right) \right]$$

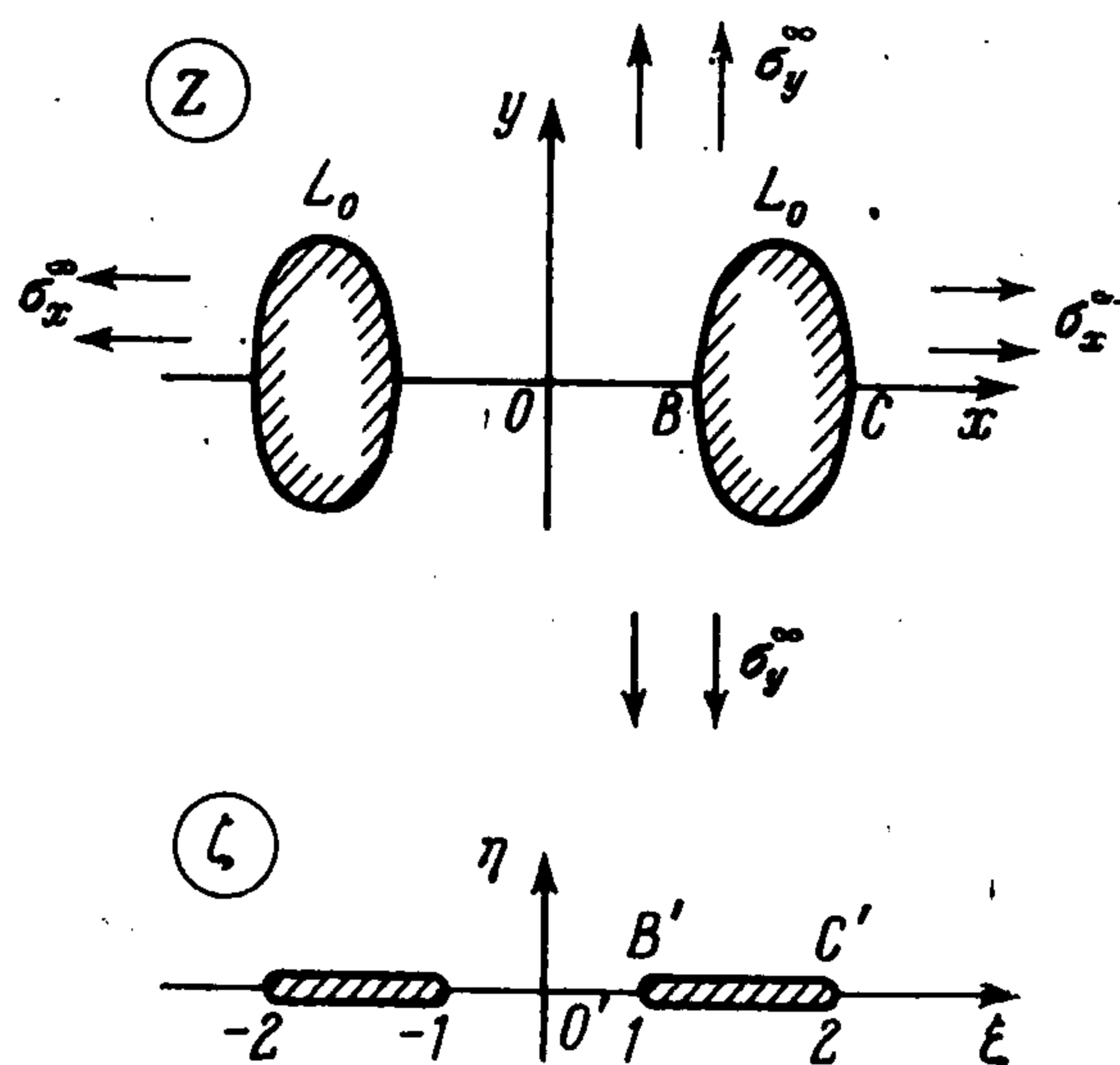
Здесь F и E — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

По формуле (3.13) при $\zeta = 1$ можно получить координаты точки B на контуре правого отверстия (фиг. 2)

$$(3.14) \quad x_B = \frac{c_1}{2a} \left[a - b + 2(a + b) E\left(\frac{1}{2}\right) - K\left(\frac{1}{2}\right) (a + b) \left(2 + \frac{1}{2} d_2\right) \right]$$

Форму контура удобнее определить непосредственно по (3.12) и (2.10); находим [16] (при $x > 0$ и $y > 0$)

$$(3.15) \quad x = x_B + \frac{1}{2} c_1 \left(1 - \frac{b}{a}\right) (\xi - 1), \\ y = -\frac{1}{2} c_1 \left(1 + \frac{b}{a}\right) \int_1^\xi \frac{(\xi^2 + d_2) d\xi}{V(\xi^2 - 1)(4 - \xi^2)} = \\ = -\frac{1}{2} c_1 \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left[2E\left(\varphi, \frac{V\bar{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} d_2 F\left(\varphi, \frac{V\bar{3}}{2}\right) - \right.$$

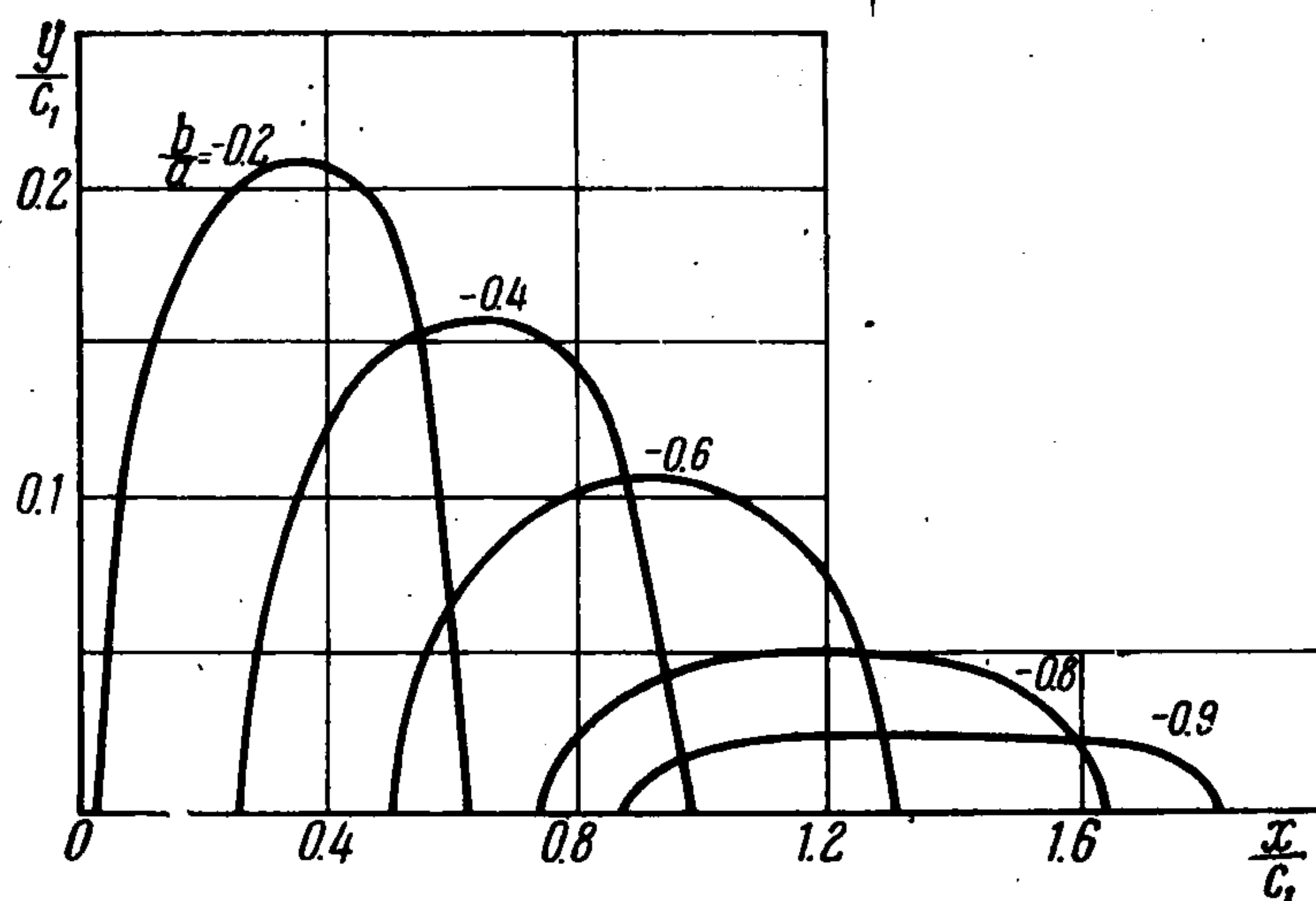


Фиг. 2

$$-\frac{1}{\xi} \sqrt{(4 - \xi^2)(\xi^2 - 1)}]$$

$$\left(\varphi = \arcsin \frac{2 \sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi \sqrt{3}}, \quad 1 < \xi < 2 \right)$$

При $\xi = 2$, т. е. при $\varphi = \pi / 2$, координата y контура отверстия (в точке C , см. фиг. 2) должна равняться нулю. Это условие служит для опре-



Фиг. 3

деления неизвестной константы d_2 ; при помощи второй формулы (3.15) находим

$$(3.16) \quad d_2 = -\frac{4E(\sqrt{3}/2)}{K(\sqrt{3}/2)} = -2.246$$

Внося это значение d_2 в формулы (3.14) и (3.15), окончательно получаем

$$(3.17) \quad x_B = -c_1(0.23 + 1.23 b/a), \quad x = x_B + \frac{1}{2} c_1(1 - b/a)(\xi - 1)$$

$$y = -\frac{1}{2} c_1(1 + b/a)[2E(\varphi, \sqrt{3}/2) - 1.123F(\varphi, \sqrt{3}/2) - \xi^{-1} \sqrt{(4 - \xi^2)(\xi^2 - 1)}]$$

Таким образом, в случае симметричного расположения двух равнопрочных отверстий решение определяется с точностью до одной произвольной положительной постоянной c_1 , задающей масштаб. Контур отверстия определяется уравнениями (3.17).

Отметим некоторые ограничения, которым должны удовлетворять внешние нагрузки, чтобы решение (3.17) имело физический смысл. Согласно самим формулам (3.17), для этого необходимо, чтобы имели место неравенства

$$1 > b/a, \quad 1 > -b/a, \quad b/a < -0.23/1.23 \approx -0.187$$

$$-1 < b/a < -0.187$$

где

$$(3.18) \quad b/a = (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) / (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty - 2p)$$

Это неравенство приводит, как легко видеть, к следующим условиям а или б) существования искомого решения:

$$(а) \quad \sigma_x^\infty > \sigma_y^\infty > p, \quad \sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty > 0.315(\sigma_x^\infty - p)$$

$$(б) \quad \sigma_x^\infty < \sigma_y^\infty < p, \quad \sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty < 0.315(\sigma_x^\infty - p)$$

На фиг. 3 по формулам (3.15) построены контуры семейства равнопрочных отверстий при разных значениях b/a (для $x > 0$ и $y > 0$).

Попытка приближенного решения рассмотренной задачи методом малого параметра была предпринята в работе [7].

4. Периодическая задача. Если все контуры отверстий имеют общую ось симметрии, пересекающую их, то область любой связности, расположенная вне этих отверстий, конформно отображается на внешность разрезов вдоль одной и той же прямой¹. В этом случае задача Дирихле имеет простое замкнутое решение.

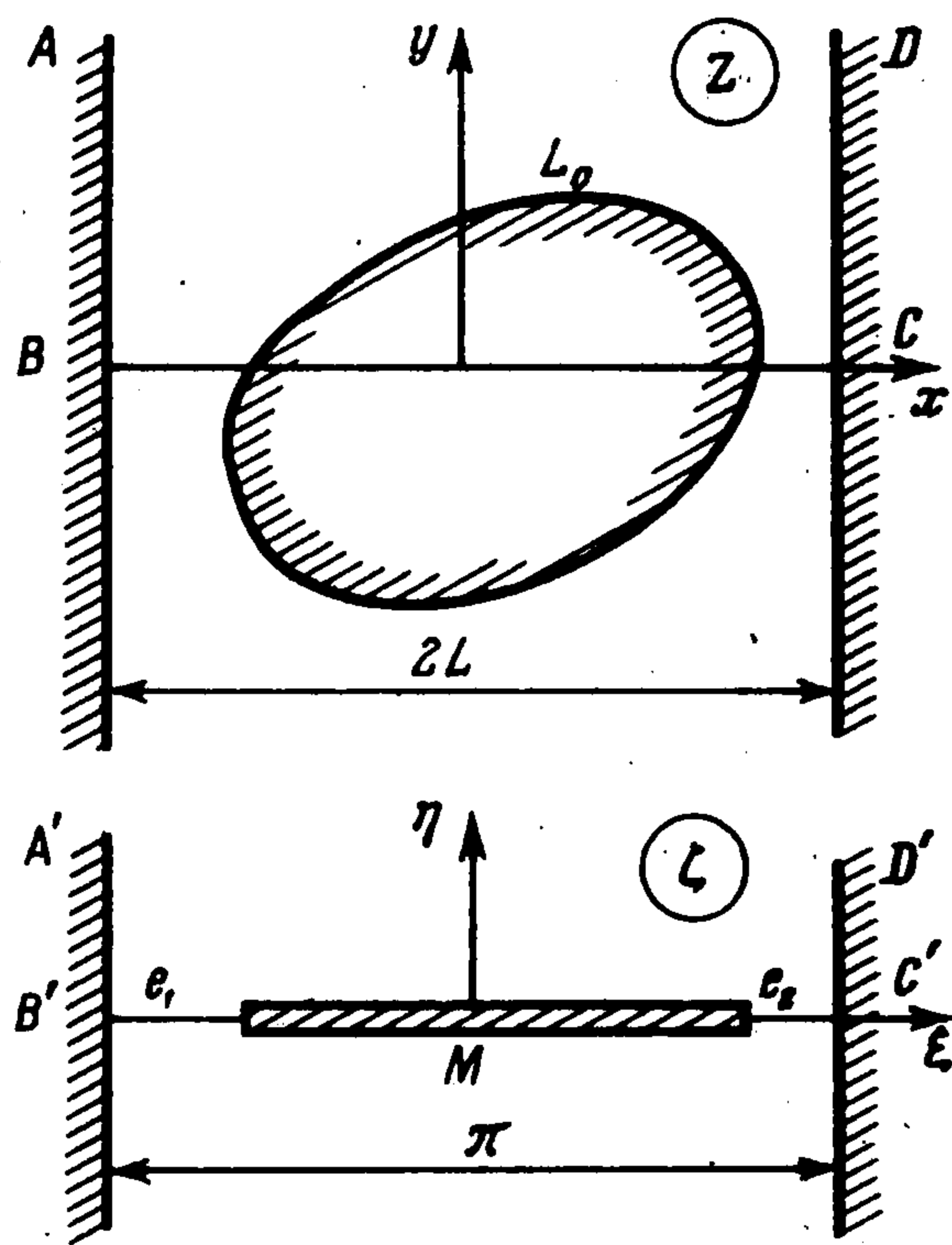
Рассмотрим периодическую задачу, когда одинаковые отверстия с некоторым периодом $2L$ расположены вдоль оси x , необязательно являющейся их осью симметрии из-за наличия касательных напряжений (фиг. 4).

При помощи конформного отображения $z = \omega(\zeta)$ перейдем на внешность периодической системы разрезов M вдоль действительной оси плоскости ζ (период решетки можно взять равным π , см. фиг. 4). В качестве условия на бесконечности по-прежнему используем условия (3.1); следует иметь в виду, что вторые слагаемые в этих формулах в

данном случае будут описывать экспоненциальное убывание на бесконечности, а не степенное, как в случае конечного числа отверстий. Постоянная c_1 в рассматриваемом случае, очевидно, может считаться действительной и положительной. Решение краевых задач (2.6) и (2.7) при дополнительных условиях (2.9) и (3.1) легко найти на бесконечнолистной римановой поверхности функции $\sin \zeta$, разрезанной вдоль отрезка $(\sin e_1, \sin e_2)$ действительной оси на всех листах. Функция $\sin \zeta$ конформно преобразует внешность периодической системы разрезов M плоскости ζ на указанную риманову поверхность. Общее решение этих задач имеет вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} F'(\zeta) &= ic_1 \operatorname{Im}(b + \bar{a}) + \frac{1}{R} [c_1 \sin \zeta \operatorname{Re}(b + \bar{a}) + d_1] \\ G'(\zeta) &= c_1 \operatorname{Re}(b - \bar{a}) + \frac{1}{R} [ic_1 \sin \operatorname{Im}(b - \bar{a}) + id_2] \\ R &= \sqrt{(\sin \zeta - \sin e_1)(\sin \zeta - \sin e_2)} \end{aligned}$$

Здесь c_1, d_1, d_2, e_1, e_2 — неопределенные действительные постоянные; при $\sin \zeta \rightarrow \infty$ корень R в формулах (4.1) ведет себя как $\sin \zeta + O(\sin^{-1} \zeta)$. Функция $\omega(\zeta)$ определяется формулой (2.10) при дополнительном усло-



Фиг. 4

¹ То же самое справедливо для многосвязных областей, обладающих циклической симметрией.

вии $\omega(-\pi/2) = -L$ для отыскания постоянной C_0 (см. фиг. 4)

$$(4.2) \quad \omega(\zeta) = -L + \frac{1}{2\bar{a}} \int_{-\pi/2}^{\zeta} [F'(\zeta) - G'(\zeta)] d\zeta$$

Функция $\omega(\zeta)$ должна удовлетворять двум дополнительным условиям: а) условию однозначности $\omega(\zeta)$ при обходе разреза (e_1, e_2) ; б) условию соответствия точек C и C' , имеющее вид $\omega(\pi/2) = L$ (см. фиг. 4). Эти условия служат для отыскания четырех (из пяти) неопределенных коэффициентов в формулах (4.1) и (4.2). Таким образом, в общем несимметричном случае периодической задачи решение определяется с точностью до одной произвольной постоянной, т. е. равнопрочные контуры образуют семейство, зависящее от одного свободного параметра.

Рассмотрим подробнее симметричный случай, когда $\tau^\infty = \tau = 0$. В этом случае контур искомого отверстия L_0 в основном периоде (фиг. 4) будет симметричен относительно осей абсцисс и ординат, а соответствующий ему отрезок M на плоскости ζ будет симметричным разрезом вдоль $(-e_0, e_0)$ с длиной, равной $2e_0$. В силу указанной симметрии в формулах (4.1) можно положить

$$e_1 = -e_0, \quad e_2 = e_0, \quad d_1 = d_2 = 0 \quad (\operatorname{Im} a = \operatorname{Im} b = 0)$$

Следовательно, находим

$$(4.3) \quad F'(\zeta) = \frac{c_1(a+b)\sin\zeta}{\sqrt{\sin^2\zeta - \sin^2e_0}}, \quad G'(\zeta) = c_1(b-a)$$

$$(4.4) \quad \omega(\zeta) = -L + \frac{1}{2}c_1(1 - b/a)(\zeta + \pi/2) - \frac{1}{2}c_1(1 + b/a) \operatorname{arcsin}(\cos\zeta/\cos e_0) \\ (\omega(-\pi/2) = -L)$$

Из условия соответствия точек C и C' на фиг. 4, т. е. $\omega(\pi/2) = L$ при помощи (4.4) получаем

$$(4.5) \quad c_1 = -(2aL) / (\pi b)$$

Найдем диаметр $2x_0$ равнопрочного отверстия в сечении $y = 0$; положив $\zeta = e_0$ в формуле (4.4), получим

$$(4.6) \quad x_0 = \frac{1}{\pi} e_0 L \left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

При помощи формул (4.4) — (4.6) запишем уравнение равнопрочного контура в следующем параметрическом виде (для $y > 0, |x| < L$):

$$(4.7) \quad x = \frac{1}{\pi} L \left(1 - \frac{a}{b}\right) \xi \\ y = -\frac{1}{\pi} L \left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln \left(\frac{\cos \xi}{\cos e_0} + \sqrt{\frac{\cos^2 \xi}{\cos^2 e_0} - 1} \right) \\ (-e_0 < \xi < e_0)$$

Семейство кривых (4.7) зависит от одного положительного параметра e_0 , меньшего $\pi/2$. Найдем диаметр $2y_0$ равнопрочного отверстия в сечении $x = 0$; положив $\xi = 0$ во второй формуле (4.7), получим

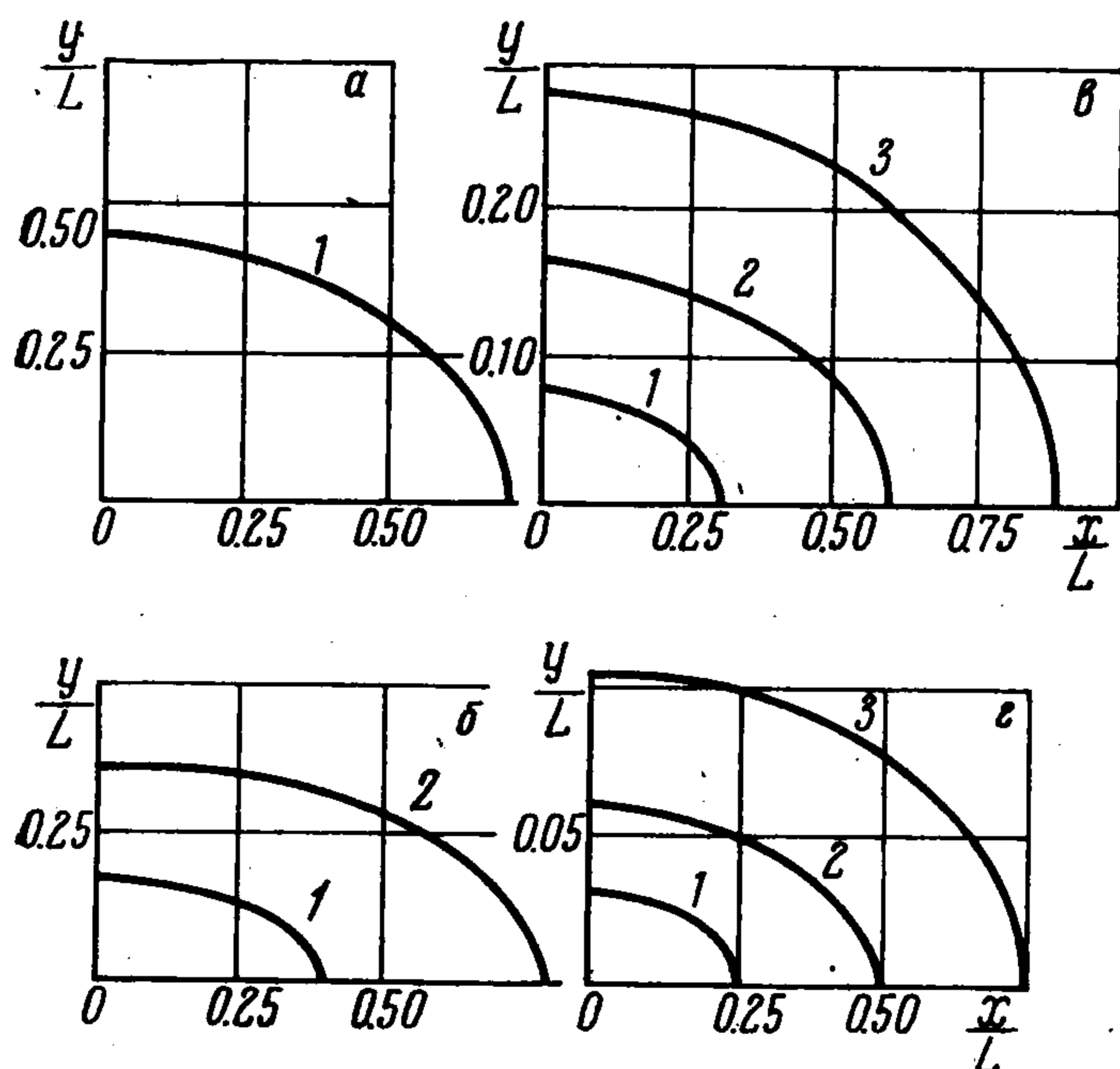
$$(4.8) \quad y_0 = -\frac{1}{\pi} L \left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln \frac{1 + \sin e_0}{\cos e_0}$$

Согласно физическому смыслу задачи, величины x_0 и y_0 должны быть положительными (кроме того, очевидно, $x_0 < L$); отсюда на основании формул (4.6) и (4.8) внешние нагрузки должны удовлетворять следующему условию:

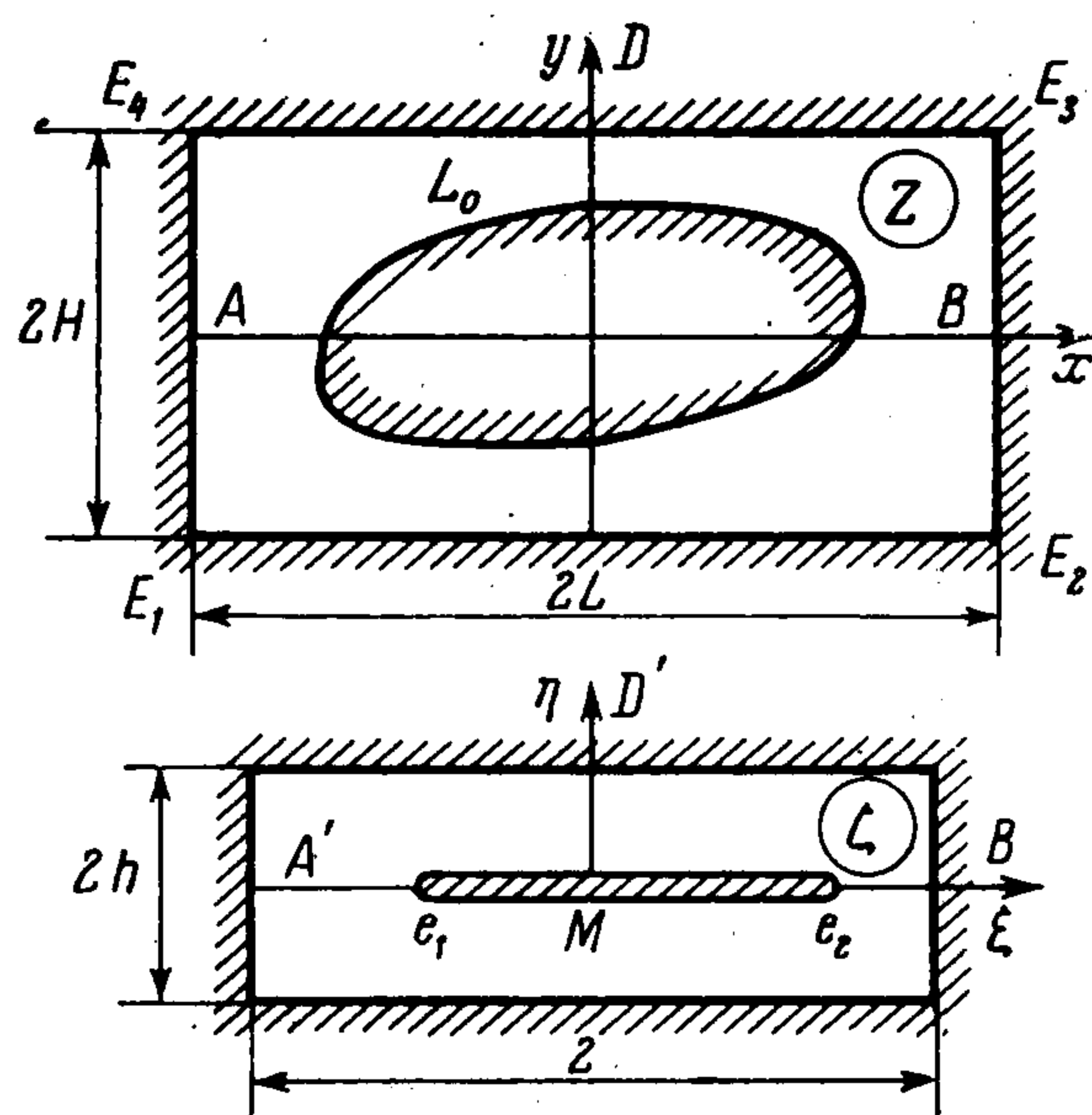
$$(4.9) \quad -1 < \frac{b}{a} < -\frac{e_0}{\pi - e_0}$$

где b/a дается равенством (3.18). Это неравенство приводит, как легко видеть, к следующим условиям (а или б) существования искомого решения:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \text{а) } p > \sigma_y^\infty, \quad (\pi - 2e_0) \sigma_x^\infty < \pi \sigma_y^\infty - 2pe_0 \\ \text{б) } \sigma_y^\infty > p, \quad (\pi - 2e_0) \sigma_x^\infty > \pi \sigma_y^\infty - 2pe_0 \end{aligned}$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Рассмотрим предельный случай одного отверстия в бесконечной плоскости. Этот случай получается из найденного периодического решения следующим предельным переходом в формулах (4.3) — (4.8):

$$(4.11) \quad \begin{aligned} L \rightarrow \infty, \quad e_0 \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow 0 \\ \zeta L = -\frac{\pi b}{2u} C_1 \zeta_1, \quad e_0 L = -\frac{\pi b}{2a} C_1 \end{aligned}$$

где C_1 — (произвольно заданная) положительная постоянная, ζ_1 — новое комплексное переменное. В частности, контур отверстия становится эллипсом

$$(4.12) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} C_1 (1 - b/a) t \\ y &= \frac{1}{2} C_1 (1 + b/a) \sqrt{1 - t^2} \quad (-1 < t < 1) \end{aligned}$$

Последнее решение существует при условии $|b/a| < 1$ (ср. с соответствующим условием (4.9) для периодической задачи).

На фиг. 5 по формулам (4.7) построены контуры семейства равнопрочных отверстий при разных значениях e_0 (кривым 1—3 соответствуют $e_0 = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$ и $b/a = -0.2$ (а), -0.4 (б), -0.6 (в), -0.8 (г) (для $L > x > 0, y > 0$)).

Попытка приближенного решения рассмотренной задачи методом малого параметра была предпринята в работах [6, 11].

5. Двойкопериодическая задача. Пусть система равнопрочных отверстий образует двойкопериодическую прямоугольную решетку с периодом $2(L + iH)$ в плоскости z (см. фиг. 6, где изображен основной период).

Из соображений удобства решения временно будем считать, что в точке $x = 0, y = H$ (и других, ей соответствующих) заданы напряжения, т. е. при $z \rightarrow iH$

$$(5.1) \quad \sigma_x = \sigma_x^\infty, \quad \sigma_y = \sigma_y^\infty, \quad \tau_{xy} = \tau^\infty$$

Здесь $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau^\infty$ — некоторые величины.

Пусть конформное отображение $z = \omega(\zeta)$ преобразует в упругую область плоскости z внешность двоякопериодической системы разрезов плоскости ζ с соответствием трех точек основных периодов (см. фиг. 6)

$$(5.2) \quad A \leftrightarrow A', \quad B \leftrightarrow B', \quad D \leftrightarrow D'$$

Период прямоугольной решетки на плоскости ζ , не ограничивая общности, можно считать равным $2 + 2hi$.

Указанными требованиями искомая функция $\omega(\zeta)$ определяется однозначно (для заданного контура отверстия L_0).

Внешность контура L_0 в основном периоде плоскости z отображается на внешность разреза (e_1, e_2) вдоль действительной оси плоскости ζ (также в основном периоде, см. фиг. 6).

Согласно формулам (5.1), (5.2), (1.4) и (2.8), имеем при $\zeta \rightarrow ih$ $\omega(\zeta) = iH + c_1(\zeta - ih) + \dots$

$$(5.3) \quad \psi(\zeta) = b + O(\zeta - ih), \quad F'(\zeta) = (b + \bar{a})c_1 + O(\zeta - ih) \\ G'(\zeta) = (b - \bar{a})c_1 + O(\zeta - ih)$$

Здесь c_1 — некоторая положительная величина, обозначения a и b совпадают с принятыми ранее.

Пусть модуль k определяется уравнением

$$(5.4) \quad K(\sqrt{1 - k^2}) = hK(k)$$

а величина α равна

$$(5.5) \quad \alpha = 1 / K(k)$$

Эллиптический синус $w = \operatorname{sn}(\zeta / \alpha, k)$ конформно преобразует внешность указанной двоякопериодической системы разрезов плоскости ζ на бесконечнолистную риманову поверхность w , разрезанную вдоль отрезка (w_1, w_2) действительной оси на всех листах, где

$$(5.6) \quad w_1 = \operatorname{sn}(e_1 / \alpha, k), \quad w_2 = \operatorname{sn}(e_2 / \alpha, k)$$

причем бесконечно удаленной точке на основном листе римановой поверхности соответствует точка $\zeta = ih$.

Используя риманову поверхность w и условия (5.3), общее решение краевых задач (2.6) и (2.7) можно записать так:

$$(5.7) \quad F'(\zeta) = ic_1 \operatorname{Im}(b + \bar{a}) + \frac{1}{R} [c_1 w \operatorname{Re}(b + \bar{a}) + d_1] \\ G'(\zeta) = c_1 \operatorname{Re}(b - \bar{a}) + \frac{1}{R} [ic_1 w \operatorname{Im}(b - \bar{a}) + id_2] \\ R = \sqrt{(w - w_1)(w - w_2)}, \quad w = \operatorname{sn}(\zeta / \alpha, k)$$

Здесь c_1, d_1, d_2, w_1, w_2 — неопределенные действительные постоянные. При $w \rightarrow \infty$ корень R в (5.8) ведет себя как $w + O(1)$. Функция $\omega(\zeta)$

определяется по формуле (2.10), причем постоянная C_0 находится из условия соответствия точек A и A' . Четыре из указанных выше постоянных отыскиваются из условия однозначности функции $\omega(\zeta)$ при обходе разреза (e_1, e_2) и из условия соответствия точек B и B' . Постоянная h находится из условия: функция $\omega(\zeta) \rightarrow iH$ при $\zeta \rightarrow ih$. Таким образом, в общем несимметричном случае периодической задачи решение определяется с точностью до одной произвольной постоянной, т. е. решетка равнопрочных контуров образует семейство, зависящее от одного свободного параметра.

До сих пор напряженное состояние считалось заданным в точке $z = iH$, что не отвечает физическому существу задачи. Определим дополнительные условия, которые адекватны постановке задачи и могут служить для определения постоянных $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty$ и τ^∞ в полученном решении.

Рассмотрим мысленно упругий прямоугольник со сторонами $2mL$ и $2nH$, состоящий из mn перфорированных прямоугольников $E_1E_2E_3E_4$ (m и n — целые числа, которые будем считать весьма большими). К сторонам этого прямоугольника приложены постоянные нормальные нагрузки N_x, N_y и постоянные касательные нагрузки N_{xy} и N_{yx} . На расстояниях, равных примерно двум периодам решетки, краевой эффект затухает и напряженное состояние становится практически идентичным тому, которое имеет место в идеально бесконечной решетке.

Условия равновесия всех внешних нагрузок, действующих на указанный прямоугольник, при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ приводят к следующим условиям:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \int_{E_3E_4} \sigma_y dx &= \int_{E_1E_2} \sigma_y dx = 2LN_y \\ \int_{E_1E_4} \sigma_y dy &= \int_{E_2E_3} \sigma_x dy = 2HN_x \\ \int_{E_3E_4} \tau_{xy} dx &= \int_{E_1E_2} \tau_{xy} dx = 2LN_{xy} \\ \int_{E_1E_4} \tau_{xy} dy &= \int_{E_2E_3} \tau_{xy} dy = 2HN_{yx} \end{aligned}$$

Кроме того, должно выполняться уравнение равновесия в моментах

$$(5.9) \quad 4HL(N_{xy} - N_{yx}) = M, \quad M = \tau \oint_{L_0} |\mathbf{r} \times d\mathbf{s}|$$

Здесь M — суммарный момент, производимый внешними касательными нагрузками τ на контуре отверстия L_0 (\mathbf{r} — радиус-вектор кривой L_0 , $d\mathbf{s}$ — вектор-элемент ее дуги).

Рассмотрим подробнее симметричный случай, когда $\tau = 0$, $N_{xy} = N_{yx} = 0$. В этом случае контур искомого отверстия L_0 в основном периоде (см. фиг. 6) будет симметричным относительно осей x и y , а соответствующий ему контур M на плоскости ζ будет разрезом вдоль ($-e_0, e_0$). Симметрия относительно осей абсцисс и ординат сохранится на плос-

кости ζ и поверхности w . В рассматриваемом случае в формулах (5.7) можно положить

$$e_1 = -e_0, \quad e_2 = e_0, \quad d_1 = d_2 = 0, \quad \tau^\infty = 0 \\ (\operatorname{Im} a = \operatorname{Im} b = 0)$$

Следовательно, получаем

$$(5.10) \quad F'(\zeta) = \frac{c_1(a+b) \operatorname{sn}(\zeta/\alpha, k)}{\sqrt{\operatorname{sn}^2(\zeta/\alpha, k) - \operatorname{sn}^2(e_0/\alpha, k)}}, \quad G'(\zeta) = c_1(b-a)$$

$$(5.11) \quad \omega(\zeta) = -L + \frac{1}{2a} \int_{-1}^{\zeta} [F'(\zeta) - G'(\zeta)] d\zeta = -L + \\ + \frac{1}{2} c_1 \left(1 - \frac{b}{a}\right) (\zeta + 1) + \frac{1}{2} c_1 \left(1 + \frac{b}{a}\right) I(\zeta)$$

Здесь

$$(5.12) \quad I(\zeta) = \int_{-1}^{\zeta} \frac{\operatorname{sn}(\zeta/\alpha, k) d\zeta}{\sqrt{\operatorname{sn}^2(\zeta/\alpha, k) - \operatorname{sn}^2(e_0/\alpha, k)}} = \\ = \frac{\alpha}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)} \int_{\delta}^t \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \delta^2)(1 - t^2)}} \\ t = \frac{\operatorname{dn}(\zeta/\alpha, k)}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)}, \quad \delta = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)} \quad (\delta < 1)$$

Корень $\sqrt{(t^2 - \delta^2)(1 - t^2)}$ в комплексной плоскости t представляет собой функцию, аналитическую во внешности разрезов вдоль действительной оси $(-1, -\delta)$ и $(\delta, 1)$; взята та ветвь этой функции, которая положительна на верхнем берегу разреза $(\delta, 1)$ действительной оси. Были использованы известные соотношения из теории эллиптических функций (второй аргумент для краткости опускаем)

$$(5.13) \quad \operatorname{dn}^2 \zeta = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \zeta, \quad \operatorname{cn}^2 \zeta = 1 - \operatorname{sn}^2 \zeta \\ d \operatorname{dn} \zeta / d\zeta = -k^2 \operatorname{sn} \zeta \operatorname{cn} \zeta$$

При помощи эллиптического интеграла первого рода интеграл (5.12) можно записать так:

$$(5.14) \quad I(\zeta) = \frac{\alpha}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)} F\left(\arcsin \frac{\sqrt{t^2 - \delta^2}}{t \sqrt{1 - \delta^2}}, \sqrt{1 - \delta^2}\right)$$

На основании формул (5.11) и (5.14) диаметр отверстия $2x_0$ в сечении $y = 0$ плоскости z легко найти из условия $\omega(-e_0) = -x_0$; получаем

$$(5.15) \quad x_0 = L - \frac{1}{2} c_1 \left(1 - \frac{b}{a}\right) (1 - e_0) + \frac{1}{2} c_1 \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{\alpha K(\sqrt{1 - \delta^2})}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)}$$

Из соответствия точек B и B' на фиг. 6 (т. е. $\omega(1) = L$) при помощи (5.11) — (5.14) находим

$$(5.16) \quad 2L = c_1 \left(1 - \frac{b}{a}\right) - 2c_1 \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{\alpha K(\sqrt{1 - \delta^2})}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)}$$

Из соответствия точек D и D' на фиг. 6 (т. е. $\omega(ih) = iH$), используя формулы (5.11) — (5.14), находим

при $\zeta \rightarrow ih, t \rightarrow \infty$

$$(5.17) \quad I = \frac{\alpha}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)} \left[\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \delta^2)(1 - t^2)}} + \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \delta^2)(1 - t^2)}} \right] =$$

$$= \frac{\alpha}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)} [K(\sqrt{1 - \delta^2}) + iK(\delta)]$$

$$2H = c_1 h \left(1 - \frac{b}{a}\right) + c_1 \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{\alpha K(\delta)}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)}$$

Уравнение равнопрочного контура L_0 в основном периоде (при $-L < x < 0, y > 0$) на основании формул (5.11) и (5.12) можно записать в следующем параметрическом виде:

$$x + iy = -x_0 + \frac{1}{2} c_1 \left(1 - \frac{b}{a}\right) (\xi + e_0) +$$

$$+ \frac{iac_1(1 + b/a)}{2\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)} \int_1^t \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \delta^2)(t^2 - 1)}}$$

$$\left(t = \frac{\operatorname{dn}(\xi/\alpha, k)}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)} = \sqrt{\frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\xi/\alpha, k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(e_0/\alpha, k)}}\right)$$

т. е. [16]

$$(5.18) \quad x = -x_0 + \frac{1}{2} c_1 \left(1 - \frac{b}{a}\right) (\xi + e_0)$$

$$y = \frac{c_1 \alpha (1 + b/a)}{2\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - \delta^2}}, \delta\right)$$

$$(-e_0 \leq \xi \leq 0)$$

Осталось определить постоянные σ_x^∞ и σ_y^∞ . Для этого в данном случае достаточно использовать только первые два уравнения равновесия (5.9), которые при помощи формул (2.15) можно записать так:

$$(5.19) \quad \int_{E_2 E_4} \sigma_y dx = (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) (L - x_0) + \int_{-1}^{-e_0} [F'(\zeta) + G'(\zeta)] d\zeta = 2LN_y$$

$$\int_{E_1 E_3} \sigma_x dy = H(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + i \int_{-1}^{-1+ih} [F'(\zeta) + G'(\zeta)] d\zeta = 2HN_x$$

Используя решение задачи в форме (5.10) — (5.12), вычисляем интегралы в формулах (5.19)

$$(5.20) \quad \int_{-1}^{-e_0} [F'(\zeta) + G'(\zeta)] d\zeta = c_1(b - a)(1 - e_0) + \frac{c_1 \alpha (a + b) K(\sqrt{1 - \delta^2})}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)}$$

$$\int_{-1}^{-1+ih} [F'(\zeta) + G'(\zeta)] d\zeta = ic_1 h (b - a) +$$

$$+ c_1(a + b) \int_{-1}^{-1+ih} \frac{\operatorname{sn}(\zeta/\alpha, k) d\zeta}{\sqrt{\operatorname{sn}^2(\zeta/\alpha, k) - \operatorname{sn}^2(e_0/\alpha, k)}} =$$

$$= ic_1 h (b - a) + \frac{\alpha c_1 (a + b)}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \delta^2)(1 - t^2)}} =$$

$$= ic_1 h (b - a) + \frac{iac_1 (a + b) K(\delta)}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)}$$

Подставляя вычисленные интегралы в уравнения (5.19), получаем следующие соотношения:

$$(5.21) \quad 2(a+p)(L-x_0) + c_1(b-a)(1-e_0) + \\ + \frac{\alpha c_1(a+b)K(\sqrt{1-\delta^2})}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)} = 2LN_y \\ 2H(a+p) - c_1h(b-a) - \frac{\alpha c_1(a+b)K(\delta)}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)} = 2HN_x$$

При помощи второй формулы (5.18) найдем диаметр отверстия $2y_0$ в сечении $x = 0$; получаем

$$(5.22) \quad y_0 = \frac{\alpha c_1(1+b/a)F(\varphi_0, \delta)}{2\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)} \\ \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{t_0^2 - 1}{t_0^2 - \delta^2}}, \quad t_0 = \frac{1}{\operatorname{dn}(e_0/\alpha, k)}$$

Четыре уравнения (5.16), (5.17) и (5.21) служат для определения четырех постоянных. Одна из постоянных остается свободным параметром, как и ранее.

Попытка приближенного решения рассмотренной задачи методом малого параметра была предпринята в работах [9,11].

6. Приложение к теории конструкций минимального веса. Пусть конструкция или некоторый ее элемент представляют собой пластины с отверстиями, находящиеся в плоском напряженном состоянии. Толщина пластин считается постоянной. Предположим, что задано некоторое предельно допустимое нормальное напряжение (с учетом коэффициента запаса), определяемое из упругого расчета конструкции. Заметим, что во всех конструкциях, рассчитываемых на длительную работу, пластические зоны обычно не допускаются. Форма отверстий по технологическим причинам обычно бывает круговой.

В указанных допущениях, которые весьма часто реализуются на практике, нетрудно оценить выигрыш в весе конструкции, получаемый при использовании равнопрочных отверстий вместо стандартных круговых.

Сравнение равнопрочных отверстий с другими показывает, что напряжение σ_t на них минимально по сравнению с максимальной величиной σ_t на любых других контурах отверстий¹. В этом смысле равнопрочное отверстие обладает также свойством наибольшей прочности (по сравнению со всеми другими отверстиями).

Отсюда вытекает следующее: конструкция с равнопрочными отверстиями обладает наименьшим весом по сравнению с аналогичными конструкциями, имеющими неравнопрочные отверстия. Действительно, две аналогичные конструкции с отверстиями различной формы из пластин разной толщины (естественно, из одного и того же материала) будут эквивалентны в смысле прочности, если максимальное напряжение σ_t на контуре отверстий в этих конструкциях будет одним и тем же. Равнопрочные отверстия позволяют применять пластины наименьшей толщины для любого заданного предельно допустимого напряжения.

Приведем конкретные оценки. Пусть бесконечная пластина толщины h_0 с круговым отверстием, свободным от нагрузок, подвержена однородному растяжению, которое полностью описывается усилиями P и βP , действующими по главным направлениям (β — некоторое число, $\beta \leq 1$). Отметим размерность усилий P , т. е. «сила, деленная на длину». В этом случае максимальное напряжение σ_t на контуре отверстия, очевидно, равно

$$\sigma_t^{\max} = (3 - \beta) P / h_0$$

¹ Это утверждение следует рассматривать как интуитивно очевидный факт, проверенный во многих случаях. Строгое доказательство его автору неизвестно.

Аналогичная величина в случае равнопрочного отверстия в пластине толщины h_{\min} , согласно формуле (1.10), равна

$$\sigma_i^{\max} = (1 + \beta) P / h_{\min}$$

Приравнивая эти две величины для конструкций, эквивалентных по прочности, получаем

$$h_{\min} = (1 + \beta) h_0 / (3 - \beta)$$

Следовательно, в этом случае применение равнопрочного отверстия вместо кругового позволяет уменьшить вес рассматриваемого элемента конструкции на $g\%$, где

$$(6.1) \quad g = 200 (1 - \beta) / (3 - \beta)$$

не изменяя прочности. Например, если одно главное усилие в два раза больше другого, т. е. $\beta = 1/2$, использование равнопрочного отверстия вместо кругового позволяет уменьшить вес пластины на 40% с сохранением прочности.

Можно показать, что с увеличением числа отверстий и при наличии границы величина g увеличивается. Поэтому формулу (6.1) можно рассматривать как нижнюю оценку возможного уменьшения веса конструкции.

Поступила 27 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей. В кн.: Приложение теории функций в механике сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1965.
2. Черепанов Г. П. Обратная упругопластическая задача в условиях плоской деформации. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 1.
3. Галин Л. А., Черепанов Г. П. О напряженном состоянии вблизи отверстий в пластинках из полимерных материалов. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 1.
4. Черепанов Г. П. Одна обратная задача теории упругости. Инж. ж. МТТ, 1966, № 3.
5. Черепанов Г. П. Равнопрочная выработка в горном массиве. В кн.: Проблемы механики горных пород. Алма-Ата, «Наука», 1966.
6. Иванов Г. М., Космодамианский О. С. Обернена пружнопластична периодична задача. Доп. АН УРСР, 1971, № 10.
7. Мирсалимов В. М. Обратная упругая задача для плоскости, ослабленной двумя одинаковыми отверстиями. Матер. республ. конф., Баку, 1971.
8. Neuber H. Zur Optimierung der Spannungskonzentration. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
9. Иванов Г. М., Космодамианский О. С. Обернена подвійноперіодична задача плоскої теорії пружності. Доп. АН УРСР, 1972, № 9.
10. Иванов Г. М., Космодамианский А. С. К решению задач с неизвестной границей при наличии циклической симметрии. Тр. Николаевск. кораблестроит. ин-та, 1973.
11. Космодамианский А. С. Распределение напряжений в изотропных многосвязных средах. Изд-во Донецк. ун-та, 1972.
12. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
13. Келдыш М. В. Конформное отображение многосвязных областей на канонические области. Успехи матем. наук., 1939, № 6.
14. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., Гостехиздат, 1950.
15. Чаплыгин С. А. К теории триплана. Собр. соч., т. 2, М. — Л., Гостехиздат, 1948.
16. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.