ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью. Докл. АН СССР, 1945, т. 47, № 4.
2. *Галин Л. А.* Некоторые задачи неустановившегося движения грунтовых вод. ПММ, 1951, т. 15, вып. 6.
3. *Галин Л. А.* О неустановившейся фильтрации при постоянном давлении на границе. ПММ, 1951, т. 15, вып. 1.

УДК 539.31

РАЗДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ РАДИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

А. Э. Пуро

(Таллин)

Приводится разделение системы трех уравнений теории упругости в статическом случае на систему из двух уравнений и одно независимое уравнение для пространства с радиальной неоднородностью в сферической системе координат. Методом разделения переменных эти уравнения решаются для определенных типов радиальной неоднородности. В частности, найдены решения для коэффициентов Ламе $\mu = \mathrm{const}$, $\lambda(r)$ — произвольная функция, $\mu = \mu_0 r^\beta$, $\lambda = \lambda_0 r^\beta$.

В то время как методы решения задач, связанных с равновесием упругой однородной сферы, достаточно разобраны [1], для неоднородной сферы в основном решаются задачи при сферической симметрии краевых условий [2, 3].

Для частного вида неоднородности, зависящей от одной декартовой координаты, полное разделение уравнений было проведено в [4]. Ниже методом, аналогичным [4], разделяется система из трех уравнений при радиальной неоднородности в сферической системе координат.

1. Уравнения равновесия в перемещениях при радиальной неоднородности в отсутствии массовых сил имеют вид

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} + \mathbf{i}_r\lambda'\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mu\left(\mathbf{i}_r \times \mathrm{rot}\,\mathbf{u} + 2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\lambda(r)$ и $\mu(r)$ — коэффициенты Ламе, зависящие от радиуса, $\mathbf{i}_r$ — единичный вектор в радиальном направлении, u — вектор перемещения.

Запишем (1.1) в матричной форме в сферических координатах

$$\|a_{ik}\|\,\mathrm{col}\,(u_r, u_\theta, u_\varphi) = 0 \tag{1.2}$$

$$a_{11} = \mu\,[D_\theta{}^\circ D_\theta + D_\varphi{}^2] + \frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda D^\circ + 2\mu\frac{\partial}{\partial r}\right] + \frac{4\mu}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right]$$

$$a_{12} = \left[\zeta_1\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} + \lambda'\right]D_\theta{}^\circ, \qquad a_{13} = \left[\zeta_1\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} + \lambda'\right]D_\varphi$$

$$a_{22} = \zeta_1 D_\theta D_\theta{}^\circ + \mu\left[\Delta - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right] + \mu'\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right]$$

$$a_{21} = D_\theta\left[\zeta_1 D^\circ + \frac{2\mu}{r} + \mu'\right], \qquad a_{23} = D_\varphi\left[\zeta_1 D_\theta - \frac{2\mu\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\right]$$

$$a_{33} = \zeta_1 D_\varphi{}^2 + \mu\left[\Delta - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right] + \mu'\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right]$$

$$a_{31} = D_\varphi\left[\zeta_1 D^\circ + \frac{2\mu}{r} + \mu'\right], \qquad a_{32} = D_\varphi\left[\zeta_1 D_\theta{}^\circ + \frac{2\mu}{r}\,\mathrm{ctg}\,\theta\right]$$

Здесь

$$\zeta_1 = \lambda + \mu,\ \zeta = \lambda + 2\mu$$
$$D_\theta v = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad Dv = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv),\quad D_\varphi v = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$$
$$D_\theta^\circ v = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot v),\quad D^\circ v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v)$$

Вводим следующую замену (сумму ротора и градиента на сферической поверхности):

$$u_\theta = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial N}{\partial\varphi} + \frac{\partial F}{\partial\theta},\quad u_\varphi = -\frac{\partial N}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\varphi}$$

В результате матричное уравнение принимает вид (Δ^* — оператор Бельтрами [5])

$$a_{11}u_r + \zeta_1\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\Delta_* F\right) - \frac{2\mu}{r^2}\Delta_* F + \frac{\lambda'}{r}\Delta_* F = 0 \tag{1.3}$$

$$rD_\theta Q_1 + rD_\varphi Q_2 = 0,\quad rD_\varphi Q_1 - rD_\theta Q_2 = 0 \tag{1.4}$$

$$Q_1 = \left[\frac{\zeta_1}{r}D^\circ + \frac{2\mu}{r^2} + \frac{\mu'}{r}\right]u_r + \left[\mu\Delta + \mu'\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right) + \frac{\zeta}{r^2}\Delta_*\right]F$$

$$Q_2 = \left[\mu\Delta + \mu'\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\right]N,\quad \Delta_* = r^2[D_\theta^\circ D_\theta + D_\varphi^2]$$

При выводе уравнений были использованы следующие легко проверяемые соотношения:

$$\mu\left(\Delta - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)rD_\theta - 2\mu\operatorname{ctg}\theta D_\varphi^2 = rD_\theta\mu\Delta$$
$$\mu\left(\Delta - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)rD_\varphi + 2\mu\operatorname{ctg}\theta D_\varphi^2 = rD_\varphi\mu\Delta$$

Одно из уравнений системы (1.4) удовлетворяется тождественно, если определить

$$Q_1 = -\frac{\partial w}{\partial\varphi},\quad Q_2 = \sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta} \tag{1.5}$$

Тогда другое уравнение этой системы дает уравнение для w

$$\Delta_* w = 0 \tag{1.6}$$

Теперь вместо решения системы (1.3), (1.4) рассматриваем решение системы (1.3), (1.5), (1.6).

Покажем, что без исключения общности функцию можно считать равной нулю. Обозначим решение однородных уравнений через u_r°, F°, N°, а решения неоднородных уравнений — через u_r^+, F^+, N^+. В качестве частного решения неоднородных уравнений возьмем следующее (w_1 — решение уравнения (1.6)):

$$u_r^+ = 0,\quad F^+ = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_a^r w_1(\varphi,\theta,r_1)K(r_1,r)\,dr_1 \tag{1.7}$$

$$N^+ = \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\int_a^r w_1(\varphi,\theta,r_1)K(r_1,r)\,dr_1$$

$$K(r_1,r) = \frac{y_1(r_1)y_2(r) - y_2(r_1)y_1(r)}{y_1(r_1)y_2'(r_1) - y_2(r_1)y_1'(r_1)}$$

Здесь y_1, y_2 — линейно-независимые решения однородного уравнения

$$\left[D^\circ\frac{\partial}{\partial r} + \mu\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\right]y = 0$$

Для проверки того, что F^+ и N^+ — частные решения неоднородного уравнения (1.5), необходимо учитывать, что $\Delta_* F^+ = 0$, $\Delta_* N^+ = 0$.

Следовательно, решение имеет вид

$$u_r = u_r^\circ,\ u_\theta = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(N^+ + N^\circ) + \frac{\partial}{\partial\theta}(F^+ + F^\circ) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial N^\circ}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\theta}F^\circ$$

$$u_\varphi = -\frac{\partial}{\partial\theta}(N^+ + N^\circ) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(F^+ + F^\circ) = -\frac{\partial}{\partial\theta}N^\circ + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}F^\circ$$

Таким образом, система из трех уравнений (1.3), (1.4) приводится к системе из двух уравнений, состоящих из уравнения (1.3) и уравнения $Q_1 = 0$, и к отдельному уравнению $Q_2 = 0$. При наличии массовых сил, имеющих потенциал, в правых частях уравнений появляются соответствующие члены, описывающие рассматриваемое разделение векторов.

2. Рассмотрим применение метода разделения переменных к уравнению $Q_2 = 0$, описывающему сдвиговые деформации. Естественно решение искать в виде ($Y(\theta, \varphi)$ — сферическая функция)

$$N = \Sigma f_n(r) Y_n(\theta, \varphi)$$

Используя свойство сферических функций [1], получаем уравнение второго порядка для $f_n(r)$

$$f_n''(r) + f_n'(r)\left(\frac{\mu'}{\mu} + \frac{2}{r}\right) - f_n(r)\left[\frac{(n+1)n}{r^2} + \frac{\mu'}{\mu r}\right] = 0 \tag{2.1}$$

Особый интерес представляют решения уравнения (2.1), выражающиеся через известные функции. Для этого подстановкой

$$f_n(r) = f_* / (r\sqrt{\mu})$$

приведем уравнение (2.1) к нормальной форме [6]

$$f_*'' + \left\{\frac{-(n+1)n}{r^2} - \frac{\mu''}{2\mu} + \frac{1}{4}\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 - \frac{2\mu'}{\mu r}\right\} f_* = 0 \tag{2.2}$$

Согласно [6], решение уравнения (2.2) связано с решением уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}\eta + P(x)\eta = 0$$

где $\eta = \eta(x)$, зависимостью $f_*(r) = \eta(x) / \sqrt{x'_r}$, где $x = x(r)$, если выполняется соотношение ($D_1\{x_r', r\}$ — производная Шварца [6])

$$\frac{1}{2}D_1\{x_r', r\} + (x_r')^2 P(x) = -\frac{(n+1)\ n}{r^2} - \frac{\mu''}{2\mu} + \frac{1}{4}\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 - \frac{2\mu'}{\mu r} = \tag{2.3}$$

$$= -\frac{(n+1)n - 2}{r^2} + \frac{1}{2}D_1\left\{\frac{1}{\mu r^4}, r\right\}$$

$$D_1\{x_r', r\} = -2(x_r')^{1/2}\frac{d^2}{dr^2}(x_r')^{-1/2}$$

Используя легко проверяемое свойство производной Шварца

$$D_1\{W_r', r\} = D_1\{x_r', r\} + D_1\{W_x', x\}(x_r')^2 \tag{2.4}$$

где $W = W[x(r)]$, можно записать следующее тождество:

$$D_1\left\{\frac{1}{\mu r^4}, r\right\} = D_1\{x_r', r\} + D_1\left\{\frac{r_x'}{\mu r^4}, x\right\}(x_r')^2 \tag{2.5}$$

(В рассматриваемых обозначениях $W_r' = 1 / (\mu r^4)$.) Учитывая тождество (2.5), соотношение (2.3) приведем к двум уравнениям

$$-\frac{(n+1)n-2}{r^2}(r_x')^2 = P_1(x), \qquad \frac{1}{2}D_1\left\{\frac{r_x'}{r^4\mu}, x\right\} = P_2(x) \tag{2.6}$$

$$(P_1(x) + P_2(x) = P(x))$$

последнее уравнение (2.6) запишем в явном виде, используя определение производной Шварца

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + P_2(x)\right]\left[\frac{r^4\mu}{r_x'}\right]^{1/2} = 0 \tag{2.7}$$

Используя нормальную форму известных уравнений Гельмгольца, Бесселя, Уиттекера, т. е. задаваясь функцией $P(x)$ и разбивая ее на удобные для вычислений части $P_1(x)$ и $P_2(x)$, из первого уравнения (2.6) и (2.7) найдем функцию $\mu(r)$, для которой решения уравнения (2.2) выражаются через решения соответствующего уравнения.

Рассмотрим конкретные примеры.

1°. Решения выражаются через уравнения Гельмгольца. В этом случае $P(x) = -s^2$. При этом принимаем $P_1(x) = -s_1^2$, $P_2(x) = -s_2^2$, так что $-s_1^2 - s_2^2 = -s^2$.

Из уравнения (2.6) получаем два соотношения

$$-(n+1)n + 2 = -s_1^2, \qquad r_x' = r$$

Последнее соотношение определяет r, как функцию от x, $r = ce^x$, где c — постоянная интегрирования. Подставляя $P_2(x) = -s_2^2$ в уравнение (2.7) и решая его относительно $r^4\mu / r_x'$, получаем

$$\mu = (A_1e^{-s_2x} + A_2e^{s_2x})^2 / r^3$$

или соответственно

$$\mu = (A_1r^{-s_2} + A_2r^{s_2})^2 / r^3$$

Для функции f_* находим

$$f_* = \sqrt{r}\,\left(B_1r^{-\sqrt{(n+1)n-2+s_2^2}} + B_2r^{\sqrt{(n+1)n-2+s_2^2}}\right)$$

Функция $f_n(r)$ в этом случае равна

$$f_n(r) = \frac{r}{(A_1r^{-s_2} + A_2r^{s_2})}\left(B_1r^{-\sqrt{(n+1)n-2+s_2^2}} + B_2r^{\sqrt{(n+1)n-2+s_2^2}}\right)$$

При $A_1 = 0$, $s_2 = {}^3/_2$ решения переходят в известные, соответствующие однородному пространству.

2°. Решения, выражающиеся через решения уравнения Бесселя.

В этом случае при $P_1(x) = (1 - 4\nu^2) / (4x^2)$, $P_2(x) = s^2$, где ν — порядок функции Бесселя, из первого уравнения (2.6) и (2.7) получаем

$$r = x, \qquad \nu = \pm\sqrt{n^2 + n - {}^7/_4}, \qquad \mu = \{A_1e^{-isr} + A_2e^{isr}\}^2 / r^4$$

Для функции f_* из (2.3) для соответствующего $P(x)$ находим

$$f_*(r) = [B_1J_\nu(sr) + B_2J_{-\nu}(sr)]\sqrt{r}$$

Если принять

$$P_1(x) = s^2, \qquad P_2(x) = \frac{1-4\nu^2}{4x^2}$$

из первого уравнения (2.6) и (2.7) получаем ($s^2 = 2 - (n+1)\,n$, $\ln r = x$)

$$(\mu r^3)^{1/2} = \begin{cases} c_1 x^{1/2+k} + c_2 x^{1/2-k} \ (k = |\nu|), & \nu^2 > 0 \\ c_1 \sqrt{x} + c_2 \sqrt{x} \ln x, & \nu^2 = 0 \\ c_1 \sqrt{x} \cos(k \ln x) + c_2 \sqrt{x} \sin(k \ln x), & \nu^2 < 0 \end{cases}$$

Функции $f_*(r)$ и $f_n(r)$ выражаются через функции Бесселя согласно приведенным примерам.

Аналогично проводится рассмотрение решений, выражающихся через гипергеометрическую функцию.

3. Для решения системы, состоящей из двух уравнений: уравнения $Q_1 = 0$ и (1.3), применим метод разделения переменных. Будем искать решение в виде $u_r = \Sigma u_n Y_n (Q, \varphi)$, $F = \Sigma F_n Y_n (\theta, \varphi)$. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3.1), которую запишем в матричной форме (E — единичная матрица)

$$\left[E \frac{d^2}{dr^2} - G \frac{d}{dr} - H\right] \left\| \begin{matrix} u_n \\ F_n \end{matrix} \right\| = 0 \tag{3.1}$$

$$G = \left\| \begin{matrix} -\left(\frac{2}{r} + \frac{\zeta'}{\zeta}\right) & \frac{\zeta_1 (n+1)\,n}{\zeta r} \\ \frac{\zeta_1}{\mu r} & -\left(\frac{2}{r} + \frac{\mu'}{\mu}\right) \end{matrix} \right\|$$

$$H = \left\| \begin{matrix} \frac{2}{r^2} + \frac{(n+1)\,n\mu}{r^2 \zeta} - \frac{2\lambda'}{r} & -\frac{(n+1)\,n(\zeta + \mu)}{r^2 \zeta} + \frac{(n+1)\,n\lambda'}{\zeta r} \\ -\left(\frac{2\zeta}{\mu r^2} + \frac{\mu'}{\mu r}\right) & \frac{\zeta (n+1)\,n}{r^2 \mu} + \frac{\mu'}{\mu r} \end{matrix} \right\|$$

Рассмотрим простейшие случаи решения системы (3.1).

1°. Неоднородное пространство с $\lambda = \lambda_0 r^\beta$, $\mu = \mu_0 r^\beta$. Подставляя λ и μ в матрицы G и H, получим, что матрица коэффициентов обратно пропорциональна r, а $H \sim 1 / r^2$. Следовательно, система представляет матричное уравнение типа Эйлера, и решения его ищутся в виде $u_n = u_* r^m$, $F_n = F_* r^m$, где u_* и F_* — постоянные, m — корни характеристического уравнения четвертого порядка, получающегося в результате подстановки решений в уравнение (3.1).

В частности, при $\beta = 0$ получаем известные значения m, соответствующие решениям для однородного пространства.

2°. Рассмотрим случай, когда одно из решений уравнений (1.1) $u = \operatorname{grad} \chi$. В обозначениях системы (3.1) получаем $u_n = \partial\chi / \partial r$, $F_n = \chi / r$. Подставляя эти выражения в уравнение (3.1), получаем два уравнения относительно χ; условие тождественности этих уравнений определяет закон неоднородности сред, при котором одно из решений имеет указанный вид. Условие тождественности (два случая)

1) когда

$$\zeta = \frac{2 (\mu')^2 r}{\mu'' r - \mu'} \tag{3.2}$$

2) когда $\mu = \text{const}$, а λ — произвольная функция.

В случае, когда $\mu = \text{const}$, представим систему (3.1) относительно переменных u_n и $\chi = F_n r$ в виде

$$\left[\frac{d}{dr} - A\right] \left[\frac{d}{dr} - B\right] \left\| \begin{matrix} u_n \\ \chi \end{matrix} \right\| = 0 \tag{3.3}$$

Решением системы (3.3) будет Ψ_b, $\Psi_b \int \Psi_b^{-1}\Psi_a dr$, где Ψ_b и Ψ_a—матрицы фундаментальных решений уравнений

$$\left[\frac{d}{dr} - A\right]\Psi_a = 0, \qquad \left[\frac{d}{dr} - B\right]\Psi_b = 0 \tag{3.4}$$

$$A = \begin{Vmatrix} -\dfrac{\lambda'}{\zeta} & -\dfrac{\mu(n+1)n}{\zeta r^2} \\ -\dfrac{\zeta}{\mu} & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} -\dfrac{2}{r} & \dfrac{(n+1)n}{r^2} \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Решения систем (3.4)

$$\Psi_a = \begin{Vmatrix} \dfrac{-\zeta(n+1)nr^n}{\mu} & \dfrac{\zeta nr^{-(n+1)}}{\mu} \\ r^{n+1} & r^{-n} \end{Vmatrix}, \quad \Psi_b = \begin{Vmatrix} nr^{n-1} & -(n+1)r^{-(n+2)} \\ r^n & r^{-(n+1)} \end{Vmatrix}$$

В случае, когда выполняется соотношение (3.2), представление уравнения (3.1) в форме (3.3) дает

$$A = \begin{Vmatrix} \dfrac{-\lambda'}{\zeta} & \dfrac{-\mu(n+1)n}{\zeta r^2} - \dfrac{2\mu'}{\zeta r} \\ \dfrac{-\zeta'}{\mu} & \dfrac{-\mu'}{\mu} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} -\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{\mu''}{\mu}\right) & \dfrac{(n+1)n-1}{r^2} + \dfrac{\mu''}{\mu' r} \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Решения уравнений (3.4) для этих матриц A и B при условии (3.2) не удается указать в замкнутом виде, как это было сделано при μ = const. Только в частных случаях можно выразить решения через известные решения уравнений второго порядка.

Поступила 7 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
2. *Huston R. L.* On nonhomogeneous elastic spheres. Z. angew. Math. und Mech., 1964, Bd44, H12. S. 573—577.
3. *Ломакин В. А.* Симметричная деформация случайно-неоднородного полого шара. В кн.: Проблемы надежности в строительной механике. (Тезисы докл. 3 Всес. конф.) Вильнюс, 1971.
4. *Плевако В. П.* К теории упругости неоднородных сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
5. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики т. 2, М.— Л., Гостехиздат, 1951.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1971.