

ЛИТЕРАТУРА

1. Таганов Г. И. О предельных течениях вязкой жидкости со стационарными срывными зонами при $R \rightarrow \infty$. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 3.
2. Lock R. C. The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1951, vol. 4, pt. 1.
3. Pai Shih-I. Fluid dynamics of jets. N. Y., Van Nostrand, 1954.
4. Черный Г. Г. Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва. Изв. АН СССР. ОТН. 1954, № 12.

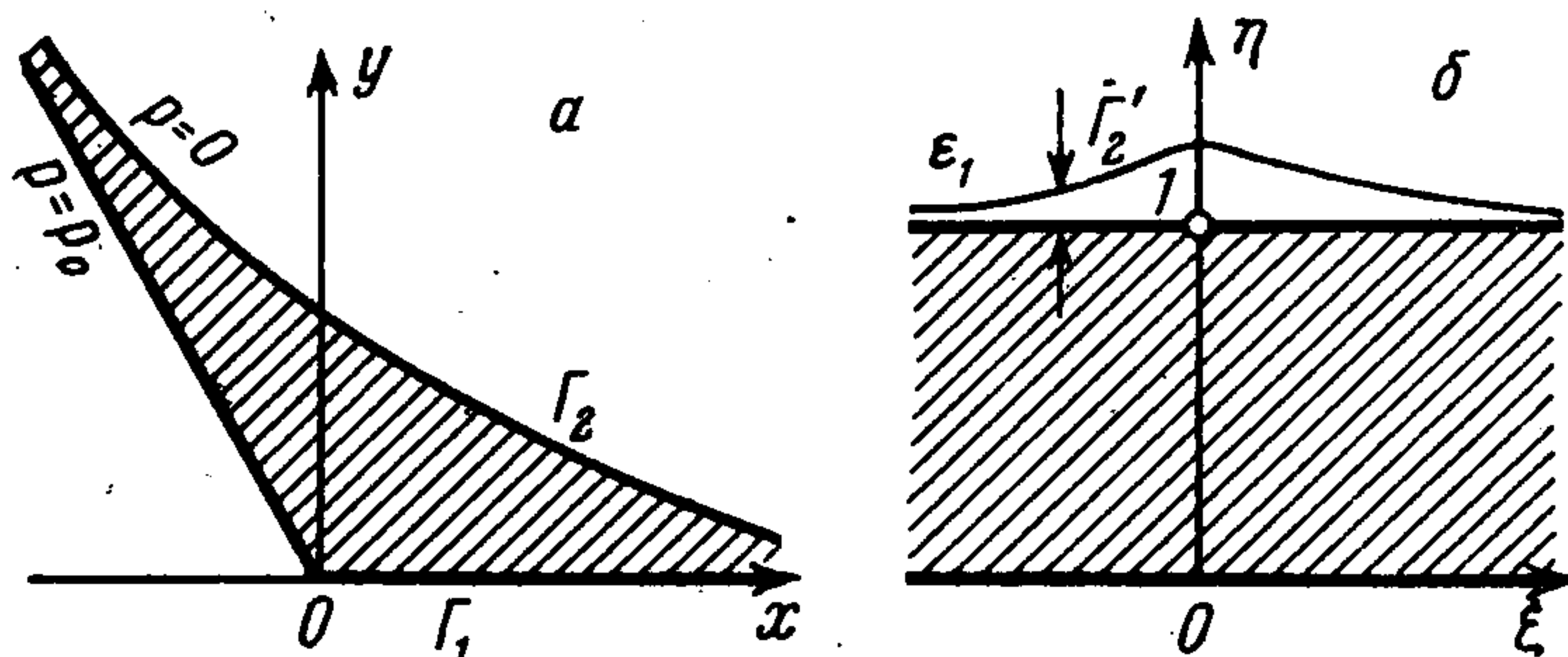
УДК 532.546

ОБ ОДНОМ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ В ОБЛАСТЯХ С ПЕРЕМЕЩАЮЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

М. В. Лурье, М. В. Филинов

(Москва)

Указывается семейство автомодельных решений двумерной задачи фильтрации и несжимаемой жидкости в областях с перемещающимися границами. В основу работы положен метод, развитый Л. А. Галиным для решения задачи об оседании водяных конусов в поле силы тяжести [1-3]



Фиг. 1

Согласно этому методу, задача сводится к отысканию аналитической функции комплексного переменного и времени, осуществляющей конформное отображение области фильтрации на полосу и удовлетворяющей на границе специальному нелинейному условию. Для решения такой задачи Л. А. Галин предложил метод последовательных приближений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим фильтрацию несжимаемой жидкости в области, ограниченной двумя бесконечными контурами Γ_1 и Γ_2 (фиг. 1, а), из которых один будем считать неподвижным, а другой — подвижным: $\Gamma_2(t)$. Примем, что на обоих контурах давление постоянно: $p = p_0$ на Γ_1 и $p = 0$ на Γ_2 . Это соответствует случаю, когда на контуре Γ_1 производится закачка жидкости в пласт, а контур Γ_1 служит границей раздела жидкости и газа. В этом случае величина $p_0 = p_{\Gamma_1} - p_{\Gamma_2}$ представляет собой перепад давлений, причем давление в газовой области постоянное. Комплексный потенциал такого движения имеет вид (k — коэффициент фильтрации)

$$W(z, t) = -kW_1(z, t)$$

При этом $p(x, y, t) = \operatorname{Re} W_1(z, t)$. Пусть функция $z = z(t, \zeta)$ реализует конформное отображение плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ на полосу $0 \leq \eta \leq 1$ в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ так, что контур Γ_1 переходит в прямую $\eta = 0$, а контур Γ_2 — в прямую $\eta = 1$ (фиг. 1, б). Кроме того, потребуем, чтобы $z(t, 0) = 0$. Тогда на границе этой полосы должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \zeta = \xi + i: \operatorname{Re} [W_1(\zeta, t)] &= 0 \\ \zeta = \xi + i0: \operatorname{Re} [W_1(\zeta, t)] &= p_0 \end{aligned}$$

Решение задачи в плоскости ζ очевидно

$$(1.1) \quad W_1(\zeta, t) = ip_0\zeta + p_0$$

Поэтому остается найти отображающую функцию $z = z(\zeta, t)$. Для получения условий, определяющих эту функцию, используем метод Л. А. Галина [1-3].

Пусть $\varepsilon(\Gamma_2, t)$ — нормальное смещение контура Γ_2 за время Δt .

Тогда

$$\varepsilon = \frac{v_n}{m} \Delta t = - \frac{k}{m} \frac{\partial p}{\partial n} \Delta t$$

Здесь m — пористость. Поскольку ясно, что (см. (1.1))

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \left| \frac{\partial W_1}{\partial \zeta} \right| \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right| = p_0 \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right| = \frac{p_0}{|\partial z / \partial \zeta|}$$

для величины смещения ε получаем

$$\varepsilon = \frac{k p_0}{|\partial z / \partial \zeta|} \frac{\Delta t}{m}$$

При использовании отображения $z(t, \zeta)$, соответствующего моменту времени t , новое положение контура Γ_2' в плоскости ζ в момент времени $(t + \Delta t)$ будет отличаться от прямой $\eta = i$ на величину нормального смещения ε_1 . Очевидно, что

$$(1.2) \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|\partial z / \partial \zeta|} = \frac{k p_0}{|\partial z / \partial \zeta|^2} \frac{\Delta t}{m}$$

Пусть функция $\zeta_1(\zeta)$ осуществляет отображение области фильтрации, ограниченной контурами Γ_1' и Γ_2' , на полосу $0 \leq \eta \leq 1$. Тогда величина разности в квадратных скобках в формуле

$$\zeta_1(\zeta) = \zeta + [\zeta_1(\zeta) - \zeta]$$

будет мала и очевидно, что

$$(1.3) \quad \text{Im}[\zeta_1(\zeta) - \zeta]_{\eta=1} = \varepsilon_1, \quad \text{Im}[\zeta_1(\zeta) - \zeta]_{\eta=0} = 0$$

Кроме того, $z(t + \Delta t, \zeta) = z(t, \zeta_1(\zeta))$.

Используя последние равенства, можно написать (точки означают бесконечно малые высшего порядка)

$$z(t + \Delta t, \zeta) - z(t, \zeta) = \frac{\partial z}{\partial t} \Delta t + \dots$$

$$z(t + \Delta t, \zeta) - z(t, \zeta) = z(t, \zeta_1) - z(t, \zeta) = \frac{\partial z}{\partial \zeta} [\zeta_1 - \zeta] + \dots$$

и далее

$$\frac{\partial z / \partial t}{\partial z / \partial \zeta} = \frac{\zeta_1 - \zeta}{\Delta t} + \dots$$

Используя равенства (1.2) и (1.3), получаем

$$(1.4) \quad \text{Im} \frac{\partial z / \partial t}{\partial z / \partial \zeta} \Big|_{\eta=1} = \frac{k p_0}{m |\partial z / \partial \zeta|^2}, \quad \text{Im} \frac{\partial z / \partial t}{\partial z / \partial \zeta} \Big|_{\eta=0} = 0$$

Выражения (1.4) представляют собой нелинейные краевые условия для определения отображающей функции $z(t, \zeta)$. После преобразований эти условия можно переписать в эквивалентном виде

$$(1.5) \quad \text{Im} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \tau} = -1 \quad \text{при } \zeta = \xi + i$$

$$\text{Im} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при } \zeta = \xi + i0$$

$$(\tau = p_0 k t / m, \quad \bar{z} = x - iy)$$

2. Автомодельное решение. Рассматриваемая задача допускает отыскание отображающей функции $z(t, \zeta)$ в следующем виде:

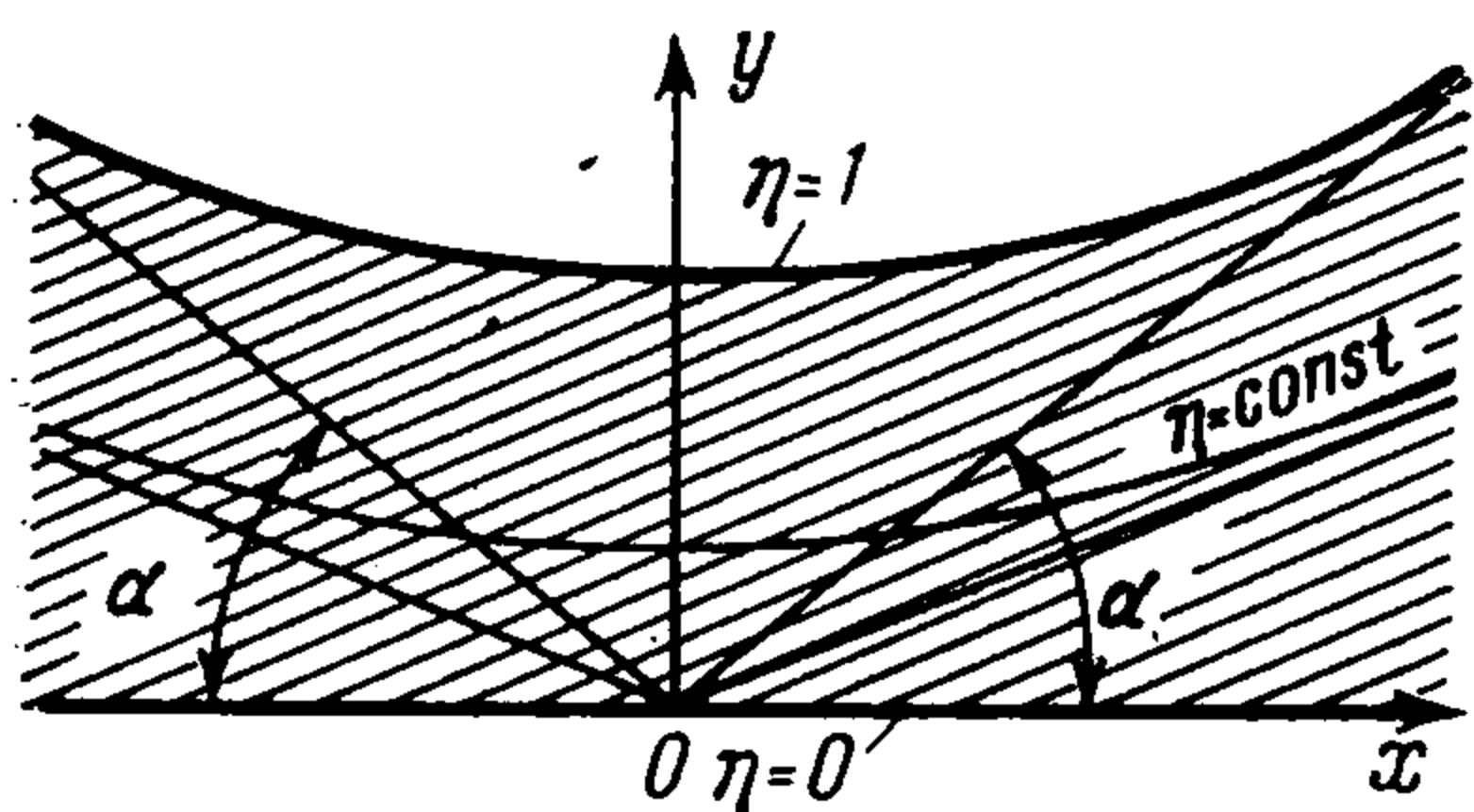
$$z(\tau, \zeta) = \sqrt{\tau} z^*(\zeta)$$

Здесь $z^*(\zeta)$ — аналитическая функция комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$, определенная в полосе $0 \leq \eta \leq 1$. На границах полосы, как это следует из (1.5), должны выполняться условия

$$(2.1) \quad \operatorname{Im} \frac{dz^*}{d\zeta} \bar{z}^* = -2 \quad \text{при } \zeta = \xi + i \\ \operatorname{Im} \frac{dz^*}{d\zeta} \bar{z}^* = 0 \quad \text{при } \zeta = \xi + i0$$

Кроме того, потребуем выполнения равенства $z^*(0) = 0$.

Вопрос о полном решении этой задачи остается открытым, но можно указать некоторый класс ее решений. Будем искать те решения, для которых величина



Фиг. 2

$$\operatorname{Im} \left(\frac{dz^*}{d\zeta} \bar{z}^* \right)$$

есть функция только одной переменной η . Это условие приводит к тому, что величина $|z^*|^2$ должна представляться в виде

$$|z^*|^2 = \alpha(\xi) + \beta(\eta)$$

Поскольку $z^*(\zeta)$ — аналитическая функция ζ , то $\alpha(\xi)$ и $\beta(\eta)$ должны быть связаны дифференциальным уравнением

$$\alpha''_{\xi\xi} + \beta''_{\eta\eta} = \frac{\alpha'_{\xi}{}^2 + \beta'_{\eta}{}^2}{\alpha + \beta}$$

Опуская процедуру преобразований этого уравнения, отметим только, что все его решения находятся из системы уравнений

$$\left(\frac{d\alpha}{d\xi} \right)^2 = c_1 + c_2\alpha + c_3\alpha^2, \quad \left(\frac{d\beta}{d\eta} \right)^2 = -c_1 + c_2\beta - c_3\beta^2$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные. Отсюда определяются следующие существенно различные типы решений, удовлетворяющие краевым условиям (2.1):

$$1) \quad z^* = \sqrt{2} \zeta, \quad z^* = \sqrt{\frac{2p_0kt}{m}} \zeta \\ 2) \quad z^* = \frac{2}{\sqrt{\lambda \sin 2\lambda}} \operatorname{sh} \lambda \zeta, \quad z^* = \sqrt{\frac{4p_0kt}{m\lambda \sin 2\lambda}} \operatorname{sh} \lambda \zeta$$

Первое из этих решений соответствует одномерному движению жидкости с линиями тока, параллельными оси OY , второе — носит существенно неоднородный характер. Картина течения в плоскости x, y представлена на фиг. 2. Эквипотенциальные линии полученного автомодельного решения описываются уравнениями подвижных гипербол ($\eta = \operatorname{const}, 0 < \eta \leq 1$)

$$\left(\frac{y}{\sin \lambda \eta} \right)^2 - \left(\frac{x}{\cos \lambda \eta} \right)^2 = \frac{4p_0kt}{m\lambda \sin 2\lambda}$$

а линии тока — эллипсами с уравнениями ($\xi = \operatorname{const}, 0 < \xi < \infty$)

$$\left(\frac{x}{\operatorname{sh} \lambda \xi} \right)^2 + \left(\frac{y}{\operatorname{ch} \lambda \xi} \right)^2 = \frac{4p_0kt}{m\lambda \sin 2\lambda}$$

В начальный момент времени жидкость заполняла два сектора, прилегающих к оси OX , с углом α , равным $\operatorname{arctg} \lambda, 0 < \lambda < \infty$.

В заключение отметим, что, несмотря на искусственный характер найденного решения, оно может оказаться полезным как при решении некоторых специальных задач фильтрации, так и для определения степени точности приближенных решений и вычислительных алгоритмов.

Авторы благодарят Е. Ф. Афанасьева за оказанную помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью. Докл. АН СССР, 1945, т. 47, № 4.
2. Галин Л. А. Некоторые задачи неустановившегося движения грунтовых вод. ПММ, 1951, т. 15, вып. 6.
3. Галин Л. А. О неустановившейся фильтрации при постоянном давлении на границе. ПММ, 1951, т. 15, вып. 1.

УДК 539.34

РАЗДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ПРИ РАДИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

А. Э. Пуро

(Таллин)

Приводится разделение системы трех уравнений теории упругости в статическом случае на систему из двух уравнений и одно независимое уравнение для пространства с радиальной неоднородностью в сферической системе координат. Методом разделения переменных эти уравнения решаются для определенных типов радиальной неоднородности. В частности, найдены решения для коэффициентов Ламе $\mu = \text{const}$, $\lambda(r)$ — произвольная функция, $\mu = \mu_0 r^\beta$, $\lambda = \lambda_0 r^\beta$.

В то время как методы решения задач, связанных с равновесием упругой однородной сферы, достаточно разобраны [1], для неоднородной сферы в основном решаются задачи при сферической симметрии краевых условий [2, 3].

Для частного вида неоднородности, зависящей от одной декартовой координаты, полное разделение уравнений было проведено в [4]. Ниже методом, аналогичным [4], разделяется система из трех уравнений при радиальной неоднородности в сферической системе координат.

1. Уравнения равновесия в перемещениях при радиальной неоднородности в отсутствии массовых сил имеют вид

$$(1.1) \quad (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u} + \mathbf{i}_r \lambda' \text{div } \mathbf{u} + \mu \left(\mathbf{i}_r \times \text{rot } \mathbf{u} + 2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right) = 0$$

Здесь $\lambda(r)$ и $\mu(r)$ — коэффициенты Ламе, зависящие от радиуса, \mathbf{i}_r — единичный вектор в радиальном направлении, \mathbf{u} — вектор перемещения.

Запишем (1.1) в матричной форме в сферических координатах

$$(1.2) \quad \| a_{ik} \| \text{col} (u_r, u_\theta, u_\varphi) = 0$$

$$a_{11} = \mu [D_\theta^\circ D_\theta + D_\varphi^2] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda D^\circ + 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{4\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right]$$

$$a_{12} = \left[\zeta_1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} + \lambda' \right] D_\theta^\circ, \quad a_{13} = \left[\zeta_1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} + \lambda' \right] D_\varphi$$

$$a_{22} = \zeta_1 D_\theta D_\theta^\circ + \mu \left[\Delta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + \mu' \left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right]$$

$$a_{21} = D_\theta \left[\zeta_1 D^\circ + \frac{2\mu}{r} + \mu' \right], \quad a_{23} = D_\varphi \left[\zeta_1 D_\theta - \frac{2\mu \text{ctg } \theta}{r} \right]$$

$$a_{33} = \zeta_1 D_\varphi^2 + \mu \left[\Delta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + \mu' \left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right]$$

$$a_{31} = D_\varphi \left[\zeta_1 D^\circ + \frac{2\mu}{r} + \mu' \right], \quad a_{32} = D_\varphi \left[\zeta_1 D_\theta^\circ + \frac{2\mu}{r} \text{ctg } \theta \right]$$