

УДК 532.5.032

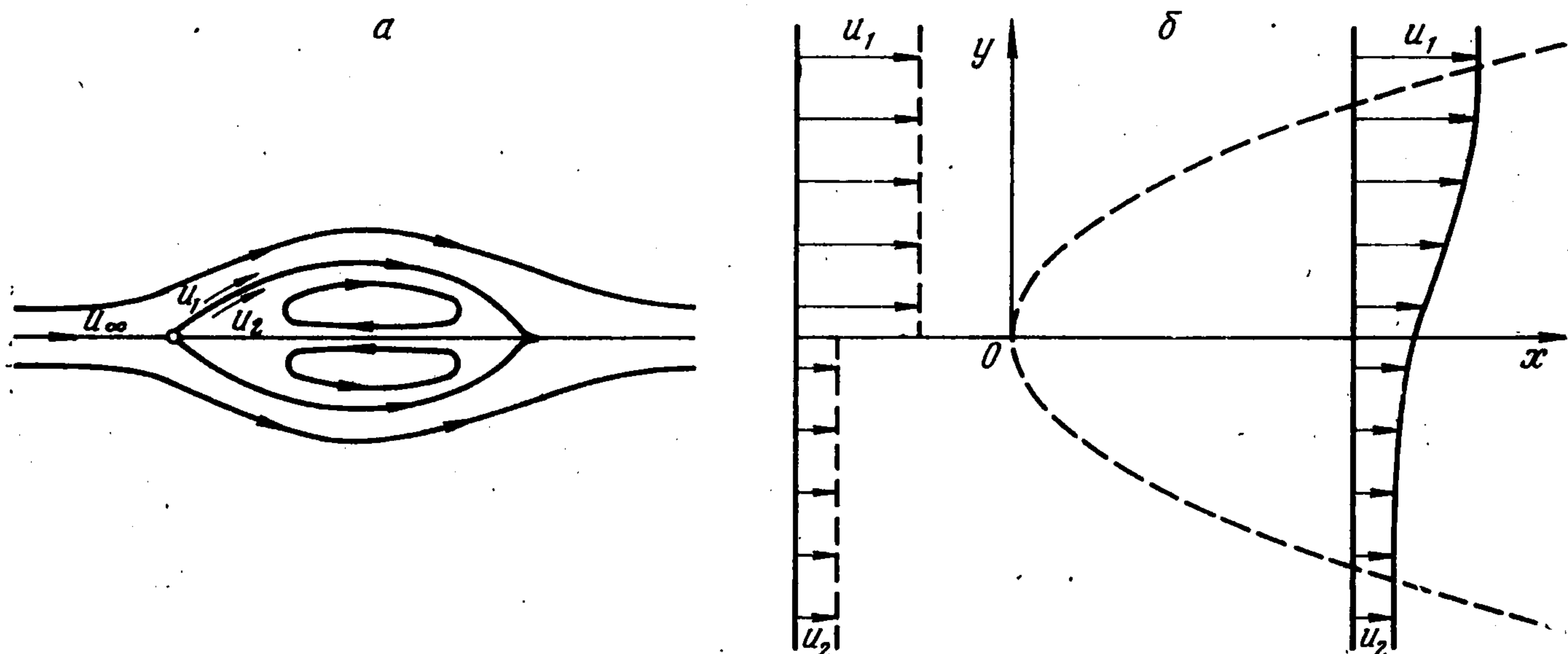
## ЛАМИНАРНЫЙ СЛОЙ СМЕШЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ПОТОКОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

В. Г. Буковшин, Г. И. Таганов

(Москва)

В линейризованной постановке рассматривается задача о ламинарном слое смешения на границе двух потоков несжимаемой жидкости с малым различием постоянных Бернулли при наличии продольного градиента давления. Получено распределение скорости в слое смешения и величины толщины вытеснения и потери импульса. Для случая отсутствия продольного градиента давления вычислено силовое воздействие одного потока на другой.

1. Из анализа возможных предельных течений вязкой жидкости со стационарными срывными зонами при числах Рейнольдса  $R \rightarrow \infty$  [1] следует, что разрыв постоянной Бернулли на границе срывной зоны  $\Delta \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$  ( $\Delta = (u_1^2 - u_2^2) / u_\infty^2$ , где  $u_1$  и  $u_2$  — соответственно скорости в точках границы с внешней и внутренней стороны, а  $u_\infty$  — скорость невозмущенного потока) и приобретает значение определение параметров слоя смешения при  $\Delta \ll 1$  (фиг. 1, а, б).



Фиг. 1

Ламинарный слой смешения на границе двух плоских потоков несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса описывается уравнениями пограничного слоя Прандтля при граничных и начальных условиях

$$(1.1) \quad u(x) = u_1(x), \quad y = \infty; \quad u(x) = u_2(x), \quad y = -\infty; \quad u(0, y) = \varphi(y)$$

Здесь и далее  $u$  и  $v$  — компоненты скорости в направлении осей  $x$  и  $y$  декартовой системы координат,  $\varphi(y)$  — распределение компонента скорости  $u$  при  $x = 0$ .

В рамках теории пограничного слоя давление поперек слоя смешения не изменяется, и согласно уравнению Бернулли, имеет место условие, налагаемое на функции  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$ :  $\Delta = \text{const}$  вдоль всей границы смешения.

В отличие от пограничного слоя вблизи жесткой границы, в котором продольный компонент скорости всегда изменяется на величину самой скорости на внешней границе слоя и для которого вследствие этого невозможна линейризация уравнений и граничных условий, для слоя смешения в случае, когда разность скоростей  $u_1(x) - u_2(x)$  мала по сравнению с самой скоростью (или, что эквивалентно,  $\Delta \ll 1$ ), линейризация уравнений и граничных условий возможна. Для линейризации задачи представим скорость в слое смешения в виде  $u(x, y) = u_1(x) + \varepsilon(x, y)$  (здесь  $\varepsilon(x, y)$  — малая добавка к скорости на внешней границе слоя смешения). Из условия неразрывности для несжимаемой жидкости, в предположении, что  $v(x, 0) = 0$ , следует ( $y = 0$  — разделя-

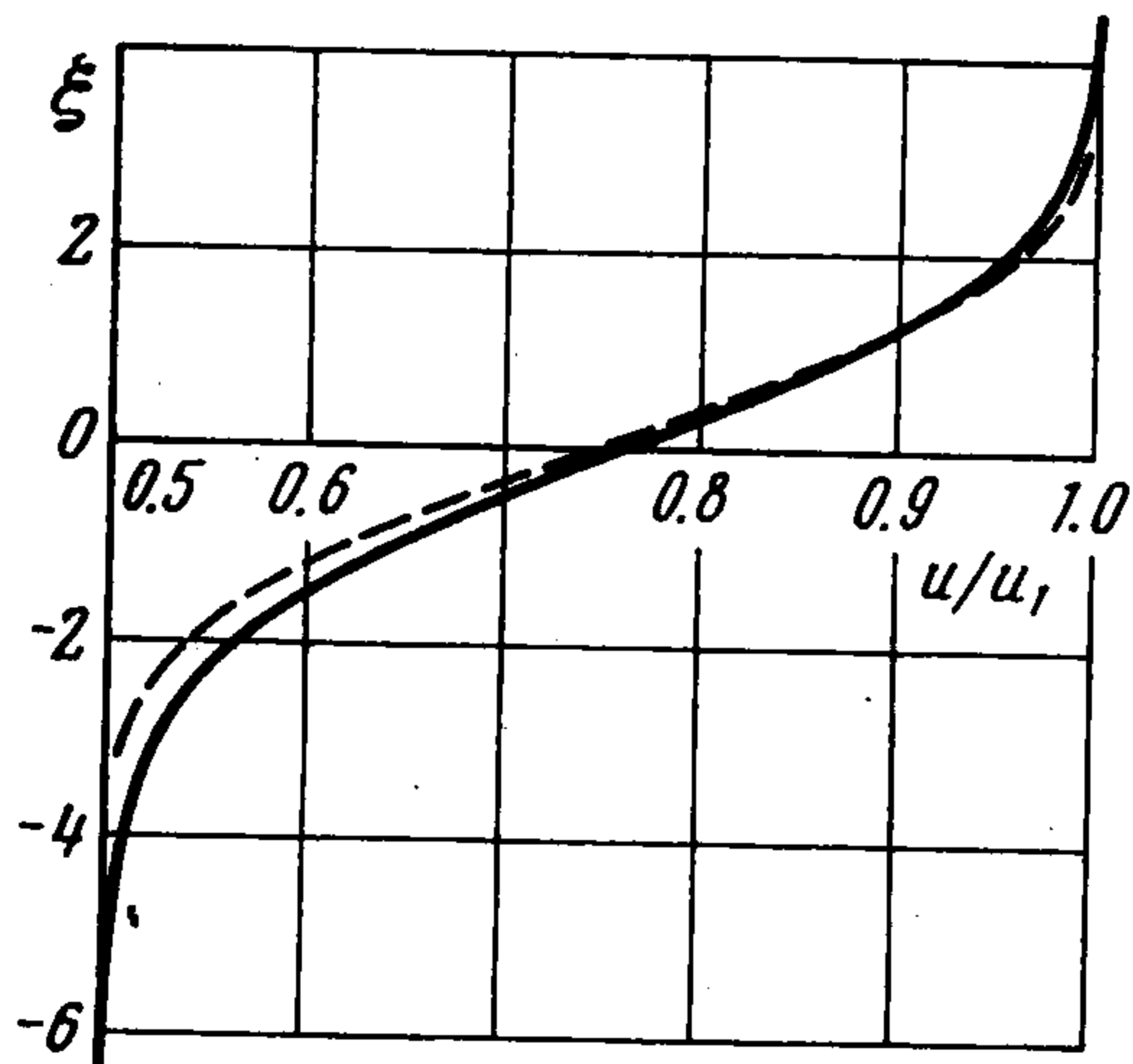
ющая линия тока)

$$(1.2) \quad v(x, y) = -y \frac{du_1}{dx} - \int_0^y \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dy$$

Подставляя (1.2) в уравнение пограничного слоя и заменяя  $u$  на  $u_1(x) + \varepsilon(x, y)$ , после отбрасывания произведения малых величин для  $\varepsilon(x, y)$  получим линейное уравнение

$$(1.3) \quad \frac{\partial(\varepsilon u_1)}{\partial x} - \frac{y}{u_1} \frac{du_1}{dx} \frac{\partial(\varepsilon u_1)}{\partial y} = \frac{\nu}{u_1} \frac{\partial^2(\varepsilon u_1)}{\partial y^2}$$

Преобразуем теперь условия на границах (1.1), записанные для компонента скорости  $u$ , к виду, соответствующему новой искомой величине  $\varepsilon(x, y)$ :  $\varepsilon = 0$  и  $\varepsilon u_1 = 0$



Фиг. 2

при  $y = \infty$ . При  $y = -\infty$  скорости  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  связаны условием равенства давления на верхней и нижней границах слоя смешения (фиг. 1, б), поэтому, используя уравнения Бернулли для верхнего и нижнего течений и пренебрегая членом  $\varepsilon^2(x, -\infty)$ , имеем

$$\varepsilon(x, -\infty) u_1 = 1/2 u_\infty^2 \Delta = \text{const}$$

Таким образом, если разность  $u_1(x) - u_2(x)$  мала, то задача о распределении скорости в слое смешения в линейной постановке сводится к решению уравнения (1.3) при граничных и начальных условиях

$$(1.4) \quad \varepsilon u_1 = 0, \quad y = \infty; \quad \varepsilon u_1 = 1/2 u_\infty^2 \Delta, \quad y = -\infty; \quad \varepsilon(0, y) = \varphi(y) - u_1(0)$$

2. Для решения сформулированной задачи совместим начало координат с началом слоя смешения и введем независимую переменную  $\xi = y \sqrt{u_\infty / [v f(x)]}$  ( $f(x)$  — функция, подлежащая определению в процессе решения). Заменяя в уравнении (1.3) частные производные через производные по  $\xi$ , получим уравнение и граничные условия для  $\varepsilon u_1$  в виде

$$(2.1) \quad \frac{d^2(\varepsilon u_1)}{d\xi^2} / \xi \frac{d(\varepsilon u_1)}{d\xi} = - \frac{u_1 f(x)}{u_\infty} \frac{d}{dx} \ln [u_1 f^{1/2}(x)]$$

$$(2.2) \quad \varepsilon u_1 = 0, \quad \xi = \infty; \quad \varepsilon u_1 = 1/2 u_\infty^2 \Delta, \quad \xi = -\infty$$

Чтобы решение уравнения (2.1) для  $\varepsilon u_1$  зависело только от  $\xi$ , необходимо, чтобы левая и правая части (2.1) равнялись некоторой постоянной  $c$ . Решение уравнения, соответствующее левой части (2.1), с граничными условиями (2.2) существует только при  $c < 0$  и имеет вид

$$(2.3) \quad \varepsilon u_1 = - \frac{u_\infty^2 \Delta}{2 \sqrt{2\pi}} \int_{\xi \sqrt{-c}}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Решением уравнения, соответствующим правой части (2.1), будет функция

$$(2.4) \quad f(x) = -2c \frac{u_\infty}{u_1^2} \int_0^x u_1 dx + c_1/u_1^2$$

Имея в виду в дальнейшем сравнение результатов данной работы с приведенными в работе [2] результатами численных расчетов полных уравнений пограничного слоя для ламинарного слоя смешения в случае отсутствия продольного градиента давления, выберем постоянные  $c$  и  $c_1$  такими, чтобы при отсутствии градиента давления ( $u_1 = u_\infty$ )

переменная  $\xi$  совпадала с безразмерной переменной  $\eta$  работы [2]. Для этого необходимо, чтобы  $c = -1/2$ ,  $c_1 = 0$ . Заметим, что в (2.3)  $\xi \sqrt{-c}$  не зависит от конкретного значения  $c$ , а это означает, что и  $\varepsilon u_1$  также не зависит от  $c$ .

Используя полученное решение для распределения скорости, вычислим толщину вытеснения  $\delta_1^*$  и толщину потери импульса  $\delta_2^*$

$$\begin{aligned} \delta_1^* &= \frac{1}{u_1} \int_0^\infty (u_1 - u) dy = \frac{u_\infty^2 \Delta}{2 \sqrt{2\pi} u_1^2} \int_0^x \int_{\xi \sqrt{2}}^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt dy = \\ &= \frac{f(x) u_\infty^2 \Delta}{2 \sqrt{\pi} u_1^2 R_f^{1/2}}, \quad R_f = \frac{u_\infty f(x)}{\nu} \\ \delta_1^{**} &= \int_0^\infty \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) dy = \int_0^\infty \left(1 + \frac{\varepsilon}{u_1}\right) \frac{\varepsilon}{u_1} dy \end{aligned}$$

Пренебрегая членом с  $\varepsilon^2$ , получим, что в рамках линейной теории

$$\delta_1^* = \delta_1^{**} = \delta_2^* = \delta_2^{**}$$

$$\left( \delta_2^* = \frac{1}{u_2} \int_0^\infty (u_2 - u) dy, \quad \delta_2^{**} = \frac{1}{u_2^2} \int_0^\infty u (u_2 - u) dy \right)$$

3. В случае отсутствия продольного градиента давления ( $u_1 = u_\infty$ ) имеем  $f(x) = x$ ,  $\xi = y \sqrt{u_\infty / (\nu x)}$  и

$$(3.1) \quad \varepsilon(x, y) = -\frac{u_\infty \Delta}{2 \sqrt{2\pi}} \int_{\xi \sqrt{2}}^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

На фиг. 2 приведено изменение скорости в слое смешения при  $u_2 / u_1 = 0.5$ , соответствующее формуле (3.1) (пунктирная кривая); для сравнения приведены также результаты численного интегрирования полных уравнений пограничного слоя (сплошная кривая), заимствованные из работы [2].

Приведены значения скорости на разделяющей линии тока ( $y = 0$ ), полученные по формуле (3.1) и по результатам численных расчетов [2] для разных  $u_2 / u_1$  в таблице.

Видно, что распределение скорости в слое смешения вполне удовлетворительно описывается формулой (3.1).

В случае безградиентного слоя смешения

$$\frac{\delta_1^*}{x} = \frac{\Delta}{2 \sqrt{2\pi} R_x^{1/2}}, \quad c_x = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi} R_x^{1/2}}$$

Здесь  $c_x$  — безразмерный коэффициент силы воздействия одного потока на другой. Соответствующие величины для пограничного слоя на пластине

$$\frac{\delta_1^*}{x} = \frac{1.72}{R_x^{1/2}}, \quad c_x = \frac{1.328}{R_x^{1/2}}$$

Заметим, что закон распределения скорости в ламинарном слое смешения при отсутствии градиента давления в форме (3.1), полученный в данной работе как частный случай закона для слоя смешения при наличии градиента давления, впервые был установлен в работе [3]. Линеаризованное решение уравнений пограничного слоя при отсутствии продольного градиента давления использовалось также при решении и других задач о ламинарных течениях жидкости и газа (см., например, [4]).

Поступила 5 VII 1973

$u_2/u_1$	$u(x, 0)/u_1$	
	[*]	(3.1)
0	0.5873	0.500
0.5	0.7657	0.750
0.75	0.8784	0.875

## ЛИТЕРАТУРА

1. Таганов Г. И. О предельных течениях вязкой жидкости со стационарными срывными зонами при  $R \rightarrow \infty$ . Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 3.
2. Lock R. C. The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1951, vol. 4, pt. 1.
3. Pai Shih-I. Fluid dynamics of jets. N. Y., Van Nostrand, 1954.
4. Черный Г. Г. Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва. Изв. АН СССР. ОТН. 1954, № 12.

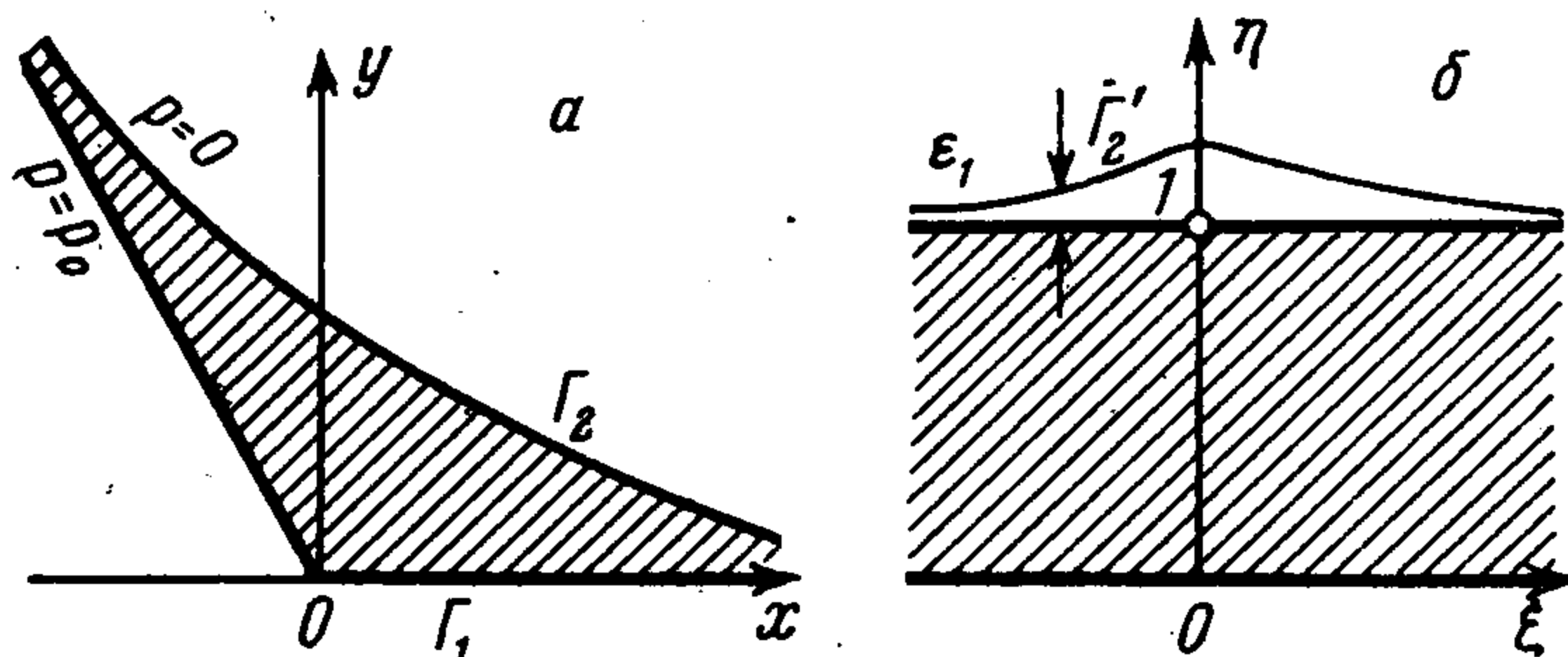
УДК 532.546

### ОБ ОДНОМ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ В ОБЛАСТЯХ С ПЕРЕМЕЩАЮЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

М. В. Лурье, М. В. Филинов

(Москва)

Указывается семейство автомодельных решений двумерной задачи фильтрации и несжимаемой жидкости в областях с перемещающимися границами. В основу работы положен метод, развитый Л. А. Галиным для решения задачи об оседании водяных конусов в поле силы тяжести [1-3]



Фиг. 1

Согласно этому методу, задача сводится к отысканию аналитической функции комплексного переменного и времени, осуществляющей конформное отображение области фильтрации на полосу и удовлетворяющей на границе специальному нелинейному условию. Для решения такой задачи Л. А. Галин предложил метод последовательных приближений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим фильтрацию несжимаемой жидкости в области, ограниченной двумя бесконечными контурами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (фиг. 1, а), из которых один будем считать неподвижным, а другой — подвижным:  $\Gamma_2(t)$ . Примем, что на обоих контурах давление постоянно:  $p = p_0$  на  $\Gamma_1$  и  $p = 0$  на  $\Gamma_2$ . Это соответствует случаю, когда на контуре  $\Gamma_1$  производится закачка жидкости в пласт, а контур  $\Gamma_1$  служит границей раздела жидкости и газа. В этом случае величина  $p_0 = p_{\Gamma_1} - p_{\Gamma_2}$  представляет собой перепад давлений, причем давление в газовой области постоянное. Комплексный потенциал такого движения имеет вид ( $k$  — коэффициент фильтрации)

$$W(z, t) = -kW_1(z, t)$$

При этом  $p(x, y, t) = \operatorname{Re} W_1(z, t)$ . Пусть функция  $z = z(t, \zeta)$  реализует конформное отображение плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  на полосу  $0 \leq \eta \leq 1$  в плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  так, что контур  $\Gamma_1$  переходит в прямую  $\eta = 0$ , а контур  $\Gamma_2$  — в прямую  $\eta = 1$  (фиг. 1, б). Кроме того, потребуем, чтобы  $z(t, 0) = 0$ . Тогда на границе этой полосы должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \zeta = \xi + i: \operatorname{Re} [W_1(\zeta, t)] &= 0 \\ \zeta = \xi + i0: \operatorname{Re} [W_1(\zeta, t)] &= p_0 \end{aligned}$$

Решение задачи в плоскости  $\zeta$  очевидно

$$(1.1) \quad W_1(\zeta, t) = ip_0\zeta + p_0$$