

ЛИТЕРАТУРА

1. *Regge T., Wheeler J. A.*, Stability of a Schwarzschild singularity. *Phys. Rev.*, 1957, vol. 108, N 4.
2. *Zerilli F. J.* Gravitational field of a particle falling in a Shwarzshild geometry analyzed in tensor harmonics. *Phys. Rev.*, 1970, vol. 2, N 10.
3. *Zerilli F. J.* Tensor harmonics in canonical form for gravitational radiation and other applications, *J. Math. Phys.*, 1970, vol. 11, № 7.
4. *Субгатуллин Н. Р., Алексеев Г. А.* Гравитационные волны в поле коллапсирующей звезды. В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц, вып. 5, М., Атомиздат, 1973.
5. *Price R. H.* Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. *Phys. Rev.*, 1972, vol. 5, N 10.
6. *Субгатуллин Н. Р.* Взаимодействие коротких гравитационных и электромагнитных волн в произвольных внешних электромагнитных полях. *ЖЭТФ*, 1974, т. 66, вып. 4.
7. *Левич Е. В., Сюняев Р. А.* Нагрев газа вблизи квазаров, ядер сейфертовских галактик и пульсаров низкочастотным излучением. *Астрон. ж.*, 1971, т. 48, вып. 3.
8. *Шварцман В. Ф.* О генерации релятивистских частиц нейтронными звездами, находящимися в состоянии аккреции, *Астрофизика*, 1970, т. 6, № 2.
9. *Ruffini R., Tiomno J., Vishveshwara C. V.* Electromagnetic field of particle moving in spherically symmetric black hole background. *Nuovo Cimento Lett.*, 1972, vol. 3.
10. *Ruffini R., Zerilli F. J.* Ultrarelativistic electromagnetic radiation in static geometries. *Black holes*, ed. by C. and B. S. De-Witt's, N. Y.—Les-Houches, 1972.
11. *Субгатуллин Н. Р.* Об эффектах рассеяния гравитационных и электромагнитных волновых пакетов в поле тяготения «черной дыры». Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 4.

УДК 534.231

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В СЛОЕ

Л. С. Метлов, В. Г. Пономаренко

(Донецк)

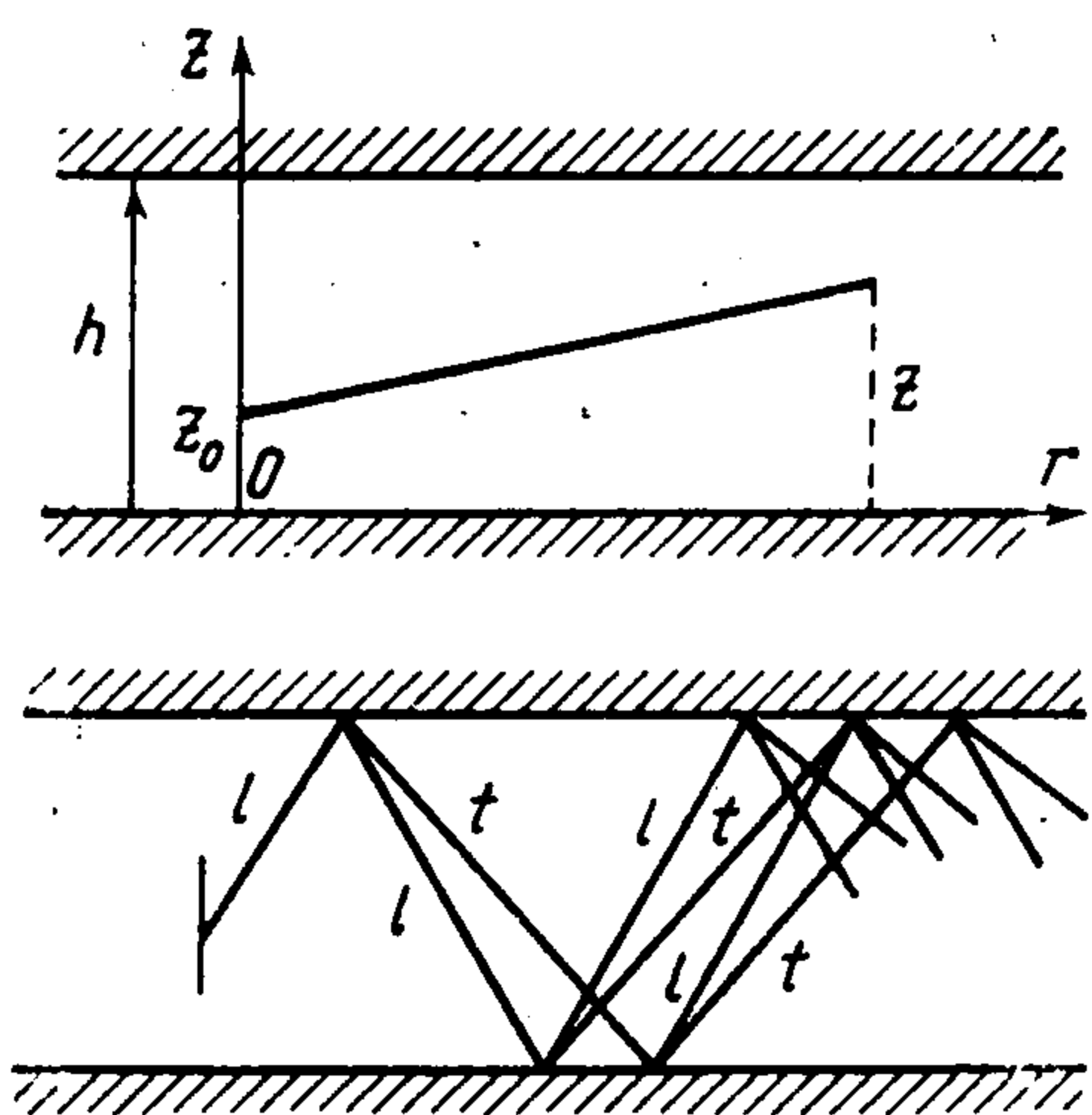
Рассматривается метод определения звукового поля в плоском слое, представляющий сочетание известного метода отраженных плоских волн с суммированием по графам. Это дает возможность сравнительно легко учесть сложную интерференционную картину, вызванную трансформацией различных волн на границах слоя и получить интегральные соотношения для звуковых потенциалов.

При стремлении толщины слоя к бесконечности получен переход к задаче об отражении звуковых волн на границе раздела двух сред. Исследуются потенциалы нормальных волн в случае гармонического источника в твердом слое.

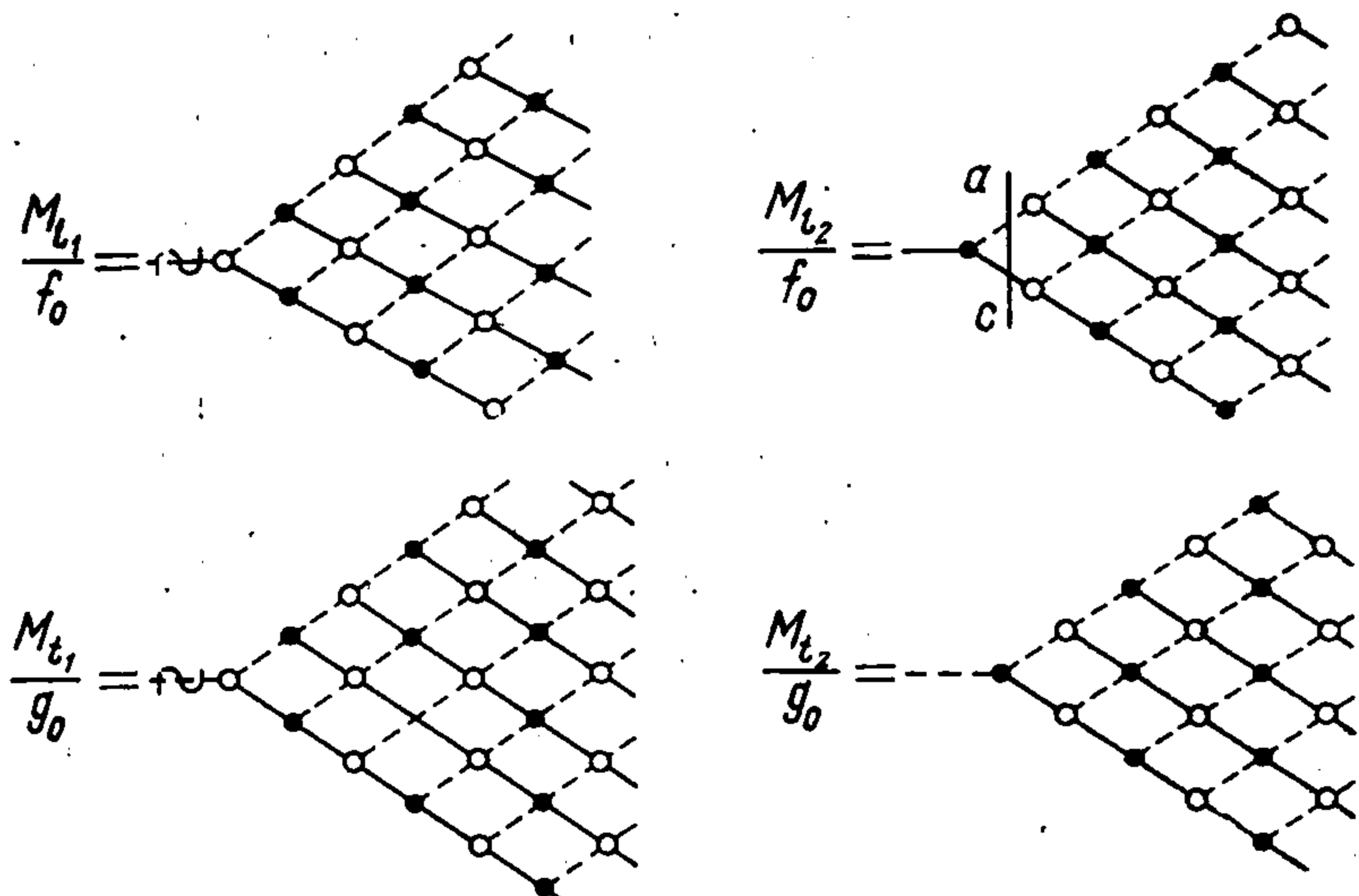
1. Основные соотношения. Как известно, поле точечного излучателя цилиндрической симметрии с осью, перпендикулярной плоскости слоя (фиг. 1), без учета вращающих касательных напряжений, приложенных к боковой поверхности цилиндра, описывается потенциалом ψ сдвиговых волн, поляризованных в плоскости падения, и потенциалом ϕ волн сжатия, которые удовлетворяют соответствующим волновым уравнениям [1-3]. Эти потенциалы разлагаются по плоским волнам наряду с разложением в интеграл Фурье их временной части и имеют вид

$$(1.1) \quad \varphi = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{ikct} dk \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} f_0(k, \vartheta) \exp \{ ik [x \sin \vartheta \cos \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi \pm (z - z_0) \cos \vartheta] \} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

(аналогичное выражение для ψ содержит функцию $g_0(k\vartheta)$ вместо $f_0(k\vartheta)$ и z -проекцию волнового вектора] $\kappa \cos \gamma$ вместо $k \cos \vartheta$ в показателе второй экспоненты). Здесь c — скорость волн сжатия в твердом теле, k, κ — волновые векторы соответственно продольных и сдвиговых волн. Углы ϑ и γ связаны соотношением $k \sin \vartheta = \kappa \sin \gamma$. Функции $f_0(k, \vartheta)$, $g_0(k, \vartheta)$ определяются из условий равновесия на границе излучателя и среды [1,4]. Знак плюс в экспоненте выбирается при $z - z_0 > 0$, знак минус — при $z - z_0 < 0$. Для определенности будем считать, что выполняется первое из этих неравенств.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Метод суммирования волн по графам. В работе [4] процесс распространения плоских волн в твердом слое графически изображен в виде схемы, приведенной на фиг. 2.

Ниже предлагается сопоставить каждому графу схемы реальные аналитические выражения и рассматривать их как суммы всех возможных плоских волн, получающихся при многократном отражении от границ слоя падающей волны. Действительно, используя лучевую картину многократного отражения плоских волн в упругом слое, анализ процесса их распространения можно провести методом графов. Для этого каждому лучу продольной или сдвиговой волн необходимо сопоставить соответственно сплошную или пунктирную линию и считать ее ребром графа, а точки поворота луча — граничными точками ребра или вершинами графа, которые на нижней границе обозначены темными, а на верхней — светлыми кружками. Тогда каждая конфигурация схемы является графом. Ставя в соответствие каждому ребру графа аналитическое выражение потенциала соответствующей плоской волны, а каждой вершине — коэффициент отражения этой волны, графу в целом будет сопоставлено аналитическое выражение суммарного потенциала плоских волн в упругом слое.

Существуют четыре графа такие, что сопоставленные им аналитические выражения

$$M_{l_1}, M_{l_2}, M_{t_1}, M_{t_2}$$

$$(M_{li}^{\circ} = M_{li}/f_0, M_{ti}^{\circ} = M_{ti}/g_0, i = 1, 2)$$

представляют сумму всех плоских волн, распространяющихся в слое с углами падения ϑ для продольных и γ для сдвиговых волн. Здесь и в дальнейшем величины, относящиеся к продольным волнам, обозначаем индексом l , а к поперечным — индексом t .

Разрезая любой из имеющихся графов у его вершины, получим три части, одна из которых представляет собой записанную в явном виде падающую волну, две оставшиеся являются графами того же типа, что и исходные. Фактически это означает, что вновь полученные графы представляют собой сумму всех плоских волн, если считать в них за «падающую» волну первую отраженную.

Подобная операция с остальными графами дает возможность связать их один с другим и получить для них замкнутую систему уравнений.

Разрез графа $M_{l_2}^\circ$ по линии ac (фиг. 2) дает справа сумму графов типа $M_{l_1}^\circ$ и $M_{t_1}^\circ$

$$(2.1) \quad M_{l_2}^\circ = F_l + V_{ll}^{(2)*} M_{l_1}^\circ + V_{lt}^{(2)*} M_{t_1}^\circ$$

$$(2.2) \quad F_l = \exp [b_l (z - z_0)] + V_{ll}^{(2)} \exp [b_l (2h - z - z_0)] + \\ + V_{lt}^{(2)} \exp [b_l (h - z_0) + b_t (h - z)]$$

$$V_{ll}^{(2)*} = V_{ll}^{(2)} \exp [2b_l (h - z_0)], \quad b_l = ik \cos \vartheta$$

$$V_{lt}^{(2)*} = V_{lt}^{(2)} \exp [(b_l + b_t) (h - z_0)], \quad b_t = ik \cos \gamma$$

Здесь $V_{ll}^{(i)}$, $V_{lt}^{(i)}$, $V_{tl}^{(i)}$, $V_{tt}^{(i)}$ — коэффициенты отражения плоских волн, причем индекс $i = 1$ относится к волнам, отраженным от нижней, а $i = 2$ — от верхней границ слоя [1, 3]. Слагаемые в правой части (2.2) соответствуют падающей и двум отраженным волнам.

Граф $M_{l_1}^\circ$ дает следующее уравнение:

$$M_{l_1}^\circ = V_{ll}^{(1)*} M_{l_2}^\circ + V_{lt}^{(1)*} M_{t_2}^\circ \\ V_{ll}^{(1)*} = V_{ll}^{(1)} \exp (2b_l z_0), \quad V_{lt}^{(1)*} = V_{lt}^{(1)} \exp [(b_l + b_t) z_0]$$

Отсутствие слагаемых, аналогичных F_l в уравнении (2.1), обусловлено тем, что падающая волна нереальна (прямая с тильдой на фиг. 2), а отраженные уже учитываются в $M_{l_2}^\circ$ и $M_{t_2}^\circ$ как падающие.

3. Общее решение системы. Применяя аналогичную процедуру к остальным графам, получим замкнутую систему уравнений относительно M_{li}° , M_{ti}° ($i = 1, 2$). Ее можно записать в матричной форме

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} F_l \\ 0 \\ F_t \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} M_{l_2}^\circ \\ M_{l_1}^\circ \\ M_{t_2}^\circ \\ M_{t_1}^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & V_{ll}^{(2)*} & 0 & V_{lt}^{(2)*} \\ V_{ll}^{(1)*} & -1 & V_{lt}^{(1)*} & 0 \\ 0 & V_{tl}^{(2)*} & -1 & V_{tt}^{(2)*} \\ V_{tl}^{(1)*} & 0 & V_{tt}^{(1)*} & -1 \end{pmatrix}$$

Выражения для $V_{tl}^{(i)*}$, $V_{tt}^{(i)*}$ получаются из $V_{ll}^{(i)*}$, $V_{lt}^{(i)*}$ взаимной заменой индексов l и t .

Решая эту систему линейных уравнений, получим

$$M_{l_1}^\circ = \Delta^{-1} (F_l T_l + F_t S_l), \quad M_{l_2}^\circ = \Delta^{-1} (F_l R_l + F_t Q_l) \\ T_l = V_{ll}^{(1)*} - V_{lt}^{(2)*} P(1), \quad S_l = V_{lt}^{(1)*} + V_{ll}^{(2)*} P(1) \\ R_l = 1 - V_{lt}^{(1)*} V_{tt}^{(2)*} + V_{lt}^{(1)*} V_{tl}^{(2)*} \\ Q_l = V_{lt}^{(2)*} V_{tl}^{(1)*} + V_{lt}^{(2)*} V_{tl}^{(1)*} \\ \Delta = 1 - V_{ll}^{(1)*} V_{ll}^{(2)*} - V_{lt}^{(1)*} V_{lt}^{(2)*} - V_{tl}^{(1)*} V_{tl}^{(2)*} - V_{lt}^{(1)*} V_{tl}^{(2)*} + P(1) P(2) \\ P(i) = V_{ll}^{(i)*} V_{lt}^{(i)*} - V_{lt}^{(i)*} V_{tl}^{(i)*}$$

Значения для $M_{t_1}^\circ$ и $M_{t_2}^\circ$ получаются из $M_{l_1}^\circ$ и $M_{l_2}^\circ$ заменой индекса l на t соответственно.

Каждый граф включает в себя суммы как продольных, так и сдвиговых волн, которые, однако, легко разделить, так как в точке (x, y, z) волны имеют перед координатой в экспонентах выражений для F_l и F_t волновые векторы соответствующего типа.

Суммарный потенциал плоских волн сжатия φ (ϑ, k, z, z_0) (без учета знаменателя Δ и зависимости от x, y) можно записать в виде

$$(3.2) \quad \varphi(\vartheta, k, z, z_0) = Z_l(z_0) \exp(b_l z) + Y_l(z_0) \exp(-b_l z)$$

в котором

$$(3.3) \quad \begin{aligned} Z_l(z_0) &= [f_0(T_l + R_l) + g_0(S_l + Q_l)] \exp(-b_l z_0) \\ Y_l(z_0) &= Z_l(z_0) V_{ll}^{(2)} \exp(2b_l h) + V_{ll}^{(2)} [f_0(S_l + Q_l) + \\ &+ g_0(T_l + R_l)] \exp[(b_l + b_l)h - b_l z_0] \end{aligned}$$

Выражение для суммарного потенциала плоских сдвиговых волн $\psi(\vartheta, k, z, z_0)$ получается взаимной заменой индекса l на t и f_0 на g_0 в уравнениях (3.2) и (3.3).

Потенциалы полного звукового поля продольных и сдвиговых волн в твердом слое имеют такой вид:

$$(3.4) \quad \varphi = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{ikct} dk \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} \frac{1}{\Delta} \varphi(\vartheta, k, z, z_0) H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$$

(выражение для ψ аналогично). Здесь $H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta)$ — функция Ханкеля первого рода.

Предельный переход к задаче об отражении волн от границы раздела двух сред получим, устремляя толщину слоя h к бесконечности. Полагая при этом, что волновой вектор имеет малую мнимую часть, в полученных выражениях можно пренебречь слагаемыми порядка $\exp(b_l h)$, $\exp(b_t h)$.

В результате получаем

$$\begin{aligned} \Delta &= 1, \quad Y_l = 0 \\ Z_l(z_0) &= f_0 [\exp(-b_l z_0) + V_{ll}^{(1)} \exp(b_l z_0) + g_0 V_{ll}^{(1)} \exp(b_t z_0)] \end{aligned}$$

и для потенциала продольных волн получим выражение, приведенное в [1].

4. Нормальные волны. Рассмотрим возмущения, связанные с полюсами подынтегральных функций в выражениях (3.4). Уравнение полюсов имеет вид $\Delta = 0$. Пусть $\vartheta = \vartheta_k$ — простые решения этого уравнения, тогда в случае гармонического режима излучения имеем

$$\varphi = \operatorname{Re} \sum_k \frac{\sin \vartheta_k \varphi(\vartheta_k, k, z, z_0)}{(d\Delta/d\vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_k}} H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta_k)$$

(выражение для ψ аналогично).

Учитывая (3.2), каждую нормальную волну можно представить как сумму плоских волн, бегущих в обратных направлениях вдоль оси z . На нижней границе слоя волны порядка $\exp(-b_l z)$, $\exp(-b_t z)$ — падающие, а волны порядка $\exp(b_l z)$, $\exp(b_t z)$ — отраженные. На верхней границе слоя картина будет обратная.

Используя граничные условия, получим соотношения для $Z_l(z_0)$, $Z_t(z_0)$, $Y_l(z_0)$, $Y_t(z_0)$, приведенные в [1].

Таким образом, полученные данным методом результаты совпадают с известными результатами для нормальных волн в твердом слое [1].

Поступила 18 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
2. Schwartz M. Graphical representation of plane elastic wave propagation in flat plates. J. Appl. Phys., 1969, vol. 40, No. 11, p. 4503—4506.
3. Heelan P. A. On the theory of head waves. Geophysics, 1953, vol. 18, No. 4, p. 871—893.
4. Heelan P. A. Radiation from a cylindrical source of finite length. Geophysics, 1953, vol. 18, No. 3, p. 685—693.