ЭФФЕКТ ВЗАИМОПРЕВРАЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В СИЛЬНЫХ ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ «ЧЕРНОЙ ДЫРЫ»

Г. А. Алексеев, Н. Р. Сибгатуллин

(Москва)

Показано, что поведение произвольной волны, распространяющейся в поле невращающейся заряженной черной дыры, описывается (с помощью квадратур) через четыре функции. Каждая из этих функций подчиняется своему уравнению второго порядка волнового типа. Короткие электромагнитные волны, падающие на черную дыру, отражаются ее полем в виде гравитационных и электромагнитных волн, амплитуды которых найдены явно. В случае, когда лучи, несущие волну, наматываются на предельный цикл, коэффициенты отражения и прохождения волн получены в аналитической форме.

Различные физические процессы, происходящие как внутри коллапсирующей звезды, так и вне ее, могут вызывать возмущения гравитационного, электромагнитного и других физических полей, приводить к появлению в окружающем пространстве волн различной природы, распространяющихся по искривленному фону и рассеивающихся на его неоднородностях.

При отсутствии у звезды вращения и заряда основой для анализа малых возмущений гравитационного поля служит система уравнений Эйнштейна, линеаризованная вокруг решения Шварцшильда. В работах [1, 2] эта система уравнений после разложения возмущений по сферическим гармоникам и преобразования Фурье по времени была сведена к двум независимым линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, имеющим вид стационарного уравнения Шредингера для частицы в потенциальном силовом поле. Каждое из рассматриваемых уравнений описывает один из двух возможных независимых типов возмущений — «четных» или «нечетных» (разбиение на типы производится в соответствии с различным поведением тензорных сферических гармоник при инверсии координат на сфере [1, 3]). Хотя эти уравнения были получены при наложении на возмущения метрики определенных координатных условий, как показано в [4], они описывают поведение инвариантов возмущенного гравитационного поля, что придает входящим в уравнения потенциальным барьерам инвариантный смысл.

Система уравнений Максвелла на фоне решения Шварцшильда также приводится к двум подобным уравнениям, отличающимся от предыдущих лишь формой входящих в них потенциальных барьеров [5].

При наличии в невозмущенном решении сильного электромагнитного поля гравитационные и электромагнитные волны взаимодействуют между собой, происходит их взаимное превращение. Цуг периодических коротких электромагнитных волн порождает сопутствующий ему цуг гравитационных волн. Это явление на произвольном фоне было впервые изучено в [6]. В работах [7, 8] указывалось, что компактные звезды, окруженные горячей плазмой, могут приобрести заряд благодаря разделению зарядов лучистым давлением и «выметанию» позитронов в рождающихся в сильных электростатических полях парах. Взаимодействие волн особенно ярко проявляется в окрестности заряженных черных дыр, которые могут служить «клапанами», поддерживающими равновесие между реликтовым электромагнитным и гравитационным излучением во Вселенной. Вращение черных дыр усиливает этот эффект [6].

Если невращающаяся звезда обладает электростатическим зарядом, то при описании возмущений электромагнитного и гравитационного полей необходимо исходить из полной системы уравнений Эйнштейна — Максвелла, линеаризованной около решения Нордстрема — Рейсснера. (В работах [9, 10] малые возмущения электромагнитного поля вне заряженной черной дыры рассматривались на основе систем уравнений Максвелла, на «жестком» фоне решения Нордстрема — Рейснера. При этом не учитывалось взаимное превращение гравитационных и электромагнитных волн, существенно влияющее на их поведение вблизи заряженной черной дыры.) В данной работе эта система уравнений, описывающая взаимодействующие гравитационные и электромагнитные возмущения, сводится к четырем независимым дифференциальным уравнениям второго порядка — по два уравнения для каждого типа возмущений (существенную роль здесь играют координатные условия на возмущения метрики, предложенные авторами в [4]). По решениям этих уравнений компоненты возмущений метрики и электромагнитного поля определяются в квадратурах. При заряде звезды, стремящемся к нулю, два из полученных уравнений переходят в уравнения для гравитационных волн на фоне решения Шварцшильда [1, 2], а два других — в уравнения, эквивалентные уравнениям Максвелла на этом фоне. Найдена также коротковолновая асимптотика решений полученных уравнений всюду, включая окрестность предельного цикла для лучей, несущих волну. Эти решения вдали от точек поворота совпадают с решениями, полученными в [6] для произвольного фона. Приближение геометрической оптики не дает правильной асимптотики для прицельных параметров лучей, близких к критическому, для которых изотропные геодезические наматываются на предельный цикл. Ниже проводится исследование этого случая.

Аналогичная ситуация в поле Шварцшильда была изучена в [11], где были найдены в аналитической форме коэффициенты прохождения и отражения волн и был подсчитан интегральный поток излучения, захватываемого черной дырой от другой излучающей компоненты в двойной системе.

1. Вывод базисных уравнений. Внешнее поле невращающейся заряженной сферически-симметричной черной дыры описывается, как известно, электровакуумным решением Нордстрема — Рейсснера (Q — заряд, M — масса черной дыры)

$$ds^2 = e^{\nu}c^2dt^2 - e^{-\nu}dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1.1}$$
$$F_{0r} = -E,\ E = Q/r^2,\ \ m = \gamma M/c^2,\ q^2 = \gamma Q^2/c^4,\ e^{\nu} = 1 - 2m/r + q^2/r^2$$

1.1. Используемые обозначения и соотношения. Индексы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 0,\ 1$; $a, b, c, \ldots = 2,\ 3$; $i, j, k, \ldots = 0, 1, 2, 3$; координаты $x^0 = ct,\ \ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$; $g_{\alpha\beta}$, g_{ab} — метрические тензоры на координатных поверхностях $(x^0,\ x^1)$, $(x^2,\ x^3)$ соответственно, индуцируемые метрикой g_{ij} решения (1.1). Поднятие и опускание индексов α, $\beta, \ldots$ и a, $b, \ldots$ производится с помощью метрик $g_{\alpha\beta}$ и g_{ab} соответственно. ∇_α, ∇_a — операторы ковариантного дифференцирования на координатных поверхностях $(x^0,\ x^1)$, $(x^2,\ x^3)$, построенные по метрикам $g_{\alpha\beta}$ и g_{ab}; $\alpha_{\alpha\beta}$, β_{ab} — тензоры Леви-Чивита на этих поверхностях. Ненулевые компоненты тензора Максвелла для решения Нордстрема — Рейсснера

$$F_{\alpha\beta} = -\alpha_{\alpha\beta}E, \quad \mu = \ln r^2, \quad \mu_\alpha = \nabla_\alpha\mu, \quad \nabla_\alpha E = -\mu_\alpha E$$
$$\Box_{01} = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta, \quad \Box_{23} = g^{ab}\nabla_a\nabla_b = -\Delta/r^2$$

где Δ — оператор Лапласа на двумерной сфере единичного радиуса.

Возмущения метрики h_{ik} относительно преобразования координат на сфере распадаются на совокупность скаляров h_{00}, h_{01}, h_{11}, векторов h_{0a}, h_{1a} и тензор h_{ab}. Скаляры $h_{\alpha\beta}$ принадлежат к четному типу возмущений. Векторы $h_{\alpha a}$ ($h_{\alpha a}$ означает совокупность двух векторов: h_{0a} и h_{1a}) и тензор h_{ab} можно представить в виде

$$h_{\alpha a} = \beta_{ab}\nabla^b h_\alpha + \nabla_a H_\alpha, \quad h_{ab} = \beta_{ac}\nabla_b\nabla^c D + \beta_{bc}\nabla_a\nabla^c D + \nabla_a\nabla_b G + g_{ab}K$$

где h_α, H_α, G, D, K — скалярные функции. Слагаемые, содержащие β_{ab}, соответствуют нечетной составляющей возмущений, остальные — четной. Аналогичное разбиение на составляющие различной четности можно провести и для возмущений компонент тензора Максвелла (формулы даны ниже).

1.2. Координатные условия. На произвольные малые возмущения метрики h_{ik} могут быть наложены координатные условия, удовлетворить которые можно определенным выбором инфинитезимального преобразования координат: $x^{i'} = x^i + \xi^i\,(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$. При этом преобразовании h_{ik} меняются так: $h_{ik}' = h_{ik} - \nabla_i\xi_k - \nabla_k\xi_i$. 4-вектор ξ_i также можно разбить на составляющие: скаляры ξ_0, ξ_1 и вектор $\nabla_a\xi$ — четные и вектор $\beta_{ab}\nabla^b\eta$ — нечетный. Четная составляющая вектора ξ_i содержит три произвольные функции (ξ_0, ξ_1, ξ), а нечетная — одну (η). Поэтому на четные возмущения можно наложить три условия, а на нечетные — одно.

Наложим следующие координатные условия:

$$h_\alpha^{\alpha\prime} \equiv h_0^{0\prime} + h_1^{1\prime} = 0, \qquad h_{ab}{}' = 0 \tag{1.2}$$

Тогда из (1.2) для скалярных функций получим

$$\eta = D, \; \xi = G / 2, \; \xi^1 = Kr / 2, \; (\partial / c\partial t)\, \xi^0 + (\partial / \partial r)\, \xi^1 = h_\alpha^\alpha / 2$$

Здесь учтен конкретный вид метрики (1.1). Видно, что необходимые для удовлетворения условий (1.2) ξ^i определяются по возмущениям метрики в квадратурах и, следовательно, наложенные координатные условия всегда могут быть удовлетворены.

В дальнейшем будет использовано, что величины $h_{\alpha\beta}$, h_α, H_α являются тензорами относительно преобразования координат на поверхности (x_0, x^1).

1.3. Нечетные возмущения. При выполнении координатных условий (1.2) нечетные возмущения компонент метрического тензора имеют вид

$$h_{\alpha\beta} = 0, \qquad h_{\alpha a} = \beta_{ab}\nabla^b h_\alpha, \qquad h_{ab} = 0 \tag{1.3}$$

Возмущения компонент тензора Максвелла F_{ik} и дуального ему тензора $F^*_{ik} = {}^1/_2\, \varepsilon_{iklm}F^{lm}$

$$\begin{gathered} \delta F^{\alpha\beta} = 0, \qquad \delta F^{\alpha a} = \beta^{ab}\nabla_b F^\alpha, \qquad \delta F^{ab} = \beta^{ab}\delta H \\ \delta \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = \alpha^{\alpha\beta}\delta H, \qquad \delta \overset{*}{F}{}^{\alpha a} = \nabla^a (\alpha^{\alpha\beta} F_\beta - E h^\alpha), \qquad \delta \overset{*}{F}{}^{ab} = 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

1.3.1. Уравнения Максвелла для возмущений. При условиях (1.2) определитель g метрического тензора остается невозмущенным и уравнения Максвелла для возмущений принимают вид

$$(1 / \sqrt{-g})\, \partial_j (\sqrt{-g}\, \delta F^{ij}) = 0, \qquad (1 / \sqrt{-g})\, \partial_j (\sqrt{-g}\, \delta \overset{*}{F}{}^{ij}) = 0 \tag{1.5}$$

Используя введенные обозначения, эти уравнения можно представить в виде

$$\begin{gathered} \nabla_\beta F^\beta = \delta H, \qquad \alpha^{\alpha\beta}\nabla_\alpha F_\beta + E\mu^\alpha h_\alpha = 0 \\ \nabla_\beta \delta H + \mu_\alpha \delta H + \Box_{23} (F_\beta - E\alpha_{\beta\gamma} h^\gamma) = 0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

Применим оператор ∇^β к последнему из уравнений (1.6) и, исключая F_β с помощью остальных уравнений (1.6), получим

$$\Box_{01} (\delta H / E) + \Box_{23} (\delta H / E) = -\Delta\, [\alpha^{\alpha\beta}\nabla_\alpha (h_\beta / r^2)] \tag{1.7}$$

1.3.2. Возмущения компонент тензора энергии — импульса. Возмущения электромагнитного поля (1.4) приводят к появлению возмущений компонент тензора энергии — импульса

$$\begin{gathered} \delta T_{\alpha\beta} = 0, \qquad \delta T_{ab} = 0 \\ \delta T_{\alpha a} = \beta_{ab}\nabla^b\, [\varepsilon h_\alpha - (E / 4\pi)\, \alpha_{\alpha\beta} F^\beta], \qquad \varepsilon = E^2 / 8\pi \end{gathered} \tag{1.8}$$

1.3.3. Линеаризованные уравнения Эйнштейна. Возмущения компонент тензора Риччи, обусловленные возмущениями метрики (1.3), имеют вид

$$\begin{aligned} &\delta R_{\alpha\beta} = 0 \\ &2\delta R_{\alpha a} = -\beta_{ab}\nabla^b\, [\Box_{01} h_\alpha + \Box_{23} h_\alpha - \nabla_\alpha\nabla_\beta h^\beta + \mu_\alpha\nabla_\beta h^\beta - {}^1/_2 R_* h_\alpha - \\ &\quad - \nabla_\alpha (\mu_\beta h^\beta) + (2\nabla_\alpha\mu_\beta + \mu_\alpha\mu_\beta)\, h^\beta], \qquad R_* = (\partial^2 / \partial r^2)\, e^\nu / 2 \\ &2\delta R_{ab} = \beta_{ac}\nabla_b\nabla^c\nabla_\alpha h^\alpha + \beta_{bc}\nabla_a\nabla^c\nabla_\alpha h^\alpha \end{aligned} \tag{1.9}$$

где R_* — скаляр кривизны для метрики $g_{\alpha\beta}$. В силу уравнений Эйнштейна из (1.8) и (1.9) имеем

$$\nabla_\alpha h^\alpha = 0 \tag{1.10}$$

$$\Box_{01} h_\alpha + \Box_{23} h_\alpha - \nabla_\alpha (\mu_\beta h^\beta) + (2\nabla_\alpha \mu_\beta + \mu_\alpha \mu_\beta) h^\beta - {}^1\!/_2 R_* h_\alpha = \\ = (\varkappa\varepsilon / 2\pi)\, \alpha_{\alpha\beta} F^\beta - 2\varkappa\varepsilon h_\alpha \tag{1.11}$$

В (1.11) опущены члены, исчезающие в силу (1.10). Свернем (1.11) с μ^α, применим к обеим частям оператор Лапласа и с помощью (1.6) исключим из правой части F^β. Получим

$$\Box_{01} h + \Box_{23} h + [{}^3\!/_2 R_* - 5\varkappa\varepsilon]\, h = 4\varkappa\varepsilon r^2 \alpha^{\alpha\beta} \mu_\alpha \nabla_\beta (\delta H / E), \quad h = \Delta \mu_\alpha h^\alpha \tag{1.12}$$

1.3.4. Замкнутая система уравнений. Рассмотрим уравнение (1.7) и, используя (1.10) — (1.12), выразим его правую часть через h. Для этого применим к (1.7) оператор $r\alpha^{\alpha\beta}\mu_\alpha \nabla_\beta$, который в координатах (ct, r, θ, φ) сводится к $-2\partial / c\partial t$ и, следовательно, перестановочен со всеми остальными операторами дифференцирования. Получим

$$\Box_{01}\varphi + \Box_{23}\varphi + 4\varkappa\varepsilon\varphi + (\Delta + 2)\, h / r^3 = 0, \quad \varphi = r\alpha^{\alpha\beta}\mu_\alpha \nabla_\beta (\delta H / E) \tag{1.13}$$

При этом (1.12) примет вид

$$\Box_{01} h + \Box_{23} h + [({}^3\!/_2) R_* - 5\varkappa\varepsilon] h = 4\varkappa\varepsilon r\varphi \tag{1.14}$$

Уравнения (1.13) и (1.14) образуют замкнутую систему. По их решениям компоненты возмущений электромагнитного и гравитационного полей определяются из оставшихся уравнений Эйнштейна и Максвелла в виде рядов по сферическим функциям, причем коэффициенты этих разложений вычисляются в квадратурах.

В координатах (ct, r, θ, φ) эти уравнения принимают вид $(\Delta = -l(l+1)$, $l \geqslant 2$, так как при $l = 0, 1$ вывод уравнений теряет силу)

$$Lh = -6\,(m / r^3)\, h - 4\,(q^2 / r^3)\, \varphi, \qquad L\varphi = (\Delta + 2)\, h / r^3 \\ r^* = \int e^{-\nu}\, dr, \qquad L = -\Box_{01} - \Box_{23} - 4q^2 / r^4 \tag{1.15}$$

Оказывается возможным ввести новые переменные η_+ и η_- по формулам

$$\eta_\pm = C_\pm h + 4q^2\varphi, \qquad C_\pm = 3m \pm \sqrt{9m^2 - 4q^2(\Delta + 2)} \tag{1.16}$$

такие, что система (1.15) распадается на два независимых уравнения второго порядка, каждое из которых содержит только одну неизвестную (знак плюс или минус выбирается соответствующим неизвестной η_+ или η_-)

$$(\partial^2 / \partial r^{*2} - \partial^2 / c^2\partial t^2)\, \eta_\pm + (\Delta / r^2 + C_\pm / r^3 - 4q^2 / r^4)\, (1 - 2m / r + \\ + q^2/r^2)\eta_\pm = 0 \tag{1.17}$$

1.4. Четные возмущения. Аналогичная процедура оказывается возможной и для четных возмущений. При координатных условиях (1.2) имеем следующие ненулевые компоненты четных возмущений метрики, а также тензора Максвелла и дуального ему тензора

$$h_{\alpha\beta} \quad (h_\alpha{}^\alpha = 0), \qquad h_{a\alpha} = \nabla_a H_\alpha \\ \delta F^{\alpha\beta} = -\alpha^{\alpha\beta}\delta E, \qquad \delta F^{a\alpha} = \nabla^a f^\alpha, \qquad \delta F^{ab} = 0 \\ \delta \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = 0, \qquad \delta \overset{*}{F}{}^{a\alpha} = -\beta^{ab}\nabla_b (\alpha^{\alpha\beta} f_\beta - EH^\alpha), \qquad \delta \overset{*}{F}{}^{ab} = \beta^{ab}\delta E$$

1.4.1. Уравнения Максвелла для возмущений. Для четных возмущений запишем уравнения (1.5)

$$\nabla_\beta f^\beta = 0, \quad \Delta f^\alpha + \alpha^{\alpha\beta}\nabla_\beta (r^2\delta E) = 0, \quad \alpha^{\alpha\beta}\nabla_\alpha f_\beta + E\mu_\alpha H^\alpha + \delta E = 0 \tag{1.18}$$

По аналогии с нечетными, исключая f^α, получим из (1.18)

$$\Box_{01}\Psi + \Box_{23}\Psi - \Delta\,(\mu_\alpha H^\alpha / r^2) = 0, \quad \Psi = \delta E / E \tag{1.19}$$

Кроме того, ниже будет использовано равенство, вытекающее из (1.18)

(1.20) $$\Delta\alpha^{\alpha\beta}\mu_\alpha f_\beta = -\mu^\alpha\nabla_\alpha\Psi$$

1.4.2. Возмущения компонент тензора энергии — импульса.

(1.21) $$\begin{aligned}&\delta T_{\alpha\beta} = (E\delta E/4\pi)\, g_{\alpha\beta} + \varepsilon h_{\alpha\beta}\\&\delta T_{\alpha a} = \nabla_a[-(E/4\pi)\,\alpha_{\alpha\beta}f^\beta + \varepsilon H_\alpha]\\&\delta T_{ab} = -(E\delta E/4\pi)\, g_{ab}\end{aligned}$$

1.4.3. Линеаризованные уравнения Эйнштейна. Возмущения компонент тензора Риччи

(1.22) $$\begin{aligned}&2\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\gamma(\nabla_\alpha h_\beta{}^\gamma + \nabla_\beta h_\alpha{}^\gamma - \nabla^\gamma h_{\alpha\beta}) + \mu_\gamma(\nabla_\alpha h_\beta{}^\gamma + \nabla_\beta h_\alpha{}^\gamma - \nabla^\gamma h_{\alpha\beta}) +\\&+ \Box_{23}(\nabla_\alpha H_\beta + \nabla_\beta H_\alpha - h_{\alpha\beta})\\&2\delta R_{\alpha a} = \nabla_a[-\Box_{01}H_\alpha + \nabla_\alpha(\mu_\beta H^\beta) - (2\nabla_\alpha\mu_\beta + \mu_\alpha\mu_\beta)H^\beta + \nabla_\beta h_\alpha{}^\beta + (1/2)\, R_* H_\alpha]\\&2\delta R_{ab} = g_{ab}[\nabla_\alpha(\mu_\beta h^{\alpha\beta}) + \mu_\alpha\mu_\beta h^{\alpha\beta} + \Box_{23}(\mu_\alpha H^\alpha)] + 2\nabla_a\nabla_b\nabla_\alpha H^\alpha\end{aligned}$$

Для четных возмущений преобразования удобно проводить, записывая все уравнения в координатах (ct, r, θ, φ). В силу уравнений Эйнштейна из (1.21) и (1.22) при учете (1.20) следует

(1.23) $$\begin{aligned}&(\partial^2/\partial r^{*2} - \partial^2/c^2\partial t^2)\, H + (6m/r^3 - 8q^2/r^4)\, e^\nu H + (2\Delta/r)\,[(\partial/c\partial t)h_0{}^1 +\\&+ (\partial/\partial r^*)\, h_{00}] = -8\varkappa\varepsilon r e^\nu(\partial/\partial r^*)\,\Psi\\&(2/r)(\partial/c\partial t)\, h_0{}^1 + (2/r^2)(\partial/\partial r^*)(h_{00}r) - e^\nu H/r^2 = -4\varkappa\varepsilon e^\nu\Psi\\&(2/r)(\partial/c\partial t)\, h_{00} - (1/2r)(\partial/c\partial t)\, H + (\Delta/r^2)\,[e^\nu(\partial/\partial r^*)\, H^0 + h_0{}^1] = 0\\&(2/r)(\partial/c\partial t)\, h_0{}^1 + (1/r^2)(\partial/\partial r^*)(rH) + \Delta h_{00}/r^2 - (\nu'/2r)\, e^\nu H = 0\\&(\partial/\partial r)H^1 + (\partial/c\partial t)\, H^0 = 0\\&(\Delta = -l(l+1),\quad l \geqslant 2,\quad H = 2\Delta H^1/r = \Delta\mu_\alpha H^\alpha,\quad \nu' = d\nu/dr)\end{aligned}$$

Вывод этих уравнений вполне аналогичен приведенному подробно в [4] выводу уравнений для четных возмущений гравитационного поля на фоне метрики Шварцшильда.

1.4.4. Замкнутая система уравнений. Введем новые переменные

$$M = rh_{00} - Hr/2,\quad N = \Delta h_{00} + (1 - 3m/r + 2q^2/r^2)\, H$$

и, исключая из второго и четвертого уравнений (1.25) $h_0{}^1$, получим

(1.24) $$2(\partial/\partial r^*)\, M = N - 4\varkappa\varepsilon r^2 e^\nu\Psi$$

Из уравнений (1.25) следует

(1.25) $$\begin{aligned}&(\partial/\partial r^*)\, N/2 - (\partial^2/c^2\partial t^2)\, M + e^\nu\Delta M/r^2 - (2e^\nu/rp(r))(3m/r -\\&- 4q^2/r^2)(N - \Delta M/r) - 2\varkappa\varepsilon r^2 e^\nu(\partial/\partial r^*)\,\Psi = 0\\&(p(r) = \Delta + 2 - 6m/r + 4q^2/r^2)\end{aligned}$$

Из (1.24), (1.25) исключим N и, после замены $M = Qp(r)$, получим

(1.26) $$\begin{aligned}&(\partial^2/\partial r^{*2} - \partial^2/c^2\partial t^2)\, Q + [\Delta/r^2 + (6m/r - 4q^2/r^2)\, U(r)/r^2 +\\&+ 8q^2e^\nu/r^4p(r)]\, e^\nu Q + 2\varkappa\varepsilon r e^\nu U(r)\,\Psi = 0\\&U(r) = (\Delta^2 - 4 + 12m/r - 12m^2/r^2 + 4mq^2/r^3)/p^2(r)\end{aligned}$$

В новых переменных уравнение (1.19) принимает вид

(1.27) $$\begin{aligned}&(\partial^2/\partial r^{*2} - \partial^2/c^2\partial t^2)\,\Psi + [\Delta/r^2 + 8e^\nu q^2/r^4p(r)]\, e^\nu\Psi +\\&+ (4e^\nu/r^2)(\partial/\partial r^*)\, Q + [4e^\nu(3m/r - 4q^2/r^2)/p(r) - \Delta]\,(2e^\nu/r^3)\, Q = 0\end{aligned}$$

Уравнения (1.26) и (1.27) образуют замкнутую систему, причем по решениям этой системы все компоненты возмущений определяются в квадратурах. Эта система, как и система (1.15), распадается на два независимых уравнения при введении новых переменных (определение $C_\pm$ дано в (1.16))

(1.28) $$\chi_\pm = (C_\pm - 4q^2 / r)\, Q + 2q^2\Psi$$

Переменные $\chi_\pm$ удовлетворяют уравнениям

(1.29) $$(\partial^2 / \partial r^{*2} - \partial^2 / c^2\partial t^2)\, \chi_\pm + [\Delta / r^2 + (c_\pm - 4q^2 / r)\, (\Delta^2 - 4 + 12m / r - 12m^2 / r^2 + 4mq^2 / r^3) / r^3\, (\Delta + 2 - 6m / r + 4q^2 / r^2)^2 + 8e^\nu q^2 / r^4 \times (\Delta + 2 - 6m / r + 4q^2 / r^2)]\, e^\nu \chi_\pm = 0$$

2. Распространение коротких волн в поле Нордстрема — Рейсснера. Эффект взаимовлияния электромагнитных и гравитационных волн особенно ярко проявляется для малых длин волн. В этом случае отношение номера сферической гармоники l к частоте ω имеет смысл прицельного параметра луча, несущего волну. Удерживая в потенциальных барьерах (1.17), (1.29) первые два члена разложения по обратным степеням ω, получим

(2.1) $$(d^2 / dr^{*2})\, \zeta_\pm + \omega^2\, [1 - e^\nu p^2 / r^2 \pm 2e^\nu qp / \omega r^3]\, \zeta_\pm = 0, \quad p = l / \omega, \quad \zeta_\pm = \eta_\pm, \chi_\pm$$

ВКБ-решения уравнений (2.1) (главные члены разложений решений по обратным степеням ω) даются формулами

(2.2) $$\zeta_\pm = A_\pm V\,(r)^{-1/4} \exp\,[i\omega\,\alpha\,(r_0^*, r^*) \mp i\beta\,(r_0, r)]$$

$$V(r) = 1 - \frac{e^\nu p^2}{r^2}, \qquad \alpha\,(r_0^*, r^*) = \int\limits_{r_0^*}^{r^*} \sqrt{V(r)}\, dr^*$$

$$\beta\,(r_0, r) = qp \int\limits_{r_0}^{r} \frac{1}{r^3 \sqrt{V(r)}}\, dr$$

Воспользовавшись формулами (1.16) для выражения возмущения h гравитационного поля и возмущения φ электромагнитного поля через ζ_+ и ζ_-, из (2.2) получим

(2.3) $$i\omega p \begin{Bmatrix} 4q\varphi \\ ph \end{Bmatrix} = V\,(r)^{-1/4} \exp\,[i\omega\alpha\,(r_0^*, r^*)]\, \{A_+ \exp\,[i\beta\,(r_0, r)] \pm A_- \exp\,[-i\beta\,(r_0, r)]\}$$

Из (2.2), (1.28) следуют аналогичные выражения и для четных возмущений. Эти результаты можно получить и на основе общего подхода работы [6].

Для фиксированного прицельного параметра p, большего некоторого критического p_*, уравнение $V\,(r) = 0$ определяет радиусы максимального приближения луча из $r^* = +\infty$ к черной дыре (r_a) и максимального удаления луча из $r^* = -\infty$ от нее (r_b). Асимптотики (2.3) неверны в окрестности этих точек поворота. Однако при конечном расстоянии между корнями функции $V\,(r)$ волна почти идеально отражается от первой встречной точки поворота с изменением фазы на $\pi / 2$; коэффициент прохождения в этом случае экспоненциально мал

$$T \approx \exp\,[(i\omega\, / 2)\, \alpha\, (r_a^*, r_b^*)]$$

Длина периода взаимной модуляции волн растет с увеличением r, что видно из выражения для λ : $\beta\,(r, r + \lambda) = 2\pi$. Поэтому эффект взаимопревращения волн отсутствует на больших расстояниях от черной дыры, где электромагнитные и гравитационные волны распространяются независимо одна от другой.

Когда на черную дыру падает только электромагнитная или только гравитационная волна, то $|A_+| = |A_-|$. Эта волна, испытав несколько актов полных взаимопревращений в гравитационную и электромагнитную, после идеального отражения приходит на $+\infty$ в виде совокупности электромагнитной и гравитационной волн. Если из $r^* = +\infty$ вначале падала чисто электромагнитная волна $\varphi = a_0 \exp\,(i\omega r^*)$, то в отраженной волне амплитуда φ равна $|a_0 \cos 2\beta\,(r_a, \infty)|$, а амплитуда h равна $|(4q / p)\, a_0 \sin 2\beta\,(r_a, \infty)|$. В общем случае, когда $|A_+| \neq |A_-|$, на длине периода модуляции λ волны испытывают лишь частичное взаимопревращение, изменяясь, например, при падении электромагнитной волны, от минимального значения B_- до максимального B_+, где $B_\pm = \| A_+ | \pm \pm | A_- \| / 4q\, p\omega V^{1/4}$. Подчеркнем, что суммарная энергия волн во всех случаях такой периодической взаимоперекачки остается неизменной.

Для прицельных параметров $p < p_*$ волны полностью захватываются черной дырой, так как при конечном различии комплексных корней уравнения $V(r) = 0$ коэффициент отражения становится экспоненциально малым [11].

Заряженные черные дыры поглощают энергию реликтового излучения во Вселенной в виде электромагнитных и гравитационных волн соответственно с амплитудами $a_0 \cos\beta(r_1, \infty) |$ и $| (4q / p)\, a_0 \sin\beta(r_1, \infty) |$, где r_1 — внешний гравитационный радиус черной дыры, a_0— амплитуда падающей из $+\infty$ электромагнитной волны.

Особенно интересен случай $p \approx p_*$: для прицельных параметров l / ω, отличающихся от критического на величину порядка ω^{-1} для коротких волн, коэффициенты отражения и прохождения становятся сравнимыми между собой [11]. При $p = p_*$ уравнение $V(r) = 0$ имеет кратный корень, соответствующий лучу, наматывающемуся на предельный цикл. Обозначим $\delta = \sqrt{1 - q^2 / m^2}$. Тогда замкнутые круговые орбиты частиц с нулевой массой (фотонов) будут иметь радиусы $r_* = m\,(3 + \sqrt{(1 + 8\delta^2)} / 2)$. Прицельный параметр лучей, наматывающихся на эти круговые орбиты

$$p_* = m\,[4\delta^2 + 10 + 4\sqrt{1 + 8\delta^2} + (1/2\delta^2)\,(\sqrt{1 + 8\delta^2} - 1)]^{1/2}$$

Когда черная дыра электрически нейтральна, $r_* = 3m$, $p_* = \sqrt{27}\, m$. Если заряд ее равен массе, то $r_* = 2m$, $p_* = 4\, m$. Формально уравнение $V(r) = 0$ имеет кратный корень, и под внутренним горизонтом событий $r_2 = m\,(1 - \delta)$, однако соответствующие прицельные параметры оказываются мнимыми.

В окрестности замкнутого луча $| r - r_* | \sim O(1 / \omega)$ для прицельных параметров, близких к критическому $| p - p_* | \sim O(1 / \omega)$, уравнения (2.1) сводятся к уравнению параболического цилиндра

$$(r_* / p_*)^4 (d^2 / dr^{*2})\, \zeta_\pm + \\ + \omega^2 [(r - r_*)^2 (6r_*^2 - p_*^2) / r_*^4 + 2\,(p_* - p) / p_* \pm 2q / \omega p_* r_*]\, \zeta_\pm = 0 \tag{2.4}$$

Делая в (2.4) замену переменной $\xi = \sqrt{\omega p_*}\, (6r_*^2 - p_*^2)^{1/4} (r - r_*) / r_*^2$, получаем уравнение Вебера в каноническом виде

$$(d^2 / d\xi^2)\, \zeta_\pm + (\xi^2 + a_\pm(q))\, \zeta_\pm = 0$$
$$a_\pm(q) = 2\omega p_* (6r_*^2 - p_*^2)^{-1/2} (p_* - p \pm q / \omega p_* r_*)$$

С помощью теории вырожденной гипергеометрической функции можно доказать, что аналитическое продолжение решения, соответствующего прошедшей волне, приводит к сумме двух волн: падающей и отраженной. Коэффициент прохождения T по модулю равен $[\exp(-\pi a) + 1]^{-1/2}$, а модуль коэффициента отражения R равен $[\exp(\pi a) + 1]^{1/2}$. Поэтому соотношение модулей A_- и A_+ в ВКБ-решениях (2.3) в отраженной волне по сравнению с падающей меняется так:

$$(| A_- | / | A_+ |)_R = (| A_- | / | A_+ |)\, [\exp(\pi a_-) + 1]^{1/2} [\exp(\pi a_+) + 1]^{-1/2}$$

а в прошедшей волне

$$(| A_- | / | A_+ |)_T = (| A_- | / | A_+ |)\, [\exp(-\pi a_+) + 1]^{1/2} [\exp(-\pi a_-) + 1]^{-1/2}$$

В заключение отметим космологический аспект полученных результатов. Заряженные черные дыры могут быть своеобразными клапанами, регулирующими равновесие реликтового излучения черного тела и гипотетического гравитационного излучения во Вселенной.

Авторы благодарят Л. И. Седова за ценные замечания.

Поступила 20 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Regge T., Wheeler J. A.*, Stability of a Schwarzshild singularity. Phys. Rev., 1957, vol. 108, N 4.
2. *Zerilli F. J.* Gravitational field of a particle falling in a Shwarzshild geometry analyzed in tensor harmonics. Phys. Rev., 1970, vol. 2, N 10.
3. *Zerilli F. J.* Tensor harmonics in canonical form for gravitational radiation and other applications, J. Math. Phys., 1970, vol. 11, № 7.
4. *Сибгатуллин Н. Р., Алексеев Г. А.* Гравитационные волны в поле коллапсирующей звезды. В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц, вып. 5, М., Атомиздат, 1973.
5. *Price R. H.* Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. Phys. Rev., 1972, vol. 5, N 10.
6. *Сибгатуллин Н. Р.* Взаимодействие коротких гравитационных и электромагнитных волн в произвольных внешних электромагнитных полях. ЖЭТФ, 1974, т. 66, вып. 4.
7. *Левич Е. В., Сюняев Р. А.* Нагрев газа вблизи квазаров, ядер сейфертовских галактик и пульсаров низкочастотным излучением. Астрон. ж., 1971, т. 48, вып. 3.
8. *Шварцман В. Ф.* О генерации релятивистских частиц нейтронными звездами, находящимися в состоянии аккреции, Астрофизика, 1970, т. 6, № 2.
9. *Ruffini R., Tiomno J., Vishveshwara C. V.* Electromagnetic field of particle moving in spherically symmetric black hall background. Nuovo Cimento Lett., 1972, vol. 3.
10. *Ruffini R., Zerilli F. J.* Ultrarelativistic electromagnetic radiation in static geometries. Black halles, ed. by C. and B. S. De-Witt's, N. Y.— Les-Houches, 1972.
11. *Сибгатуллин Н. Р.* Об эффектах рассеяния гравитационных и электромагнитных волновых пакетов в поле тяготения «черной дыры». Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 4.

УДК 534.231

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В СЛОЕ

Л. С. Метлов, В. Г. Пономаренко

(Донецк)

Рассматривается метод определения звукового поля в плоском слое, представляющий сочетание известного метода отраженных плоских волн с суммированием по графам. Это дает возможность сравнительно легко учесть сложную интерференционную картину, вызванную трансформацией различных волн на границах слоя и получить интегральные соотношения для звуковых потенциалов.

При стремлении толщины слоя к бесконечности получен переход к задаче об отражении звуковых волн на границе раздела двух сред. Исследуются потенциалы нормальных волн в случае гармонического источника в твердом слое.

1. Основные соотношения. Как известно, поле точечного излучателя цилиндрической симметрии с осью, перпендикулярной плоскости слоя (фиг. 1), без учета вращающих касательных напряжений, приложенных к боковой поверхности цилиндра, описывается потенциалом ψ сдвиговых волн, поляризованных в плоскости падения, и потенциалом φ волн сжатия, которые удовлетворяют соответствующим волновым уравнениям [1–3]. Эти потенциалы разлагаются по плоским волнам наряду с разложением в интеграл Фурье их временной части и имеют вид

$$\varphi = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty e^{ikct}\,dk \int\limits_0^{\pi/2-i\infty}\int\limits_0^{2\pi} f_0(k,\vartheta)\exp\{ik\,[x\sin\vartheta\cos\varphi + y\sin\vartheta\sin\varphi \pm (z-z_0)\cos\vartheta]\}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \tag{1.1}$$