Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.374

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Я. А. Каменярж

(Москва)

Краевая задача для полей скоростей и скоростей изменения напряжений в квазистатическом движении объема V упругопластической среде [1] заключается в нахождении пары $\sigma_{ij}^{\cdot}$, $\varepsilon_{ij}^{\cdot}$, связанной определяющими уравнениями соответствующей модели; при этом $\sigma_{ij}^{\cdot}$ должны быть статически допустимы, т. е. удовлетворять уравнениям и граничным условиям

$$\dot{\sigma}_{ij,\,j} = -\dot{X}_i, \qquad \dot{\sigma}_{ij} n_j |_{S_P} = \dot{p}_i \tag{0.1}$$

а $\varepsilon_{ij}^{\cdot}$ кинематически допустимы, т. е. $2\varepsilon_{ij}^{\cdot} = v_{i,\,j} + v_{j,\,i}$, причем

$$v_i |_{S_u} = \dot{u}_{i0} \tag{0.2}$$

Здесь S_p и S_u — непересекающиеся части границы объема V, $X_i^{\cdot}$, $p_i^{\cdot}$, $u_{i0}^{\cdot}$ — заданные функции. Вопрос о существовании решения этой задачи сводится к вопросу о достижении нижней грани функционала

$$I(\sigma_{ij}^{\cdot *}, \varepsilon_{ij}^{\cdot \circ}) = \int_V \left[\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^{\cdot}(\sigma_{kl}^{\cdot *})\sigma_{ij}^{\cdot *} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{\cdot}(\varepsilon_{kl}^{\cdot \circ})\varepsilon_{ij}^{\cdot \circ} - \sigma_{ij}^{\cdot *}\varepsilon_{ij}^{\cdot \circ}\right] dV \tag{0.3}$$

на множестве кинематически допустимых $\varepsilon_{ij}^{\cdot \circ}$ и статически допустимых $\sigma_{ij}^{\cdot *}$. Однако его нижняя грань может не достигаться, если ограничиться при минимизации лишь гладкими полями.

Предлагается пополнить множества допустимых полей $\sigma_{ij}^{\cdot *}$, $\varepsilon_{ij}^{\cdot \circ}$, замыкая их по норме L_2 (для v_i° это соответствует замыканию по норме H^1). Рассмотрены некоторые свойства функционала $I(\sigma_{ij}^{\cdot *}, \varepsilon_{ij}^{\cdot \circ})$ на пополненном множестве допустимых полей. Показано, что эквивалентность двух задач сохраняется, причем минимизацию $I(\sigma_{ij}^{\cdot *}, \varepsilon_{ij}^{\cdot \circ})$ можно проводить по $\sigma_{ij}^{\cdot *}$, $\varepsilon_{ij}^{\cdot \circ}$ или по $\sigma_{ij}^{\cdot *}$, $\varepsilon_{ij}^{\cdot \circ}$. В каждом из трех случаев нижняя грань достигается, причем в единственной точке. Из того, что v_i° принадлежит пространству Соболева $W_2^{(1)}$, вытекает отсутствие поверхностей разрыва скоростей.

Вариационные принципы в теории пластичности применялись для построения моделей [2] и для исследования существования и свойств решений [1,3].

1. Рассмотрим множество кинематически допустимых полей $\varepsilon^{\cdot \circ}$ и статически допустимых полей $\sigma^{\cdot *}$. Выберем некоторое частное поле скоростей v_p, удовлетворяющее (0.2), и частное решение s_p системы (0.1) (в качестве последнего можно взять, например, решение задачи линейной теории упругости, получающейся при добавлении к (0.1) закона Гука).

Пусть V_c° — пространство дифференцируемых полей скоростей v_c°, удовлетворяющих однородному граничному условию (0.2), E_c° — пространство соответствующих полей $(e_c^{\circ})_{ij} = {}^1/_2\,[(v_c^{\circ})_{ij} + (v_c^{\circ})_{ij}]$; S_c^* — пространство дифференцируемых статически допустимых полей s, соответствующих однородной системе (0.1). Очевидно, что $\sigma^{\bullet *} \in S_c^* + s_p$ и $\varepsilon^{\bullet\circ} \in E_c^\circ + e_p$ являются соответственно статически и кинематически допустимыми.

Функционал (0.3), ограниченный снизу на множестве $(S_c^* + s_p) \times (E_c^\circ + e_p)$ [1], может не достигать на нем своей нижней грани. Чтобы обеспечить достижение нижней грани функционала (0.3), пополним это множество следующим образом. Пусть S^* и E° — замыкания соответственно S_c^* и E_c° в $L_2(V)$. Под $L_2 = L_2(V)$ понимается пространство наборов функций $y = \{y_{ij}(x)\}$, $y_{ij} = y_{ji}$, определенных в V, с суммируемым y_{ij} y_{ij}; в L_2 определено скалярное произведение

$$(y, z)_{L_2} = \int\limits_V (y, z)\, dV, \qquad (y, z) = y_{ij}(x)\, z_{ij}(x)$$

Предполагается, что область V, занятая средой, ограничена.

В качестве множества кинематически допустимых полей скоростей деформаций и статически допустимых полей скоростей изменения напряжений примем соответственно $E^\circ + e_p = D^\circ, S^* + s_p = \Sigma^*$. Множества D°, Σ^* не зависят от выбора частных решений e_p, s_p, так как $e_{p1} - e_{p2} \in E^\circ$, $s_{p1} - s_{p2} \in S^*$.

Замыкание E_c° по норме L_2 эквивалентно замыканию V_c° по норме H^1

$$\|v\|_{H^1}^2 = \int\limits_V \Big[\sum_{i,j} (v_{i,j})^2 + \sum_i (v_i)^2\Big]\, dV \tag{1.1}$$

Обозначим такое замыкание через V°. Согласно (1.1), если некоторая последовательность $(v_c^\circ)_n$ сходится в H^1 к v°, то соответствующая последовательность $(e_c^\circ)_n$ сходится к e° в L_2.

Обратно, любое $e^\circ \in E^\circ$ является полем скоростей деформаций некоторого поля $v^\circ \in V^\circ$. Действительно, пусть $(e_c^\circ)_n \to e^\circ$ в L_2. Тогда из применения известных неравенств [4, 5]

$$\begin{aligned} &\int\limits_V \sum_i v_i^2 dV \leqslant C_1 \int\limits_V \sum_{i,j} (v_{i,j})^2\, dV \\ &\int\limits_V \sum_{i,j} (v_{i,j})^2\, dV \leqslant C_2 \int\limits_V (v_{i,j} + v_{j,i})(v_{i,j} + v_{j,i})\, dV \end{aligned} \tag{1.2}$$

к полю $(v_c^\circ)_n - (v_c^\circ)_m$, обращающемуся в нуль на S_u, следует, что последовательность $(v_c)^\circ{}_n$ фундаментальна в полном пространстве H^1 с нормой (1.1). Если $(v_c^\circ)_n \to v^\circ$ в H^1, то в силу (1.1) e° как предел $(e_c^\circ)_n$ совпадает с полем скоростей деформаций, соответствующим v°.

Неравенства (1.2) выполнены, если область V ограничена кусочно-непрерывно дифференцируемой поверхностью без точек возврата. В дальнейшем это условие предполагается выполненным. Кроме того, предполагается, что либо S_u является частью этой поверхности с положительной мерой, либо вся граница V есть S_p, и тогда допустимые поля скоростей должны удовлетворять дополнительным условиям [4, 6], исключающим перемещение среды как твердого тела

$$\int\limits_V v dV = 0, \qquad \int\limits_V \operatorname{rot} v dV = 0$$

Тогда неравенства (1.2) остаются в силе.

Покажем, что L_2 разлагается в прямую сумму $L_2 = 2\mu E^\circ + S^*$ (μ — размерная постоянная). Если $y_c \in L_2$ — набор дифференцируемых функций, то $y_c = 2\mu e_c^{\circ 2} + s_c^*$, $e_c^\circ \in E_c^\circ$, $s_c^* \in s_c^*$. Здесь $2\,(e_c^\circ)_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$, а u_i находятся [5, 6] из системы уравнений линейной теории упругости

$$\mu\,(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = (y_c)_{ij,j}$$
$$u_i\,|_{S_u} = 0, \qquad \mu\,(u_{i,j} + u_{j,i})\,n_j\,|_{S_p} = (y_c)_{ij}\,n_j$$

При достаточно гладком y_c гладкие также и u_i [6], а значит, и $s_c^* = y_c - 2\mu e_c^\circ$. Очевидно, $s_c^* = y_c - 2\mu e_c^\circ$ удовлетворяет однородной системе (0.1) и, следовательно, $s_c^* \in S_c^*$.

Далее, поскольку дифференцируемые y_c всюду плотны в L_2 и E_i° ортогонально S_c^*, а подпространства $E^\circ \supset E_c^\circ$, $S^* \supset S_c^*$ замкнуты в полном пространстве L_2, то и для любого $y \in L_2 : y = 2\mu e^\circ + s^*$, $e^\circ \in E^\circ$, $s^* \in S^*$.

Подпространства E° и S^* ортогональны, так как ортогональны содержащиеся в них всюду плотные множества E_c°, S^*. Таким образом

$$L_2 = 2\mu E^\circ + S^*,\ E^\circ \perp S^*$$

Поле $\varepsilon^{\cdot\circ}$ ($\sigma^{\cdot *}$) кинематически (статически) допустимо тогда и только тогда, когда $\varepsilon^{\cdot\circ} - e_p$ ($\sigma^{\cdot *} - s_p$) ортогонально подпространству S^* (E°).

Решением задачи об отыскании поля скоростей и скоростей изменения напряжений будем считать пару $\sigma^{\cdot *} \in \Sigma^*$, $\varepsilon^{\cdot\circ} \in D^\circ$, связанную в случае упрочняющейся упругопластической среды соотношением [7]

$$\varepsilon^\cdot(\sigma^\cdot) = A\sigma^\cdot + c_1(f)\,c_2\,[(f', \sigma^\cdot)]\,h\,(f', \sigma^\cdot)\,f' \tag{1.3}$$
$$c_1(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \qquad c_2(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

Здесь f' означает тензор $\partial f / \partial \sigma_{ij}$, скалярное произведение — свертку соответствующих тензоров, A — оператор, соответствующий положительно определенной квадратичной форме упругой энергии $^1/_2\,(\sigma, A\sigma)$; $f\,(\sigma, \chi) = 0$ — уравнение поверхности нагружения; χ — параметр упрочнения; h — известная функция σ, χ, ε^p.

Найдем в явном виде обращение (1.3). Если $c_1(f) = 0$, то $\sigma^\cdot(\varepsilon^\cdot) = A^{-1}\varepsilon^\cdot$. Если $c_1(f) = 1$, то должен реализоваться один из двух случаев

$$\sigma^\cdot(\varepsilon^\cdot) = \sigma_1^\cdot(\varepsilon^\cdot) = A^{-1}\varepsilon^\cdot, \qquad (f', \sigma_1^\cdot) \leqslant 0 \tag{1.4}$$

либо

$$\sigma^\cdot(\varepsilon^\cdot) = \sigma_2^\cdot(\varepsilon^\cdot) = (A + hF)^{-1}\,\varepsilon^\cdot, \quad (f', \sigma_2^\cdot) \geqslant 0 \quad \left(F_{ijkl} = \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}}\,\frac{\partial f}{\partial \sigma^{kl}}\right) \tag{1.5}$$

Можно убедиться путем перемножения, что

$$(A + hF)^{-1} = A^{-1} - h_1 A^{-1} F A^{-1},\ h_1 = h\,[1 + h\,(f', A^{-1}f')]^{-1} \tag{1.6}$$

Заметим, что знаки $(f', \sigma_1^\cdot)$ и $(f', \sigma_2^\cdot)$ совпадают. Поэтому (1.4), (1.5) можно объединить в выражении, аналогичном (1.3)

$$\sigma^\cdot(\varepsilon^\cdot) = A^{-1}\,\varepsilon^\cdot - c_1(f)\,c_2\,[(g, \varepsilon^\cdot)]\,h_1 \cdot (g, \varepsilon^\cdot)\,g,\ g = A^{-1}f' \tag{1.7}$$

2. Рассмотрим некоторые свойства функционала (0.3). Будем предполагать, что заданные в области V $\sigma_{ij}(x)$, $\varepsilon_{ij}(x)$, $\chi(x)$ таковы, что $h(x)$, $f'(x)$ — ограниченные измеримые в V функции. Тогда, как видно из (1.3), (1.7), из $\sigma^{\cdot *}\in L_2$ и $\varepsilon^{\cdot\circ}\in L_2$ следует $\varepsilon^{\cdot}(\sigma^{\cdot *})\in L_2$ и $\sigma^{\cdot}(\varepsilon^{\cdot\circ})\in L_2$ соответственно. Таким образом, функционал (0.3) определен на $\Sigma^*\times D^\circ$ и с учетом (1.3), (1.7) может быть представлен в виде

$$I(\sigma^{\cdot *},\varepsilon^{\cdot\circ})=I_1(\sigma^{\cdot *})+I_2(\varepsilon^{\cdot\circ})-(\sigma^{\cdot *},\varepsilon^{\cdot\circ})_{L_2} \tag{2.1}$$

$$I_1(\sigma^{\cdot *})=\frac{1}{2}\int\limits_V(\sigma^{\cdot *},A\sigma^{\cdot *})\,dV+\frac{1}{2}\int\limits_{V_p}hc_2[(f',\sigma^{\cdot *})](f',\sigma^{\cdot *})^2\,dV \tag{2.2}$$

$$I_2(\varepsilon^{\cdot\circ})=\frac{1}{2}\int\limits_V(\varepsilon^{\cdot\circ},A^{-1}\varepsilon^{\cdot\circ})\,dV-\frac{1}{2}\int\limits_{V_p}h_1c_2[(g,\varepsilon^{\cdot\circ})](g,\varepsilon^{\cdot\circ})^2\,dV \tag{2.3}$$

Здесь $V_p\subseteq V$ — множество точек, в которых $c_1(f)=1$, т. е. напряжения достигают предела текучести.

Покажем, что функционал (2.1) непрерывен. Рассмотрим, например, $I_1(\sigma^{\cdot *})$, первое слагаемое в (2.2) может быть легко оценено

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_V(\sigma_1^{\cdot *},A\sigma_1^{\cdot *})\,dV-\int\limits_V(\sigma_2^{\cdot *},A\sigma_2^{\cdot *})\,dV\right|\leqslant|A|\int\limits_V|\sigma_1^{\cdot *}+\sigma_2^{\cdot *}\|\times\\ \times\|\sigma_1^{\cdot *}-\sigma_2^{\cdot *}|\,dV\leqslant|A|\,\|\sigma_1^{\cdot *}+\sigma_2^{\cdot *}\|\,\|\sigma_1^{\cdot *}-\sigma_2^{\cdot *}\|\end{gathered} \tag{2.4}$$

Для оценки второго слагаемого в (2.2)

$$a=\left|\int\limits_{V_p}hc_2[(f',\sigma_1^{\cdot *})](f',\sigma_1^{\cdot *})^2\,dV-\int\limits_{V_p}hc_2[(f',\sigma_2^{\cdot *})](f',\sigma_2^{\cdot *})^2\,dV\right|$$

выделим в V_p три части

$$\begin{aligned}V_{12}&=\{x\in V_p:(f',\sigma_1^{\cdot *})>0,\quad (f',\sigma_2^{\cdot *})>0\}\\ V_1&=\{x\in V_p:(f',\sigma_1^{\cdot *})>0,\quad (f',\sigma_2^{\cdot *})\leqslant 0\}\\ V_2&=\{x\in V_p:(f',\sigma_1^{\cdot *})\leqslant 0,\quad (f',\sigma_2^{\cdot *})>0\}\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}a\leqslant&\left|\int\limits_{V_{12}}h(f',\sigma_1^{\cdot *}-\sigma_2^{\cdot *})(f',\sigma_1^{\cdot *}+\sigma_2^{\cdot *})\,dV\right|+\\ &+\int\limits_{V_1}h(f',\sigma_1^{\cdot *})^2\,dV+\int\limits_{V_2}h(f',\sigma_2^{\cdot *})^2\,dV\leqslant\\ \leqslant&\left|\int\limits_{V_{12}}h(f',\sigma_1^{\cdot *}-\sigma_2^{\cdot *})(f',\sigma_1^{\cdot *}+\sigma_2^{\cdot *})\,dV\right|+\\ &+\int\limits_{V_1}h(f',\sigma_1^{\cdot *}-\sigma_2^{\cdot *})^2\,dV+\int\limits_{V_2}h(f',\sigma_2^{\cdot *}-\sigma_1^{\cdot *})^2\,dV\end{aligned}$$

далее аналогично (2.4).

Таким образом, функционал $I_1(\sigma^{\cdot *})$ непрерывен, аналогично доказывается непрерывность $I_2(\varepsilon^{\cdot\circ})$. Последнее слагаемое в (2.1) непрерывно в силу непрерывности скалярного произведения и, следовательно, функционал $I(\sigma^{\cdot *},\varepsilon^{\cdot\circ})$ непрерывен.

Значения функционала $I(\sigma^{\cdot *},\varepsilon^{\cdot\circ})$ удовлетворяют неравенству

$$I(\sigma^{\cdot *},\varepsilon^{\cdot\circ})\geqslant 0 \tag{2.5}$$

при $\sigma^{\cdot *} \in S_c^* + s_p$, $\varepsilon^{\cdot\circ} \in E_c^\circ + e_p$ [1]. Поскольку множества $S_c^* + s_p$, $E_c^\circ + e_p$ всюду плотны в Σ^*, D° соответственно, а функционал $I(\sigma^{\cdot *}, \varepsilon^{\cdot\circ})$ непрерывен, неравенство (2.5) имеет место и для любых $\sigma^{\cdot *} \in \Sigma^*$, $\varepsilon^{\cdot\circ} \in D^\circ$.

Можно показать, что функционал (2.1) строго выпуклый, т. е.

$$I(\alpha\sigma_1^{\cdot *} + \beta\sigma_2^{\cdot *}, \alpha\varepsilon_1^{\cdot\circ} + \beta\varepsilon_2^{\cdot\circ}) < \alpha I(\sigma_1^{\cdot *}, \varepsilon_1^{\cdot\circ}) + \beta I(\sigma_2^{\cdot *}, \varepsilon_2^{\cdot\circ}) \tag{2.6}$$
$$0 < \alpha < 1, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \sigma_1^{\cdot *}, \sigma_2^{\cdot *} \in \Sigma^*, \quad \varepsilon_1^{\cdot\circ}, \varepsilon_2^{\cdot\circ} \in D^\circ$$

Функционал $I_1(\sigma^{\cdot *})$ строго выпуклый, так как первое подынтегральное выражение в (2.2) является положительно определенной квадратичной формой, а второе $\varphi(\sigma^{\cdot *}) = hc_2[(f', \sigma^{\cdot *})]\ (f', \sigma^{\cdot *})^2 = h\,{}^1/_2\,[\,|(f', \sigma^{\cdot *})| + (f', \sigma^{\cdot *})]\,(f', \sigma^{\cdot *})$ — выпуклая функция.

Представим далее функционал (2.3) в виде

$$2I_2(\varepsilon^{\cdot\circ}) = \int\limits_{V \setminus V_p} (\varepsilon^{\cdot\circ}, A^{-1}\varepsilon^{\cdot\circ})\, dV + \int\limits_{V_p} (\varepsilon^{\cdot\circ}, B\varepsilon^{\cdot\circ})\, dV +$$
$$+ \int\limits_{V_p} h_1 c_2 [(-g, \varepsilon^{\cdot\circ})]\,(g, \varepsilon^{\cdot\circ})^2\, dV$$

где учтено, что

$$1 - c_2[(g, \varepsilon^{\cdot})] = c_2[(-g, \varepsilon^{\cdot})]$$

и через B обозначена форма

$$(\varepsilon^{\cdot}, B\varepsilon^{\cdot}) = (\varepsilon^{\cdot}, A^{-1}\varepsilon^{\cdot}) - h_1(g, \varepsilon^{\cdot})^2 = [1 + h(f', A^{-1}f')]^{-1} \times$$
$$\times [(\varepsilon^{\cdot}, A^{-1}\varepsilon^{\cdot}) + h(\varepsilon^{\cdot}, A^{-1}\varepsilon^{\cdot})(f', A^{-1}f') - h(\varepsilon^{\cdot}, A^{-1}f')^2]$$

Форма B положительно определена, поэтому, как и выше, находим, что $I_2(\varepsilon^{\cdot\circ})$ — строго выпуклый функционал.

Наконец, для последнего слагаемого в (2.1) имеем

$$-(\alpha\sigma_1^{\cdot *} + \beta\sigma_2^{\cdot *}, \alpha\varepsilon_1^{\cdot\circ} + \beta\varepsilon_2^{\cdot\circ})_{L_2} + \alpha(\sigma_1^{\cdot *}, \varepsilon_1^{\cdot\circ})_{L_2} + \beta(\sigma_2^{\cdot *}, \varepsilon_2^{\cdot\circ})_{L_2} =$$
$$= \alpha\beta(\sigma_1^{\cdot *} - \sigma_2^{\cdot *}, \varepsilon_1^{\cdot\circ} - \varepsilon_2^{\cdot\circ})_{L_2} = 0$$

так как $\sigma_1^{\cdot *} - \sigma_2^{\cdot *}$ и $\varepsilon_1^{\cdot\circ} - \varepsilon_2^{\cdot\circ}$ принадлежат ортогональным подпространствам.

Таким образом, функционал (2.1) строго выпуклый.

Каждый элемент $\sigma^{\cdot *} \in \Sigma^*$ и $\varepsilon^{\cdot\circ} \in D^\circ$ можно представить в виде $\sigma^{\cdot *} = s^* + s_p$, $\varepsilon^{\cdot\circ} = e^\circ + e_p$, $s^* \in S^*$, $e^\circ \in E^\circ$. Поэтому функционал (2.1) можно рассматривать как функционал

$$\tilde I(s^*, e^\circ) = I(\sigma^{\cdot *}, \varepsilon^{\cdot\circ})$$

определенный на линейном пространстве $S^* \times E^\circ$.

Функционал $\tilde I(s^*, e^\circ)$ имеет линейный дифференциал Гато

$$D\tilde I(s^*, e^\circ; H, \eta) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\tilde I(s^* + tH, e^\circ + t\eta) - \tilde I(s^*, e^\circ)] = \tag{2.7}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t} \int\limits_{V_p} h\{c_2[(f', s^* + s + tH)]\,(f', s^* + s + tH)^2 -$$
$$- c_2[(f', s^* + s)]\,(f', s^* + s)^2\}\, dV - \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t} \int\limits_{V_p} h_1\{c_2[(g, e^\circ + e_p +$$
$$+ t\eta)]\,(g, e^\circ + e_p + t\eta)^2 - c_2[(g, e^\circ + e_p)]\,(g, e^\circ + e_p)^2\}\, dV +$$
$$+ \int\limits_V [(s^* + s_p, AH) + (e^\circ + e_p, A^{-1}\eta) - (s^* + s_p, \eta) - (e^\circ + e_p, H)]\, dV$$
$$(H \in S^*, \eta \in E^\circ)$$

Первое слагаемое в (2.7) представим в виде

$$i_1 = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\Big[\int\limits_{V^{\pm}(t)} h(f',\sigma^* + tH)^2 - \int\limits_{V^{\mp}(t)} h(f',\sigma^*)^2\,dV +$$

$$+ \int\limits_{V^+(t)} h\{(f',\sigma^* + tH)^2 - (f',\sigma^*)^2\}\,dV$$

$$V^{\pm}(t) = \{x\in V_p : (f',\sigma^* + tH) > 0,\quad (f',\sigma^*) \leqslant 0\}$$
$$V^{\mp}(t) = \{x\in V_p : (f',\sigma^* + tH) \leqslant 0,\quad (f',\sigma^*) > 0\}$$
$$V^{+}(t) = \{x\in V_p : (f',\sigma^* + tH) > 0,\quad (f',\sigma^*) > 0\}$$

В точках $V^{\pm}$ и $V^{\mp}$ соответственно справедливы неравенства

$$0 < (f',\sigma^* + tH) \leqslant t(f',H),\quad 0 < (f',\sigma^*) \leqslant -t(f',H)$$

причем функция $(f', H)^2$ суммируема в области V, поэтому

$$i_1 = \lim_{t\to 0}\int\limits_{V^+(t)} h(f',\sigma^*)(f',H)\,dV$$

Покажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ при достаточно малых $|t|$

(2.8) $$\operatorname{mes}[U^+ \setminus V^+(t)] < \varepsilon$$
$$U^+ = \{x\in V_p : (f',\sigma^*) > 0\},\quad V^+(t) \subseteq U^+$$

Действительно, в силу ограниченности V найдется $\alpha > 0$ такое, что

(2.9) $$\operatorname{mes} U_\alpha^+ < \varepsilon/2,\qquad U_\alpha^+ = \{x\in V_p : \alpha > (f',\sigma^*) > 0\}$$

Рассмотрим множество

$$Q(t) = (U^+ \setminus U_\alpha^+) \setminus V^+(t) =$$
$$= \{x\in V_p : (f',\sigma^*) \geqslant \alpha,\ (f',\sigma^* + tH) \leqslant 0\}$$

На этом множестве справедливо неравенство

$$\alpha \leqslant (f',\sigma^*) \leqslant -t(f',H) = |t|\,|(f',H)|$$

и, следовательно,

(2.10) $$Q(t) \subseteq \Big\{x\in U^+ : |(f',H)| \geqslant \frac{\alpha}{|t|}\Big\} \subseteq \Big\{x\in U^+ : |(f',H)| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\alpha}{\delta}\Big\} \equiv M_{\alpha/\delta}\quad (|t| < \delta)$$

Функция $|(f',H)|$ суммируема в области V, поэтому существует $\delta > 0$ такое, что $\operatorname{mes} M_{\alpha/\delta} < \varepsilon/2$. Тогда из (2.9) и (2.10) находим, что при $|t| < \delta$ имеет место неравенство (2.8) и, следовательно,

(2.11) $$i_1 = \int\limits_{U^+} h(f',\sigma^*)(f',H)\,dV = \int\limits_{V_p} hc_2[(f',\sigma^*)](f',\sigma^*)(f',H)\,dV$$

Аналогично можно преобразовать второе слагаемое (2.7) к виду

(2.12) $$-\int\limits_{V_p} h_1 c_2[(g,\varepsilon^{\circ})](g,\varepsilon^{\circ})(g,\eta)\,dV$$

Подставив (2.11), (2.12) в (2.7), получим окончательно

(2.13) $$D\tilde{I}(s^*, e^{\circ}; H, \eta) = \int\limits_{V}[(\varepsilon^{\cdot}(\sigma^*) - \varepsilon^{\circ}, H) + (\sigma^{\cdot}(\varepsilon^{\circ}) - \sigma^*, \eta)]\,dV$$

В предположении дифференцируемости $\sigma^{\cdot *}$, $\varepsilon^{\cdot \circ}$ это вычисление проведено в [1].

Покажем, наконец, что функционал $\tilde{I}(s^*, e^\circ)$ возрастающий, т. е. $\tilde{I}(s^*, e) \to \infty$ при $\| s^* \| + \| e^\circ \| \to \infty$.

Действительно, отбрасывая в I_1 второе слагаемое и распространяя интегрирование во втором слагаемом I_2 на всю область V, получим

$$\tilde{I}(s^*, e^\circ) \geqslant {}^1/_2 (s^*, As^*)_{L_2} + {}^1/_2 (e^\circ, Be^\circ)_{L_2} + \\ + {}^1/_2 (s_p As_p)_{L_2} + {}^1/_2 (e_p, Be_p)_{L_2} - (e^\circ, s_p)_{L_2} - (s^*, e_p)_{L_2} - \\ - (s_p, e_p)_{L_2} + (s^*, As_p)_{L_2} + (e^\circ, Be_p)_{L_2}$$

Формы (s^*, As^*) и (e°, Be°) в первых двух членах — положительно определенные, а остальные члены линейны по s^*, e° (s_p, e_p фиксированы), поэтому $\tilde{I}(s^*, e^\circ)$ является возрастающим.

Итак, функционал $\tilde{I}(s^*, e^\circ)$, определенный на гильбертовом пространстве $S^* \times E^\circ \subset L_2 \times L_2$, является на нем непрерывным, строго выпуклым, возрастающим и имеет линейный дифференциал Гато

$$D\tilde{I}(s^*, e^\circ; H, \eta) = (\varepsilon^\cdot(\sigma^{\cdot *}) - \varepsilon^{\cdot\circ}, H)_{L_2} + (\sigma^\cdot(\varepsilon^{\cdot\circ}) - \sigma^{\cdot *}, \eta)_{L_2} \tag{2.14}$$

$$(\sigma^{\cdot *} = s^* + s_p, \; \varepsilon^{\cdot\circ} = e^\circ + e_p)$$

3. Из перечисленных свойств функционала $\tilde{I}(s^*, e^\circ)$ вытекает [8], что

а) при всяком фиксированном e° из E° существует элемент пространства S^* — $s^{**}[e^\circ]$, на котором достигается нижняя грань

$$\tilde{I}(s^{**}[e^\circ], e^\circ) = \inf_{s^* \in S^*} \tilde{I}(s^*, e^\circ) = \inf_{\sigma^{\cdot *} \in \Sigma^*} I(\sigma^{\cdot *}, \varepsilon^{\cdot\circ}) = m_1(\varepsilon^{\cdot\circ}) \tag{3.1}$$

б) при всяком фиксированном s^* из S^* существует элемент пространства E' — $e^{\circ\circ}[s^*]$, на котором достигается нижняя грань

$$\tilde{I}(s^*, e^{\circ\circ}[s^*]) = \inf_{e^\circ \in E^\circ} \tilde{I}(s^*, e^\circ) = \inf_{\varepsilon^{\cdot\circ} \in D^\circ} I(\sigma^{\cdot *}, \varepsilon^{\cdot\circ}) = m_2(\sigma^{\cdot *}) \tag{3.2}$$

в) существует элемент пространства $S^* \times E^\circ$ — (s_m^*, e_m°), на котором достигается нижняя грань

$$\tilde{I}(s_m^*, e_m^\circ) = \inf_{s^* \in S^*, e^\circ \in E^\circ} \tilde{I}(s^*, e^\circ) = \inf_{\sigma^{\cdot *} \in \Sigma^*, \varepsilon^{\cdot\circ} \in D^\circ} I(\sigma^{\cdot *}, \varepsilon^{\cdot\circ}) = m \tag{3.3}$$

причем в каждом из трех случаев нижняя грань достигается в единственной точке.

Для дифференцируемого по Гато выпуклого функционала необходимым и достаточным условием достижения нижней грани является обращение в нуль его дифференциала. Поэтому из (2.14) находим, в случае а) ($\eta = 0$)

$$(\varepsilon^\cdot(\sigma^{\cdot **}) - \varepsilon^{\cdot\circ}, H)_{L_2} = 0$$

для любого H из S^*, и следовательно, $\varepsilon^\cdot(\sigma^{\cdot **})$ — кинематически допустимое поле. Пара $\sigma^{\cdot **}$, $\varepsilon^\cdot(\sigma^{\cdot **})$ — решение, упругопластической задачи. Обратно, если полю $\sigma^{\cdot *}$ из Σ^* соответствует кинематически допустимое поле $\varepsilon^\cdot(\sigma^{\cdot *})$, т. е. $\sigma^{\cdot *}$, $\varepsilon^\cdot(\sigma^{\cdot *})$ — решение, то

$$\varepsilon^\cdot(\sigma^{\cdot *}) \in D^\circ, \quad \varepsilon^\cdot(\sigma^{\cdot *}) - \varepsilon^{\cdot\circ} \in E^\circ, \quad (\varepsilon^\cdot(\sigma^{\cdot *}) - \varepsilon^{\cdot\circ}, H)_{L_2} = 0$$

и на $\sigma^{\cdot *}$ достигается $m_1(\varepsilon^{\cdot\circ})$.

Аналогичные утверждения имеют место и в случае б). Наконец, в случае в) очевидно, что $\sigma_m{}^{\cdot *}$, $\varepsilon_m{}^{\cdot \circ}$ — решение упругопластической задачи и наоборот, решение доставляет минимум функционалу $I\ (\sigma^{\cdot m},\ \varepsilon^{\cdot \circ})$. Отсюда вытекает, что оно единственное.

Следовательно, $m_1\ (\varepsilon^{\cdot \circ})$ достигается при любом $\varepsilon^{\cdot \circ}$ на одном и том же элементе $\sigma^{\cdot **}$ из Σ^*, а $m_2\ (\sigma^{\cdot *})$ — при любом $\sigma^{\cdot *}$ на одном и том же $\varepsilon^{\cdot \circ\circ}$ из D°. Более того

$$\varepsilon^{\cdot \circ} = \varepsilon^{\cdot \circ\circ} = \varepsilon^{\cdot}\,(\sigma^{\cdot **}), \quad \sigma^{\cdot *} = \sigma^{\cdot **} = \sigma^{\cdot}\,(\varepsilon^{\cdot \circ\circ})$$

Итак, если под решением задачи об определении полей скоростей и скоростей изменения напряжений в упругопластической среде понимать нахождение пары $\sigma^{\cdot *} \in \Sigma^*$, $\varepsilon^{\cdot \circ} \in D^\circ$, связанной соотношениями (1.3), (1.7), то доказано следующее утверждение.

Если область V, ограниченная кусочно-непрерывно дифференцируемой поверхностью без точек возврата, заполнена упрочняющейся упругопластической средой, то при заданном распределении $\sigma_{ij}\,(x)$, $\varepsilon_{ij}{}^p\,(x)$, $\chi\,(x)$, таком, что h и $f_{ij}{}'$ — ограниченные, измеримые в V функции, существует единственное решение $\sigma_m{}^{\cdot *}$, $\varepsilon_m{}^{\cdot \circ}$. При этом $\sigma_m{}^{\cdot *}$ и соответственно $\varepsilon_m{}^{\cdot *}$ и пара $\sigma_m{}^{\cdot *}$, $\varepsilon_m{}^{\cdot \circ}$ дает решение проблемы минимизации (3.1) функционала (0.3) при любом $\varepsilon^{\cdot \circ}$, (3.2) — при любом $\sigma^{\cdot *}$ и (3.3). Обратно, решение любой из этих проблем позволяет определить $\sigma_m{}^{\cdot *}$ или $\varepsilon_m{}^{\cdot \circ}$.

Как показано выше, любое поле $\varepsilon^{\cdot \circ} \in D^\circ$ является полем скоростей деформаций некоторого поля скоростей v из пространства $H^1\,(V)$. Таким образом, поле v имеет производные в смысле Соболева, следовательно, в области V отсутствуют двумерные поверхности разрыва скоростей. Исключить наличие особенностей на многообразиях размерности меньше двух проведенные рассуждения не позволяют. Однако в случае одномерной задачи, согласно теореме вложения оболева [4], $H^1 \subset C$ и поле скоростей непрерывно.

Автор благодарит А. Г. Куликовского за внимание к работе и Л. И. Седова за полезное обсуждение.

Поступила 25 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Койтер В. Т.* Общие теоремы теории упругопластических сред. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. *Бердичевский В. Л., Седов Л. И.* Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций. Связь с теорией пластичности. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
3. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Вариационные методы в теории жестковязкопластических сред. Изд-во МГУ, 1971.
4. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
5. *Эйдус Д. М.* О смешанной задаче теории упругости. Докл. АН СССР, 1951, т. 76, № 2.
6. *Friedrichs K. O.* On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality. Ann. Math., 1947, vol. 48, No. 2.
7. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1970.
8. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., «Наука», 1972.