Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3 : 534.231

О ДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТАХ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ «ТЕПЛОВОМ УДАРЕ»

Н. В. Котенко, М. П. Ленюк

(Черновцы)

В рамках обобщенной теории теплопроводности методом главных (фундаментальных) функций решается общая несвязная динамическая задача термоупругости для полупространства при условии осуществления на его границе теплового удара с конечной скоростью изменения температуры.

В качестве примера рассматривается стальное упругое полупространство.

Задача о температурных напряжениях, возникающих в упругом полупространстве вследствие теплового удара, созданного скачкообразным изменением температуры на границе, впервые была рассмотрена в [1]. Так как изменение температуры на границе происходит с конечной скоростью, то физически тепловой удар, рассмотренный в [1], осуществить, вообще говоря, нельзя. Динамические эффекты в упругом полупространстве при тепловом ударе с конечной скоростью изменения температуры на границе изучены в [2]. При больших скоростях изменения теплового потока получаем обобщенное волновое уравнение теплопроводности [3], учитывающее конечную скорость распространения тепла. Поэтому использованное в [1,2] решение обычного параболического уравнения теплопроводности не соответствует истинному температурному полю. В рамках обобщенной теории теплопроводности задачи [1,2] рассмотрены соответственно в [4,5].

1. Постановка задачи. Пусть упругое полупространство $z \geqslant 0$, а также среда, заполняющая область $z < 0$, вначале находятся при температуре $t_0 = 0$, а затем температура среды, омывающей поверхность полупространства $z = 0$, возрастает от $t_0 = 0$ по линейному закону и достигает конечного значения α_0 за малый, но отличный от нуля интервал времени τ_0. При $\tau > 0$ между поверхностью и средой происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона.

Для определения температурного поля в этом случае требуется найти ограниченное достаточно гладкое решение задачи

$$
\frac{1}{w_r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} + \frac{\bar{c}\gamma}{\lambda}\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}, \quad t|_{\tau=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial t}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0 \tag{1.1}
$$

$$
\left[\frac{\partial t}{\partial z} - h\left(1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial \tau}\right)(t - t_c)\right]\Big|_{z=0} = 0, \quad \lim_{z\to\infty} t(\tau, z) = 0
$$

$$
t_c|_{z=0} = \varphi(z) = \begin{cases} 0, & \tau_0 \leqslant 0 \\ \alpha_0 \tau / \tau_0 & 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 \\ \alpha_0 & \tau_0 \leqslant \tau \end{cases}
$$

$$
\tau = \alpha_0 \frac{\tau}{\tau_0} J_-(\tau_0 - \tau) J_-(\tau) + \alpha_0 J_-(\tau - \tau_0)
$$

Здесь $J_-(s)$ — асимметричная единичная функция Хевисайда [6].

Если считать теперь, что вначале полупространство было свободно от напряжения и что в процессе нагревания на его поверхности $z = 0$ напряжения отсутствуют, то для определения напряжений необходимо решить задачу [2]

$$\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial\tau^2}=a\frac{\partial^2 t}{\partial\tau^2},\quad a=\frac{1+\mu}{1-\mu}\gamma\alpha_\tau \tag{1.2}$$

$$\sigma_z(\tau,z)|_{\tau=0}=0,\quad \frac{\partial\sigma_z}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}=0,\quad \sigma_z|_{z=0}=0,\quad \sigma_z|_{z=\infty}=0$$

Здесь τ_r — время релаксации теплового процесса, w_r — хотя и большая, но конечная скорость распространения тепла, λ — коэффициент теплопроводности, c — удельная теплоемкость вещества, γ — плотность вещества, h — относительный коэффициент теплообмена, α_τ — коэффициент линейного расширения материала, c — скорость звука, μ — постоянная Ламе.

2. Смешанная задача для волнового уравнения. Рассмотрим задачу о нахождении в области

$$\Pi^+=\{(z,\tau);\quad 0\leqslant z<\infty,\quad 0\leqslant\tau\leqslant T\,(T\leqslant\infty)\}\equiv[0,\infty)\times[0,T$$

ограниченного на бесконечности достаточно гладкого решения задачи

$$L[u]\equiv b_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+b_1^2\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(\tau,z) \tag{2.1}$$

$$u|_{\tau=0}=\varphi_1(z),\quad \frac{\partial u}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}=\varphi_2(z)$$

$$B[u]|_{z=0}\equiv\left[\frac{\partial}{\partial z}-\alpha h\left(1+\frac{\tau_r}{\beta}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\right]u\Big|_{z=0}=$$

$$=-h\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\tau_r\frac{\partial}{\partial\tau}\right)u_c\equiv-h\psi(\tau)$$

$$\lim_{z\to\infty}u(\tau,z)=0$$

Определения. 1°. Функцией Коши смешанной задачи (2.1) будем называть функцию $K(\tau,z,\xi)$, которая удовлетворяет уравнению $L[u]=0$ и таким условиям:

$$K|_{\tau=0}=0,\quad \frac{\partial K}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}=\delta_\xi,\quad B[K]|_{z=0}=0$$

2°. Функцией Грина смешанной задачи (2.1) будем называть функцию $W(\tau,s,z)$, которая удовлетворяет уравнению $L[u]=0$, нулевым начальным условиям и такому граничному условию:

$$B\,[W]_{z=0}=\delta_s$$

3°. Фундаментальной функцией смешанной задачи (2.1) будем называть функцию $E(z,\xi,\tau,s)$, которая удовлетворяет уравнению

$$L[E]=\delta(z-\xi,\tau-s)=\delta(z-\xi)\otimes\delta(\tau-s)=\delta_\xi\otimes\delta_s$$

нулевым начальным и граничному условиям.

Здесь δ_a означает меру Дирака, сосредоточенную в точке a, $\otimes$ — тензорное произведение обобщенных функций.

Следуя [7], можно проверить, что функции K, W, E имеют вид

$$K(\tau, z, \xi) = b_0^2\Big[\Phi(\tau, |z-\xi|) -$$

$$-\Phi(\tau, z+\xi) - 2\int_0^\infty \exp(-h_1 y)\frac{\partial}{\partial\xi}\Phi(\tau-\beta_1 y, z+\xi+y)\,dy\Big]$$

$$W(\tau, s, z) = 2\int_0^\infty \exp(-h_1 y)\frac{\partial}{\partial z}\Phi(\tau - s - \beta_1 y, z+y)\,dy$$

$$E(z, \xi; \tau, s) = \begin{cases} 0 & , \tau \leqslant s \\ b_0^{-2}K(\tau - s; z, \xi); & \tau > s \end{cases}$$

$$k_1 = \frac{b_1^2}{2b_0^2}, \quad h_1 = \alpha h, \quad \beta_1 = \beta^{-1}\alpha h\tau_r, \quad \Phi(\tau, z) = b_0^{-2}G(\tau, z).$$

$$G(\tau, z) = \frac{1}{2}b_0\exp(-k_1\tau)\,I_0\left(k_1\sqrt{\tau^2 - b_0^2z^2}\right)J_-(\tau - b_0 z)$$

где $G(\tau, z)$ — фундаментальное решение задачи Коши для уравнения $L[u] = 0$. При этом существенную роль играет выполнение условия дополнения

$$h_1 + \beta_1 p + \sqrt{b_0^2p^2 + b_1^2 p} \neq 0$$

$$p = p_0 + ip_1, \; p_0 > 0, \; -\infty < p_1 < +\infty$$

Теорема. Если выполнено условие дополнения, то решение смешанной задачи (2.1) определяется по формуле

$$u(\tau, z) = \exp(-k_1\tau)\Big[\frac{b_0 - \beta_1}{b_0 + \beta_1}\varphi_1\left(\frac{\tau - b_0 z}{b_0}\right)J_-(\tau - b_0 z) + \tag{2.2}$$

$$+\frac{1}{2}\varphi_1\left(\frac{b_0 z - \tau}{b_0}\right)J_-(b_0 z - \tau) + \frac{1}{2}\varphi_1\left(\frac{b_0 z + \tau}{b_0}\right)\Big] +$$

$$+ h\int_0^\tau\int_0^\infty (z+y)\exp(-h_1 y)F(\tau - s - \beta_1 y, z+y)\,\psi(s)\,dy\,ds +$$

$$+\frac{h}{b_0+\beta_1}\int_0^\tau F_1(\tau - s, z)J_-(\tau - b_0 z - s)\,\psi(s)\,ds +$$

$$+\int_0^\tau\int_0^\infty\Big[\Phi(\tau - s, |z-\xi|) - \Phi(\tau - s, z+\xi) + \frac{1}{b_0+\beta_1}\times$$

$$\times F_1(\tau - s, z+\xi)J_-(\tau - s - b_0(z+\xi)) + \int_0^\infty (z+\xi+y)\times$$

$$\times\exp(-h_1 y)F(\tau - s - \beta_1 y, z+\xi+y)\,dy\Big]f(\xi, s)\,d\xi\,ds + \int_0^\infty\Big[\Phi(\tau,$$

$$|z-\xi|) - \Phi(\tau, z+\xi) + \frac{1}{b_0+\beta_1}F_1(\tau, z+\xi)J_-(\tau - b_0(z+\xi)) +$$

$$+\int_0^\infty \exp(-h_1 y)(z+\xi+y)F(\tau - \beta_1 y, z+\xi+y)\,dy\Big]\,[b_0^2\varphi_2(\xi) +$$

$$+ b_1^2\varphi_1(\xi)]\,d\xi + b_0^2\int_0^\infty\Big\{k_1\Big[\Phi(\tau, z+\xi) - \Phi(\tau, |z-\xi|) + \frac{\tau}{2b_0^2}\times$$

$$\times [F(\tau, |z-\xi|) - F(\tau, z+\xi)] + \left(\frac{k_1^2 b_0}{2}\, \frac{\tau + \beta_1(z+\xi)}{(\beta_1 + b_0)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{k_1 b_0 + h_1}{(b_0+\beta_1)^2}\right) F_1(\tau, z+\xi) J_-(\tau - b_0(z+\xi)) + \int_0^\infty \exp(-h_1 y) \times$$

$$\times (z+\xi+y)\left[\frac{2k_1^2 b_0^2(\tau-\beta_1 y)}{(\tau-\beta_1 y)^2 - b_0^2(z+\xi+y)^2}\Phi(\tau-\beta_1 y, z+\xi+y) - \right.$$

$$\left. - \left(k_1 + 2\frac{\tau-\beta_1 y}{(\tau-\beta_1 y)^2 - b_0^2(z+\xi+y)^2}\right) F(\tau-\beta_1 y, z+\xi+y)\right] dy \Big\} \varphi_1(\xi) d\xi$$

$$F_1(\tau, z) = \exp\left(\frac{h_1 - k_1\beta_1}{b_0+\beta_1} b_0 z\right) \exp\left(-\frac{k_1 b_0 + h_1}{b_0+\beta_1}\tau\right)$$

$$F(\tau, z) = k_1 b_0 \exp(-k_1\tau)\frac{I_1(k_1\sqrt{\tau^2 - b_0^2 z^2})}{\sqrt{\tau^2 - b_0^2 z^2}} J_-(\tau - b_0 z)$$

Доказательство. Перепишем формулу (2.2) таким образом:

$$u(\tau, z) = -2h\int_0^\tau\int_0^\infty \exp(-h_1 y)\frac{\partial}{\partial z}\Phi(\tau - s - \beta_1 y, z+y)\psi(s)\,dy\,ds +$$

$$+ \int_0^\tau\int_0^\infty \Big[\Phi(\tau-s, |z-s|) - \Phi(\tau-s, z+\xi) - 2\int_0^\infty \exp(-h_1 y)\times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\xi}\Phi(\tau - s - \beta_1 y, z+\xi+y)\,dy\Big] f(s,\xi)\,d\xi\,ds + b_0^2\int_0^\infty \Big[\Phi(\tau, |z-$$

$$-\xi|) - \Phi(\tau, z+\xi) - 2\int_0^\infty \exp(-h_1 y)\frac{\partial}{\partial\xi}\Phi(\tau-\beta_1 y, z+\xi+y)dy\Big]\times$$

$$\times \varphi_2(\xi)\,d\xi + \int_0^\infty \left(b_0^2\frac{\partial}{\partial\tau} + b_1^2\right)\Big[\Phi(\tau, |z-\xi|) - \Phi(\tau, z+\xi) -$$

$$-2\int_0^\infty \exp(-h_1 y)\frac{\partial}{\partial\xi}\Phi(\tau-\beta_1 y, z+\xi+y)\,dy\Big]\varphi_1(\xi)\,d\xi =$$

$$= W * \psi(\tau) + E ** f(\tau, z) + K * \left[\varphi_2(z) + \frac{b_1^2}{b_0^2}\varphi_1(z)\right] + \frac{\partial K}{\partial\tau} * \varphi_1(z)$$

Справедливость формулы (2.2) становится очевидной, если воспользоваться свойствами функций W, K, E, теоремами о непрерывности и дифференцируемости свертки [8], учитывая, что

$$\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\tau^2} * \varphi_1\right)\Big|_{\tau=0} = \left(\frac{1}{b_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{b_1^2}{b_0^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\right) K\Big|_{\tau=0} = -\frac{b_1^2}{b_0^2}\varphi_1$$

Следствия. 1°. Формула (2.2) определяет:

а) при $\alpha = 1$, $\beta = 1$ решение смешанной задачи (2.1) при граничном условии третьего рода;

б) при $\alpha = 0$, $h = -1$ — решение смешанной задачи (2.1) при граничном условии второго рода;

в) при $h \to \infty$, $\beta \to \infty$, $\alpha = 1$ — решение смешанной задачи (2.1) при граничном условии первого рода.

2°. При $b_1 = 0$ формула (2.2) определяет решение смешанной задачи (2.1) для чисто волнового уравнения, а при $\beta_1 = 0$ и $b_0 \to 0$ — для параболического уравнения, получающегося из уравнения (2.1) при $b_0 = 0$. Последнее имеет вид

(2.3) $$u_n = h\int_0^\tau\int_0^\infty (z+y)\exp(-h_1 y)F_n(\tau - s, z+y)\psi(s)\,dy\,ds +$$
$$+\int_0^\tau\int_0^\infty \Big[\Phi_n(\tau - s, |z-\xi|) - \Phi_n(\tau - s, z+\xi) + \int_0^\infty (z+\xi+y)\times$$
$$\times\exp(-h_1 y)F_n(\tau - s, z+\xi+y)\,dy\Big] f(s,\xi)\,d\xi\,ds + \int_0^\infty \Big[\Phi_n(\tau, |z-$$
$$-\xi|) - \Phi_n(\tau, z+\xi) + \int_0^\infty (z+\xi+y)\exp(-h_1 y)F_n(\tau, z+\xi+y)\Big] b_1^2\varphi_1(\xi)\,d\xi$$
$$\Phi_n = \lim_{b_0\to 0}\Phi(\tau, z) = \frac{1}{2b_1\sqrt{\pi\tau}}\exp\left(-\frac{b_1^2 z^2}{4\tau}\right)$$
$$F_n = \lim_{b_0\to 0} F = \frac{b_1}{2\sqrt{\pi}\tau^{3/2}}\exp\left(-\frac{b_1^2 z^2}{4\tau}\right)$$

3. Температурное поле. Полагая в формуле (2.2) $f = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$
$$\psi(s) = \left(1 + \alpha_1\frac{\partial}{\partial s}\right)\varphi(s) = \frac{\alpha_0}{\tau_0}\left(1 + \frac{\alpha\tau_r}{\beta}\frac{\partial}{\partial s}\right)[sJ_-(s) - (s-\tau_0)J_-s - \tau_0)]$$
и заменяя u на t, после элементарных преобразований получим

(3.1) $$t(\tau, z) = \frac{\alpha_0 h\exp(-k_1 b_0 z)}{\tau_0(h_1 + k_1 b_0)}[\Phi_1(\tau, z)J_-(\tau - b_0 z) -$$
$$-\Phi_1(\tau - \tau_0, z)J_-(\tau - \tau_0 - b_0 z)] + \frac{\alpha_0\alpha_1 h k_1^2 b_0\exp(-k_1 b_0 z)}{\tau_0(h_1 + k_1 b_0)}\times$$
$$\times[\Phi_2(\tau, z)J_-(\tau - b_0 z) - \Phi_2(\tau - \tau_0, z)J_-(\tau - \tau_0 - b_0 z)] +$$
$$+ k_1 b_0 h\frac{\alpha_0}{\tau_0}[\Phi_3(\tau, z)J_-(\tau - b_0 z) - \Phi_3(\tau - \tau_0, z)J_-(\tau - \tau_0 - z b_0)] \equiv$$
$$\equiv F_2(\tau, z)J_-(\tau - b_0 z) - F_2(\tau - \tau_0, z)J_-(\tau - \tau_0 - b_0 z) \equiv$$
$$\equiv (I - T_\tau^{\tau_0})[F_2(\tau, z)J_-(\tau - b_0 z)]$$

Здесь
$$\Phi_1(\tau, z) = \tau - b_0 z - \frac{1-\alpha_1 d}{d} + \frac{1-\alpha_1 d}{d}\exp[-d(\tau - b_0 z)]$$
$$\Phi_2(\tau, z) = z(\tau - b_0 z) + \frac{\tau - (2b_0 + \beta_1)z}{h_1 + k_1 b_0} - \frac{2(b_0 + \beta_1)}{(h_1 + k_1 b_0)^2} +$$
$$+\exp[-d(\tau - b_0 z)]\left[\frac{\tau + \beta_1 z}{h_1 + k_1 b_0} + \frac{2(b_0 + \beta_1)}{(h_1 + k_1 b_0)^2}\right]$$
$$\Phi_3(\tau, z) = \int_0^{\tau_1}\int_0^{v_1}(z+y)\exp[-h_1 y - k_1(\tau - s - \beta_1 y)]\left\{\left[1 - \alpha_1 k_1 -\right.\right.$$
$$\left.-\frac{2\alpha_1(\tau - s - \beta_1 y)}{(\tau - s - \beta_1 y)^2 - b_0^2(z+y)^2}\right]\frac{I_1\left(k_1\sqrt{(\tau - s - \beta_1 y)^2 - b_0^2(z+y)^2}\right)}{\sqrt{(\tau - s - \beta_1 y)^2 - b_0^2(z+y)^2}} +$$
$$+\frac{k_1\alpha_1(\tau - s - \beta_1 y)}{(\tau - s - \beta_1 y)^2 - b_0^2(z+y)^2}\times$$
$$\left.\times I_0\left(k_1\sqrt{(\tau - s - \beta_1 y)^2 - b_0^2(z+y)^2}\right)\right\} s\,dy\,ds$$

$$\alpha_1 = \beta^{-1}\alpha\tau_r, \quad d = (b_0 + \beta_1)^{-1}(h_1 + k_1 b_0), \quad h_1 = \alpha h, \ \beta_1 = \alpha_1 h$$
$$\tau_1 = \tau - b_0 z, \quad v_1 = (b_0 + \beta_1)^{-1}(\tau - b_0 z - s)$$

Искомое температурное поле в упругом полупространстве $z \geqslant 0$ будет описывать функция $t(z, \tau)$, определенная формулой (3.1) при $\alpha = \beta = 1$.

Если на границе упругого полупространства задана температура или тепловой поток, то температурное поле имеет форму (3.1), где вместо $F_2(\tau, z)$ надо подставить соответственно функции

$$F_3(\tau, z) = \lim_{\substack{\beta\to\infty \\ h\to\infty}} F_2(\tau, z)\,|_{\alpha=1} = \frac{\alpha_0}{\tau_0}\Bigl[(\tau - b_0 z)\exp(-k_1 b_0 z) +$$
$$+ k_1 b_0 z \int_{b_0 z}^{\tau} (\tau - \xi)\exp(-k_1\xi)\frac{I_1\bigl(k_1\sqrt{\xi^2 - b_0^2 z^2}\bigr)}{\sqrt{\xi^2 - b_0^2 z^2}}\,d\xi\Bigr]$$
$$F_4(\tau, z) = \lim_{\alpha\to 0} F_2(\tau, z)\,|_{h=-1} = \frac{\alpha_0}{b_0\tau_0}\times$$
$$\times\int_0^{\tau_1} s\exp(-k_1(\tau - s))\,I_0\bigl(k_1\sqrt{(\tau - s)^2 - b_0^2 z^2}\bigr)\,ds$$

Случай скачкообразного изменения температуры на границе упругого полупространства можно получить из (3.1) при $\tau_0 \to 0$. Итак, формула (3.1) охватывает все наиболее часто имеющие место в практике граничные условия. Отметим еще, что при $b_0 \to 0$ из (3.1) получаем соответствующие параболические (обычные) температурные поля, а при $b_1 = 0$ — чисто волновые температурные поля, удовлетворяющие заданным на границе условиям.

4. Поле напряжений. Положим в формуле (2.2)

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \psi = 0, \ \alpha = 1, \ b_0^2 = \frac{1}{c^2}, \ b_1^2 = 0, \ f(s, \xi) = -a\frac{\partial^2 t(s, \xi)}{\partial s^2}, \ u = \sigma_z$$

Тогда, устремляя $h \to \infty$, $\beta \to \infty$, получим, что поле напряжений в упругом полупространстве описывают функции (все касательные напряжения равны нулю)

$$\sigma_z(\tau, z) = \frac{ac}{2}\int_0^{\tau}\int_0^{\infty}\Bigl[J_-\Bigl(\tau - s - \frac{z+\xi}{c}\Bigr) - J_-\Bigl(\tau - s - \frac{|z-\xi|}{c}\Bigr)\Bigr]\times \tag{4.1}$$
$$\times\frac{\partial^2 t}{\partial s^2}\,d\xi\,ds = \frac{ac}{2}\Bigl[\int_0^{c\tau - z}\frac{\partial t}{\partial s}\Big|_{s=\tau-z+\xi/c} d\xi J_-\Bigl(\tau - \frac{z}{c}\Bigr) -$$
$$- \int_z^{c\tau+z}\frac{\partial t}{\partial s}\Big|_{s=\tau+z-\xi/c} d\xi - \int_0^z J_-\Bigl(\tau - \frac{z-\xi}{c}\Bigr)\frac{\partial t}{\partial s}\Big|_{s=\tau-z-\xi/c} d\xi\Bigr] =$$
$$= \frac{ac}{2}(1 - T_\tau^{\tau_0})\Bigl[J_-\Bigl(\tau - \frac{z}{c}\Bigr)\int_0^{c\tau - z} F_5\Bigl(\tau - \frac{z+\xi}{c}, \xi\Bigr)d\xi -$$
$$- \int_z^{c\tau+z} F_5\Bigl(\tau + \frac{z-\xi}{c}, \xi\Bigr)d\xi - \int_0^z J_-\Bigl(\tau - \frac{z-\xi}{c}\Bigr)F_6\Bigl(\tau - \frac{z-\xi}{c}, \xi\Bigr)d\xi\Bigr]$$
$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z - \frac{E\alpha_\tau}{1-\mu}t(\tau, z)$$

Здесь

$$F_5 = \frac{\alpha_0}{\tau_0} J_-(s - b_0\xi)\Big[\frac{h\exp(-k_1b_0\xi)}{h_1 + k_1b_0}\Phi_4(s,\xi) +$$
$$+ \frac{\alpha_1 h k_1^2 b_0}{h_1 + k_1 b_0}\exp(-k_1b_0\xi)\Phi_5(s,\xi) + k_1b_0h\Phi_6(s,\xi)\Big]$$
$$\Phi_4(s,\xi) = 1 - (1 - \alpha_1 d)\exp[-d(s - b_0\xi)]$$
$$\Phi_5(s,\xi) = \xi + \frac{1}{h_1 + k_1b_0}\Big\{1 - \exp[-d(s - b_0\xi)] -$$
$$- \frac{s + \beta_1\xi}{b_0 + \beta_1}\exp[-d(s - b_0\xi)]$$
$$\Phi_6(s,\xi) = \int_0^{s_1}\Big\{\Big[1 - \alpha_1k_1 + \frac{\alpha_1k_1^2b_0(s - \eta + \beta_1\xi)}{4(b_0 + \beta_1)}\Big]\frac{k_1(s - \eta + \beta_1\xi)}{2(b_0 + \beta_1)^2} \times$$
$$\times \exp\Big[-h_1\frac{s - \eta - b_0\xi}{b_0 + \beta_1} - k_1b_0\frac{s + \eta + \beta_1\xi}{b_0 + \beta_1}\Big]\Big\}\eta d\eta + \int_0^{s_1}\eta\int_0^{v_2}(\xi + y)\times$$
$$\times \exp[-h_1y - k_1(s - \eta - \beta_1y)]\Big\{\psi_1(s - \eta - \beta_1y, \xi + y)I_0\times$$
$$\times\left(k_1\sqrt{(s - \eta - \beta_1y)^2 + b_0^2(\xi + y)^2}\right) + \psi_2(s - \eta - \beta_1y, \xi + y)\times$$
$$\times\frac{I_1\left(k_1\sqrt{(s - \eta - \beta_1y)^2 - b_0^2(\xi + y)^2}\right)}{\sqrt{(s - \eta - \beta_1y)^2 - b_0^2(\xi + y)^2}}\Big\}dyd\eta$$
$$\psi_1(x,y) = \frac{k_1}{x^2 - b_0^2y^2}\left(x - 2\alpha_1k_1x - \frac{b_0^2y^2 + 3x^2}{x^2 - b_0^2y^2}\alpha_1\right)$$
$$\psi_2(x,y) = k_1(\alpha_1k_1 - 1) + \frac{4\alpha_1k_1x - 2x + \alpha_1k_1^2x^2}{x^2 - b_0^2y^2} + 2\frac{3\alpha_1x^2 + \alpha_1b_0^2y^2}{(x^2 - b_0^2y^2)^2}$$
$$s_1 = s - b_0\xi,\quad v_2 = (b_0 + \beta_1)^{-1}(s - \eta - b_0\xi)$$

где $t(\tau, z)$ определено формулой (3.1).

Искомое поле напряжений в упругом полупространстве будет иметь структуру (3.1) при $\alpha = \beta = 1$, т. е.

$$\sigma_z = (I - T_\tau^{\tau_0})\Big[F_6(\tau, z)J_-\Big(\tau - \frac{z}{c}\Big) + F_7(\tau, z)J_-(\tau - b_0z)\Big] \tag{4.2}$$

и аналогично для σ_x и σ_y.

Таким образом, поле напряжений в упругом полупространстве $z \geqslant 0$ получается наложением четырех типов волн: тепловой волны со скоростью $b_0 = 1/w_r$, звуковой волны со скоростью c и таких же волн, но запаздывающих на τ_0. При этом поле напряжений в отличие от параболического случая непрерывно.

Рассмотрим более подробно случай, когда на границе упругого полупространства осуществляется тепловой удар с конечной скоростью изменения температуры. Волновая функция F_5 в этом случае имеет вид

$$F_5(s,\xi) = \frac{\alpha_0}{\tau_0}J_-(s - b_0\xi)\Big[\exp(-k_1b_0\xi) +$$
$$+ k_1b_0\xi\int_{b_0\xi}^{s}\exp(-k_1z)\frac{I_1\left(k_1\sqrt{z^2 - b_0^2\xi^2}\right)}{\sqrt{z^2 - b_0^2\xi^2}}\Big] \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в (4.1), после очевидных преобразований получим, что напряжения в упругом полупространстве описывают функции

(4.4)
$$\sigma_z = \frac{a\alpha_0}{b_1^2\tau_0^2}(I - T_\tau^{\tau_0})\Big\{J_-\Big(\tau - \frac{z}{c}\Big)\Big[\exp\Big(-k\Big(\tau - \frac{z}{c}\Big)\Big) - 1\Big] +$$
$$+ J_-(\tau - b_0 z)\,[\exp(-k_1 b_0 z) - \exp(-k_1 b_0 z - k(\tau - b_0 z))] +$$
$$+ k_1 b_0 z J_-(\tau - b_0 z)\int_{b_0 z}^{\tau}\exp(-k_1\xi)\,\times$$
$$\times\frac{I_1(k_1\sqrt{\xi^2 - b_0^2 z^2})}{\sqrt{\xi^2 - b_0^2 z^2}}(1 - \exp(-k(\tau - \xi)))\,d\xi\Big\}$$
$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z - \frac{E\alpha_\tau}{1-\mu}t, \quad k = \frac{b_1^2 c^2}{b_0^2 c^2 - 1} > 0$$

Величина t определена формулой (3.1), где F_2 заменено на $F_3(\tau, z)$, все касательные напряжения равны нулю.

Из формулы (4.4) можно получить такие следствия.

1°. Если температурное поле чисто волновое ($b_1 = 0$), то
$$\sigma_z = \frac{a\alpha_0 c^2}{\tau_0(b_0^2 c^2 - 1)}(I - T_\tau^{\tau_0})\Big[(\tau - b_0 z)J_-(\tau - b_0 z) -$$
$$-\Big(\tau - \frac{z}{c}\Big)J_-\Big(\tau - \frac{z}{c}\Big)\Big]$$
т. е. поле напряжений линейно как по времени, так и по пространственной переменной.

2°. Если на границе упругого полупространства осуществляется скачкообразно тепловой удар, т. е. $\tau_0 \to 0$, то

(4.5)
$$\sigma_z = \frac{a\alpha_0 c^2}{b_0^2 c^2 - 1}\Big\{\Big[\exp(-k_1 b_0 z - k(\tau - b_0 z)) + k_1 b_0 z\,\times$$
$$\times\int_{b_0 z}^{\tau}\exp(-k\tau - k_1\xi + k\xi)\frac{I_1(k_1\sqrt{\xi^2 - b_0^2 z^2})}{\sqrt{\xi^2 - b_0^2 z^2}}\,d\xi\Big]\,\times$$
$$\times J_-(\tau - b_0 z) - J_-\Big(\tau - \frac{z}{c}\Big)\exp\Big[-k\Big(\tau - \frac{z}{c}\Big)\Big]\Big\}$$

3°. Если скорости движения тепловой и упругой волн совпадают ($b_0 = 1/c$), то
$$\sigma_z = \frac{a\alpha_0}{\tau_0 b_1^2}(I - T_\tau^{\tau_0})\Big\{J_-\Big(\tau - \frac{z}{c}\Big)\Big[\exp\Big(-\frac{1}{2}b_1^2 cz\Big) -$$
$$-1 + \frac{1}{2}b_1^2 cz\int_{z/c}^{\tau}\exp\Big(-\frac{1}{2}b_1^2 c^2\xi\Big)\,\times$$
$$\times\frac{I_1(\tfrac{1}{2}b_1^2 c^2\sqrt{\xi^2 - c^{-2}z^2})}{\sqrt{\xi^2 - c^{-2}z^2}}\,d\xi\Big]\Big\}$$

4°. Если температурное поле чисто волновое и скорости тепловой и упругой волн совпадают ($b_1 = 0$, $b_0 = 1/c$), то поле напряжений линейно по пространственной переменной
$$\sigma_z = \frac{1}{2}\frac{ca\alpha_0}{\tau_0}z\Big[J_-\Big(\tau - \tau_0 - \frac{z}{c}\Big) - J_-\Big(\tau - \frac{z}{c}\Big)\Big]$$
и существует в течение времени $\tau \in (z/c,\ z/c + \tau_0)$. В случае теплового удара ($\tau_0 \to 0$) напряжение σ_z действует в сосредоточенный момент времени (мгновенно)
$$\sigma_z = -\tfrac{1}{2}ca\alpha_0 z\delta(\tau - z/c)$$

5°. При $b_0 \to 0$ из (4.4) получаем случай параболического температурного поля, рассмотренный в [2].

Если же на границе упругого полупространства изменяется по линейному закону тепловой поток, то поле напряжений имеет вид

$$\sigma_z = \frac{ac\alpha_0}{2b_0\tau_0}(I - T_\tau^{\tau_0})\left\{J_-\left(\tau - \frac{z}{c}\right)\left[\int_0^{\tau_2}\int_{b_0\xi}^{\xi_1} \exp(-k\xi)\, I_0(q)\, ds d\xi - \right.\right. \tag{4.6}$$

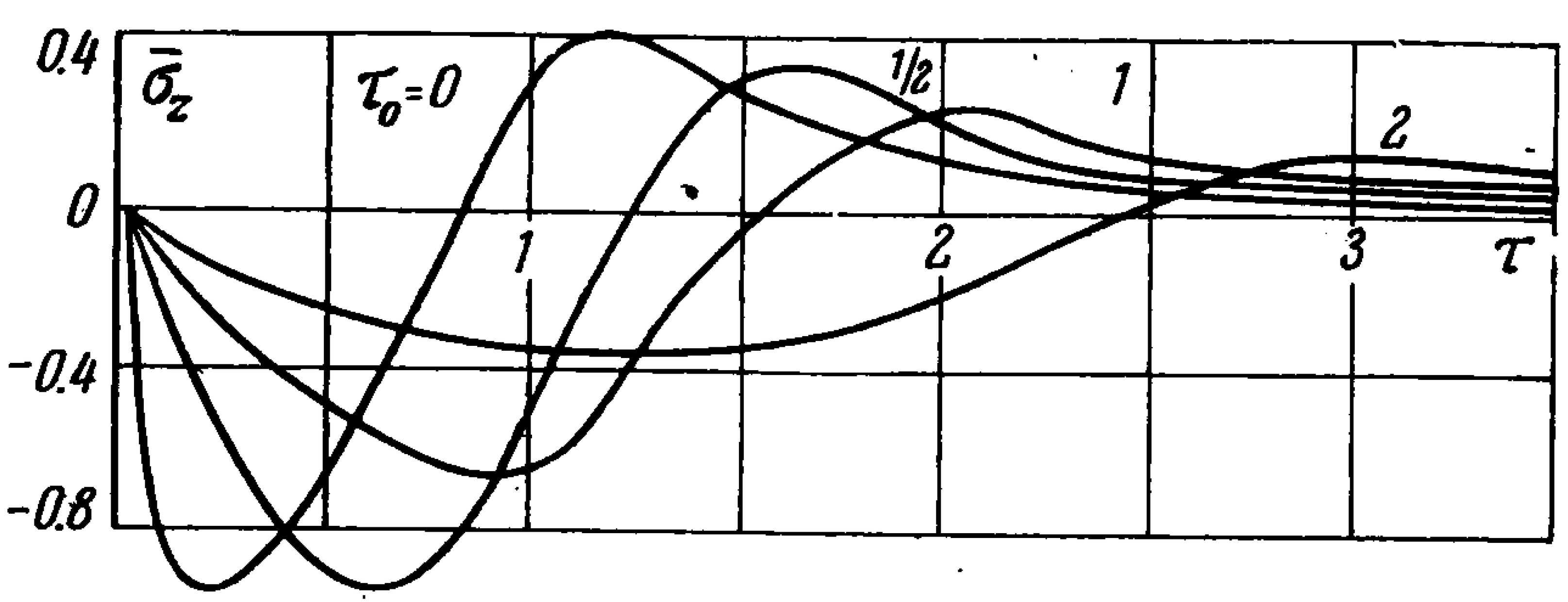
$$- \int_0^{\tau_3}\int_{b_0\xi}^{\xi_2} \exp(-ks)\, I_0(q)\, ds d\xi\Bigg] + J_-(\tau - b_0 z)\left[\int_z^{\tau_4}\int_{b_0\xi}^{\xi_3} \exp(-k_1 s) \times \right.$$

$$\left.\left. \times I_0(q)\, ds d\xi - \int_z^{\tau_2}\int_{b_0\xi}^{\xi_1} \exp(-k_1 s)\, I_0(q)\, ds d\xi\right]\right\}$$

$$q = k_1\sqrt{s^2 - b_0^2\xi^2}, \quad \tau_2 = \frac{c\tau - z}{cb_0 - 1}, \quad \tau_3 = \frac{c\tau - z}{cb_0 + 1}, \quad \tau_4 = \frac{c\tau + z}{cb_0 + 1}$$

$$\xi_1 = c^{-1}(c\tau - z + \xi), \; \xi_2 = c^{-1}(c\tau - z - \xi), \quad \xi_3 = \tau + c^{-1}(z - \xi)$$

Очевидно, что из (4.6) можно получить следствия, аналогичные полученным из формулы (4.4).



Для стального полупространства по формулам (4.4), (4.5) построены графики зависимости напряжения $\bar{\sigma}_z = A^{-1}\sigma_z$ ($A = b_1^{-2} a\,\alpha_0$) от времени τ в сечении $\xi = 1$ ($\xi = b_0 z$) при разных временах нагрева τ_0.

Из фигуры видно, что максимум напряжений быстро уменьшается с увеличением τ_0, и при $\tau_0 = 2$ этот максимум составляет около 43% от его значения при $\tau_0 = 0$ (мгновенный нагрев). Таким образом, при продолжительности нагрева 2 *сек* максимум динамических напряжений снижается на 57%. Это говорит о том, что и с учетом конечной скорости распространения тепла повышение напряжений вследствие динамических эффектов, вообще говоря, не имеет практического значения.

Поступила 29 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даниловская В. И.* Об одной динамической задаче термоупругости. ПММ, 1952, т. 16, вып. 3.
2. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М., Физматгиз, 1963.
3. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967.
4. *Михайлов М. Д.* О динамических задачах термоупругости. Инж.-физ. ж., 1969, т. 16, № 1.
5. *Андреев В. Г.*, *Уляков П. Н.* Термоупругая волна с учетом скорости распространения тепла. Инж-физ. ж., 1971, т. 21, № 1.
6. *Корн Г. А.*, *Корн Т. М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1970.
7. *Ленюк М. П.* О волновом уравнении теплопроводности. Укр. матем. ж., 1972, т. 24, вып. 6.
8. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй спец. курс. М., «Наука», 1965.