

**О ВОЛНАХ УСКОРЕНИЙ В АНИЗОТРОПНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ
СРЕДАХ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОСТИ СКОРОСТИ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА**

В. Л. Гонсовский, Ю. А. Россихин

(Воронеж)

Изучается распространение волн ускорений в анизотропной термоупругой среде. Показано, что учет конечности скорости распределения тепла приводит к появлению четырех типов волн ускорений, скорости и коэффициенты затухания которых существенным образом зависят от направления распространения волновой поверхности. Приводится сравнение скоростей и коэффициентов затухания плоских волн ускорения в кристалле цинка, полученных с учетом и без учета конечности скорости распространения тепла.

Влиянию сопряженности полей деформаций и температуры на характер распространения волн в однородном изотропном теле в случае бесконечной скорости распределения тепла посвящены работы [1,2]. В них получен ряд закономерностей, обусловленных сопряженностью полей, и, в частности, показано, что слабые и сильные разрывы затухают, а порядок затухания определяется экспоненциальным множителем.

Учет конечности скорости распределения тепла приводит к появлению двух типов продольных волн, скорости распространения которых существенным образом зависят от скорости теплового возмущения [3,4].

1. Выпишем систему уравнений, определяющую динамическое поведение термоупругой анизотропной среды, в которой тепло распространяется с конечной скоростью.

$$(1.1) \quad q_{j,j} + c_\varepsilon \theta' + T_0 \beta_{ij} \varepsilon_{ij} = 0$$

$$(1.2) \quad \tau q_j + q_j = -K_{ij} \theta_{,i}$$

$$(1.3) \quad \sigma_{ij,j} = \rho u_i''$$

$$(1.4) \quad \varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$(1.5) \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta$$

Здесь q_j — составляющие вектора теплового потока, $\theta = T - T_0$ — температура тела, T_0 — температура тела в естественном состоянии, c_ε — удельная теплоемкость при постоянной деформации, $\beta_{ij} = C_{ijkl} \alpha_{kl}$, α_{kl} — коэффициенты термического линейного расширения, C_{ijkl} — изотермические коэффициенты жесткости анизотропного материала, ε_{ij} — тензор деформаций, K_{ij} — коэффициенты теплопроводности, τ — время релаксации теплового потока, σ_{ij} — тензор напряжений, u_i — компоненты перемещения, ρ — плотность; латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, точки над величинами означают производственные по времени t , индекс после запятой — производную по соответствующей координате.

Уравнение сохранения энергии (1.1), закон Фурье, учитывающий инерцию теплового потока (1.2), уравнение движения (1.3), формулы Коши (1.4) и обобщенное соотношение Дюамеля—Неймана (1.5) представляют со-

бой систему 19 уравнений относительно неизвестных величин q_i , θ , σ_{ij} , u_i , ε_{ij} .

В дальнейшем под волной ускорения понимается изолированная поверхность, на которой напряжения, скорости, температура и тепловой поток непрерывны, а их некоторые частные производные терпят разрыв.

Учитывая, что на волновой поверхности величины q_j непрерывны, из уравнений (1.1)–(1.3) и продифференцированных по времени соотношений (1.4), (1.5) получаем (квадратные скобки означают разность значений соответствующей величины на разных сторонах поверхности разрыва)

$$(1.6) \quad [q_{j,j}] + c_\varepsilon [\theta'] + T_0 \beta_{ij} [\varepsilon_{ij}'] = 0, \quad \tau [q_j'] = -K_{ij} [\theta_{,i}] \\ [\sigma_{ij,j}] = \rho [v_i'], \quad 2 [\varepsilon_{ij}'] = [v_{j,i}] + [v_{i,j}], \quad [\sigma_{ij}] = C_{ijkl} [v_{k,l}] - \beta_{ij} [\theta]$$

где $[v_i]$ — скачок скорости перемещения.

Используя кинематические и геометрические условия совместности первого порядка на поверхности разрыва, из (1.6) найдем

$$(1.7) \quad \rho c^2 \lambda_i = S_{ik} \lambda_k + b_i c \mu, \quad (c^2 - a^2) \mu = T_0 c_\varepsilon^{-1} c b_k \lambda_k \\ S_{ik} = C_{ijkl} v_j v_l, \quad b_i = \beta_{ij} v_j, \quad a^2 = K_{mn} v_m v_n (\tau c_\varepsilon)^{-1}$$

Здесь v_i — единичный вектор нормали к поверхности, c — скорость распространения этой поверхности, a^2 — квадрат скорости теплового возмущения для несвязной задачи, λ_i , μ — величины, характеризующие скачок первых производных от скорости перемещения и температуры соответственно

$$[v_i'] = -\lambda_i c, \quad [v_{i,j}] = \lambda_i v_j, \quad [\theta'] = -\mu c, \quad [\theta_{,i}] = \mu v_i$$

Условие существования нетривиальных решений системы (1.7), однородной относительно λ_i и μ , определяет в общем случае четыре скорости и, следовательно, четыре типа волн ускорений в анизотропной среде.

При выполнении этого условия остаются линейно-независимыми только три уравнения системы (1.7). Выбирая в качестве свободного неизвестного величину μ , получаем

$$(1.8) \quad \lambda_i = \frac{d_i}{d} \mu c, \quad d = |S_{ij} - \delta_{ij} \rho c^2|$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, d_i — определители, получающиеся из d заменой i -го столбца столбцом из $(-b_i)$.

В случае бесконечной скорости распределения тепла в теле ($\tau = 0$) соотношения (1.7) и условие обращения в нуль определителя системы (1.7) переписутся в виде

$$\rho c^2 \lambda_i = S_{ik} \lambda_k, \quad d = 0$$

При заданном v_i эти уравнения можно рассматривать как уравнения, определяющие действительные главные значения ρc_1^2 , ρc_2^2 , ρc_3^2 и ортогональные главные направления $l_i^{(1)}$, $l_i^{(2)}$, $l_i^{(3)}$ симметричного тензора второго ранга $C_{ijkl} v_j v_l$. Тогда величины λ_i на каждой из трех волновых поверхностях можно представить в виде

$$(1.9) \quad \lambda_i = \lambda l_i, \quad \lambda = \sqrt{\lambda_i \lambda_i}$$

У величин λ_i , λ , l_i для простоты опущен индекс, указывающий на порядковый номер волновой поверхности.

2. Исследуем изменение характеристических величин волн ускорений в процессе распространения.

Дифференцируя (1.1) и (1.3) по t , (1.2) по x_j и (1.5) по t и x_j и взяв их разность на разных сторонах волновой поверхности, получаем

$$(2.1) \quad [q_{j,j}] + c_\epsilon [\theta^{**}] + T_0 \beta_{ij} [v_{i,j}^{\ddot{}}] = 0, \quad \tau [q_{j,j}] + [q_{j,j}] + K_{ij} [\theta_{,ij}] = 0$$

$$(2.2) \quad [\sigma_{i,j}] = \rho [v_i^{\ddot{}}], \quad [\sigma_{ij,j}] = C_{ijkl} [v_{k,lj}] - \beta_{ij} [\theta_{,j}]$$

Исключая из (2.1) величины $[q_{j,j}]$, а из (2.2) — $[\delta_{ij,j}]$, найдем

$$(2.3) \quad -[q_{j,j}] + \tau c_\epsilon [\theta^{**}] + T_0 \tau \beta_{ij} [v_{i,j}^{\dot{}}] - K_{ij} [\theta_{,ij}] = 0$$

$$(2.4) \quad \rho [v_i^{\ddot{}}] = C_{ijkl} [v_{k,lj}] - \beta_{ij} [\theta_{,j}]$$

Используя кинематические и геометрические условия совместности второго порядка [5, 6], из (2.3) и (2.4) получим дифференциальное уравнение для определения характеристических величин

$$(2.5) \quad \rho c \frac{\delta \lambda_i^2}{\delta t} + \lambda_i^2 \frac{\delta c}{\delta t} + C_{ijkl} \lambda_i g^{\alpha\beta} \lambda_{k,\alpha} (v_l x_{j,\beta} + v_j x_{l,\beta}) - \\ - C_{ijkl} \lambda_i \lambda_k g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{j,\beta} x_{l,\tau} - b_i \lambda_i \frac{\delta \mu}{\delta t} + \beta_{ij} \lambda_i g^{\alpha\beta} (c\mu)_{,\alpha} x_{j,\beta} + \\ + (T_0 \tau)^{-1} K_{ij} g^{\alpha\beta} \mu_{,\alpha} (v_i x_{j,\beta} + v_j x_{i,\beta}) - (T_0 \tau)^{-1} \mu^2 K_{ij} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{i,\beta} x_{j,\tau} - \\ - \mu b_i \frac{\delta \lambda_i}{\delta t} + \mu \beta_{ij} g^{\alpha\beta} (c\lambda_i)_{,\alpha} x_{j,\beta} + T_0^{-1} c_\epsilon c \frac{\delta \mu^2}{\delta t} + \\ + T_0^{-1} c_\epsilon \mu^2 \frac{\delta c}{\delta t} + (T_0 \tau)^{-1} a^2 c_\epsilon c^{-1} \mu^2 = 0$$

Здесь $g^{\alpha\beta}$ — контравариантный метрический тензор волновой поверхности, $b_{\alpha\sigma}$ — коэффициенты второй квадратичной формы этой поверхности, y_α — криволинейные коэффициенты на поверхности, индексы $\alpha, \beta, \sigma, \tau = 1, 2$, индекс $\delta/\delta t$ означает δ -дифференцирование по t [5].

Выражая в соотношении (2.5) величины λ_i через μ по формуле (1.8), получим]

$$(2.6) \quad A_1 \frac{\delta \mu^2}{\delta t} + B_{1\alpha} \mu_{,\alpha}^2 + D_1 \mu^2 = 0, \quad A_1 = \rho c^3 d_k d_k d^{-2} + T_0^{-1} c_\epsilon c^{-1} a^2 \\ B_{1\alpha} = \frac{1}{2} c^2 C_{ijkl} d_i d_k d_k d^{-2} g^{\alpha\beta} (v_l x_{j,\beta} + v_j x_{l,\beta}) + c^2 d_i d^{-1} g^{\alpha\beta} x_{j,\beta} \beta_{ij} + \\ + (T_0 \tau)^{-1} K_{ij} v_i x_{j,\beta} g^{\alpha\beta} \\ D_1 = (T_0 \tau)^{-1} c_\epsilon c^{-1} a^2 - g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{l,\beta} x_{j,\tau} [(T_0 \tau)^{-1} K_{ij} + C_{ijkl} c^2 d_i d_k d^{-2}] + \\ + \rho c \delta (d_k d_k d^{-2} c^2) / \delta t + (d_k d_k d^{-2} c^2 + T_0^{-1} c_\epsilon) \delta c / \delta t - b_i \delta (d_i d^{-1} c) / \delta t + \\ + C_{ijkl} d_i d^{-1} c g^{\alpha\beta} (d_k d^{-1} c)_{,\alpha} (v_l x_{j,\beta} + v_j x_{l,\beta}) + \\ + \beta_{ij} d_i d^{-1} c g^{\alpha\beta} c_{,\alpha} x_{j,\alpha} + g^{\alpha\beta} \beta_{ij} (c^2 d_i d^{-1})_{,\alpha} x_{j,\beta}$$

Для бесконечной скорости распространения тепла ($\tau = 0$), выражая в уравнениях (2.5) величины λ_i через λ по формуле (1.9), получаем

$$(2.7) \quad A_2 \frac{\delta \lambda^2}{\delta t} + B_{2\alpha} \lambda_{,\alpha}^2 + D_2 \lambda^2 = 0, \quad A_2 = \rho c_1 B_{2\alpha} = C_{ijkl} l_i l_k v_l x_{j,\beta} g^{\alpha\beta}$$

$$D_2 = \rho \frac{\delta c}{\delta t} + C_{ijkl} (l_i l_k)_{,\alpha} v_l x_{j\beta} g^{\alpha\beta} - C_{ijkl} l_i l_k x_{l\tau} x_{j\beta} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} +$$

$$+ c T_0 (b_k l_k)^2 (K_{ij} v_i v_j)^{-1}$$

Из соотношений (2.6) и (2.7) следует, что изменение характеристических величин волн ускорений всех типов существенным образом зависит от направления распространения волновой поверхности.

В общем случае решение уравнений (2.6) и (2.7) связано с громоздкими вычислениями. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением плоских волн. Если на волновой поверхности выбрать декартову ортогональную систему координат, то уравнения (2.6) и (2.7) запишутся в виде (по γ суммирование не производится)

$$(2.8) \quad \frac{\delta X_\gamma}{\delta t} + \Omega_{\gamma\alpha} X_{\gamma,\alpha} + W_\gamma X_\gamma = 0, \quad \gamma = 1, 2 \quad (X_1 = \mu^2, X_2 = \lambda^2)$$

Здесь

$$\Omega_{1\alpha} = [1/2 c^2 C_{ijkl} d_i d_k d^{-2} (v_l \cos(j, \alpha) + v_j \cos(l, \alpha) +$$

$$+ c^2 d_i d^{-1} \beta_{ij} \cos(j, \alpha) + (T_0 \tau)^{-1} K_{ij} v_i \cos(j, \alpha)] (\rho c^3 d_k d_k d^{-2} +$$

$$+ T_0^{-1} c_\epsilon c^{-1} a^2)^{-1}$$

$$W_1 = (T_0 \tau)^{-1} c_\epsilon c^{-1} a^2 (\rho c^3 d_k d_k d^{-2} + T_0^{-1} c_\epsilon c^{-1} a^2)^{-1}$$

$$\Omega_{2\alpha} = C_{ijkl} l_i l_k v_l \cos(j, \alpha) (\rho c)^{-1}, \quad W_2 = T_0 (b_k l_k)^2 (\rho K_{ij} v_i v_j)^{-1}$$

Проинтегрируем уравнения (2.8.) вдоль характеристик. Характеристические поверхности имеют вид ($y_{\alpha 0}$ — произвольная постоянная)

$$(2.9) \quad y_\alpha = \Omega_{\gamma\alpha} t + y_{\alpha 0}$$

Вдоль характеристик величины X_γ изменяются по закону ($X_{\gamma 0}$ — некоторая постоянная)

$$(2.10) \quad X_\gamma = X_{\gamma 0} \exp\{-W_\gamma t\}$$

Из уравнений (2.9), (2.10) видно, что величина $\Omega_{\gamma\alpha}$ характеризует отклонение волновых трубок от вектора нормали к волновой поверхности, а W_γ определяет затухание возмущения X_γ вдоль волновых трубок.

3. В качестве примера рассмотрим затухание плоских волн в гексагональном кристалле цинка [7, 8].

Для простоты будем считать, что вектор нормали v_i ортогонален оси x_1 , которая является осью симметрии второго порядка [7], т. е. $v_1 = 0$. Ортогональную декартову систему координат в плоскости волны выбираем так, что ось y_1 параллельна оси x_1 . Условие обращения в нуль определителя системы (1.7) в этом случае имеет вид

$$(3.1) \quad \rho c^2 - S_{11} = 0, \quad c^6 - mc^4 + nc^2 + p = 0$$

$$m = a^2 + \rho^{-1} [S_{22} + S_{33} + T_0 c_\epsilon^{-1} (b_2^2 + b_3^2)]$$

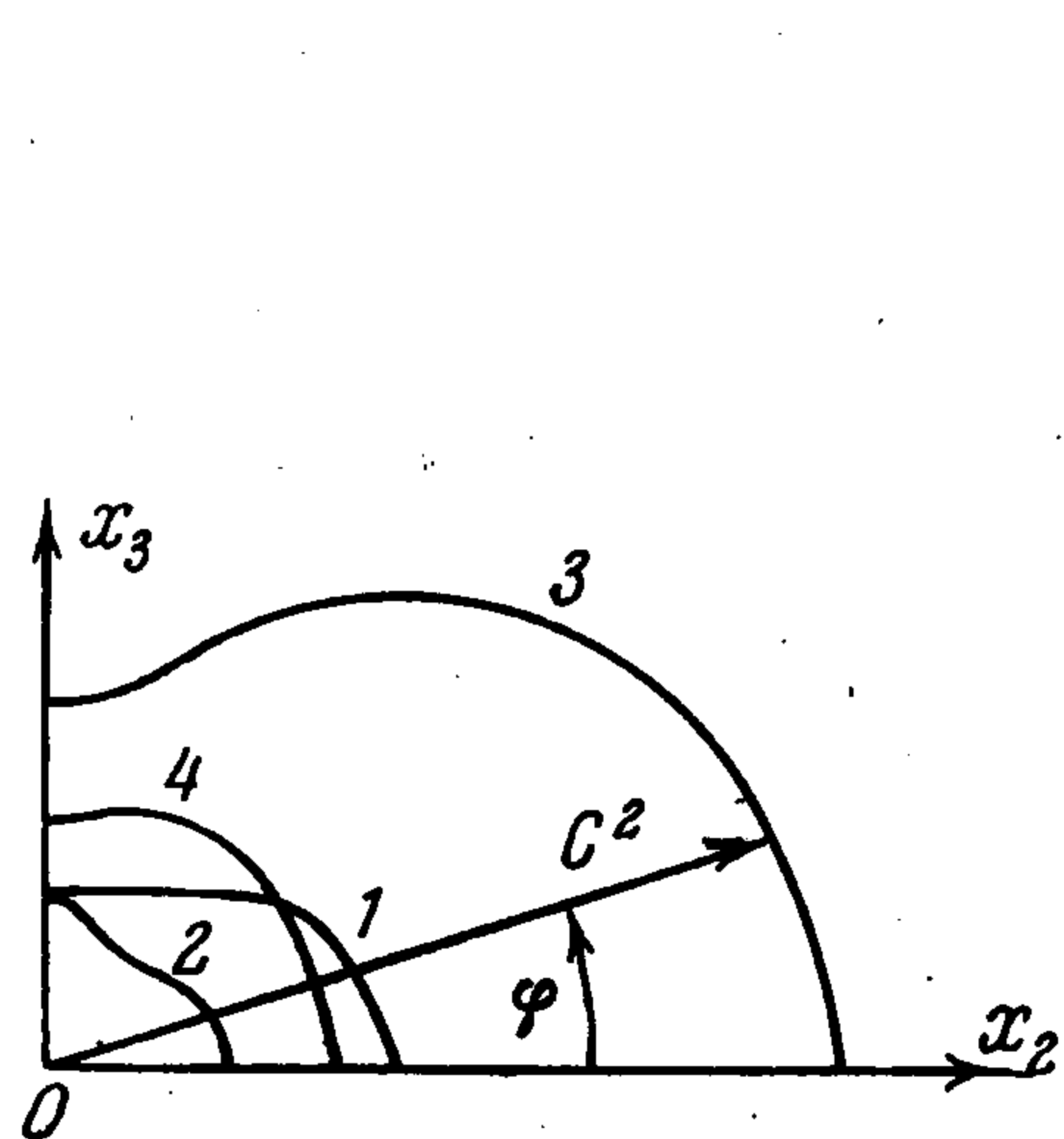
$$n = a^2 \rho^{-1} (S_{22} + S_{33}) + \rho^{-2} [S_{22} S_{33} - S_{23}^2 + (T_0 c_\epsilon^{-1}) \times$$

$$\times (S_{33} b_2^2 + S_{22} b_3^2 - 2 S_{23} b_2 b_3)]$$

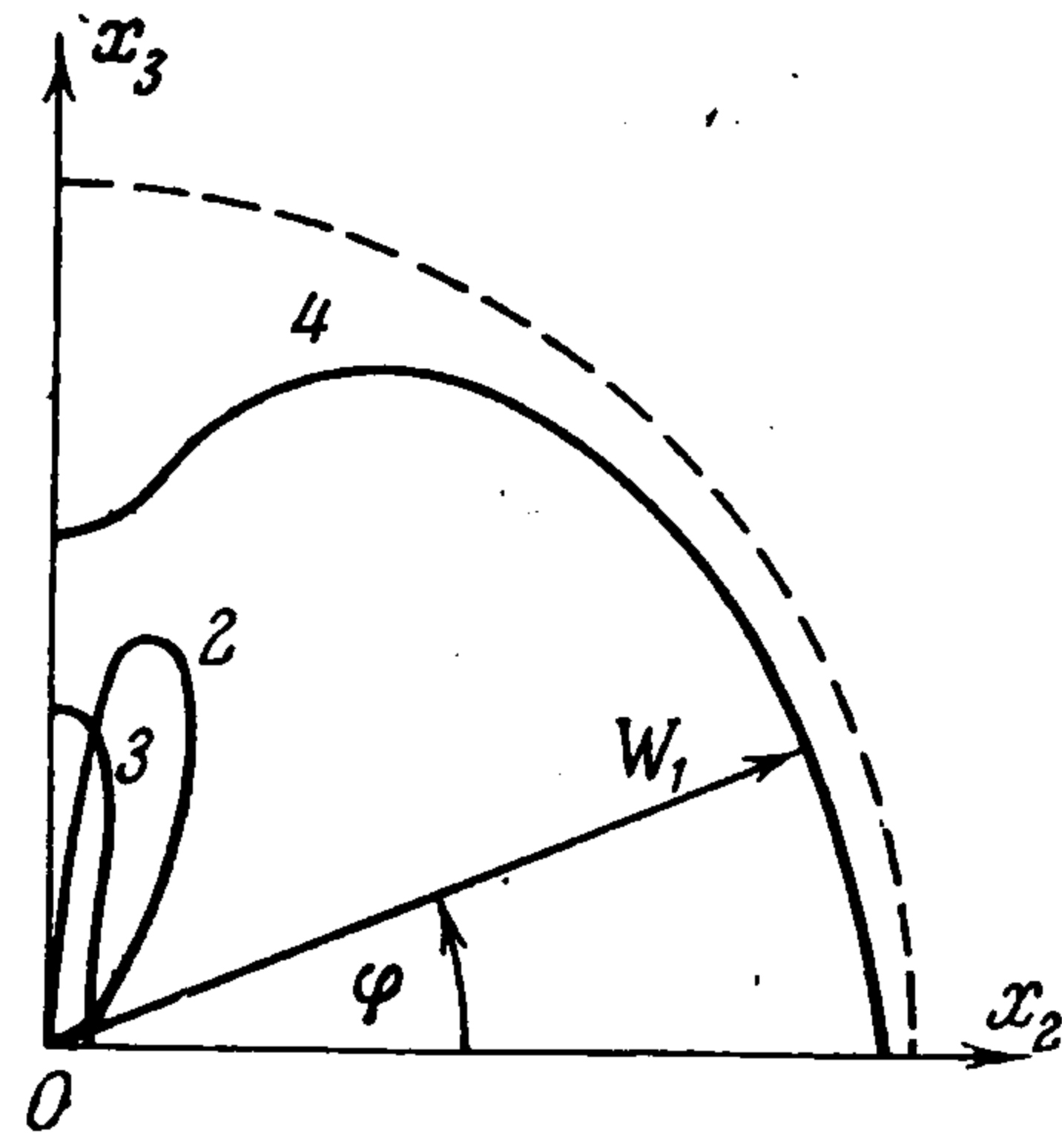
$$p = a^2 \rho^{-2} (S_{23}^2 - S_{22} S_{33})$$

Из (1.7) следует, что со скоростью $c_1 = S_{11}^{1/2} \rho^{1/2}$ распространяется чисто поперечная волна ($\mu = 0, \lambda_i v_i = 0$). Другие типы волн, скорости которых определяются вторым уравнением в (3.1), классифицируем следующим образом: волну, которая вдоль главных направлений $v_2 = 0, v_3 = 0$ является чисто поперечной, назовем квазипоперечной (скорость ее обозначим через c_2), а две другие, являющиеся продольными вдоль этих направлений, назовем квазипродольными [9] (скорости их c_3, c_4).

Зависимость квадратов скоростей от угла φ ($v_2 = \cos \varphi, v_3 = \sin \varphi$) представлена на фиг. 1 (здесь и далее ввиду симметрии показана лишь область первого квадранта).



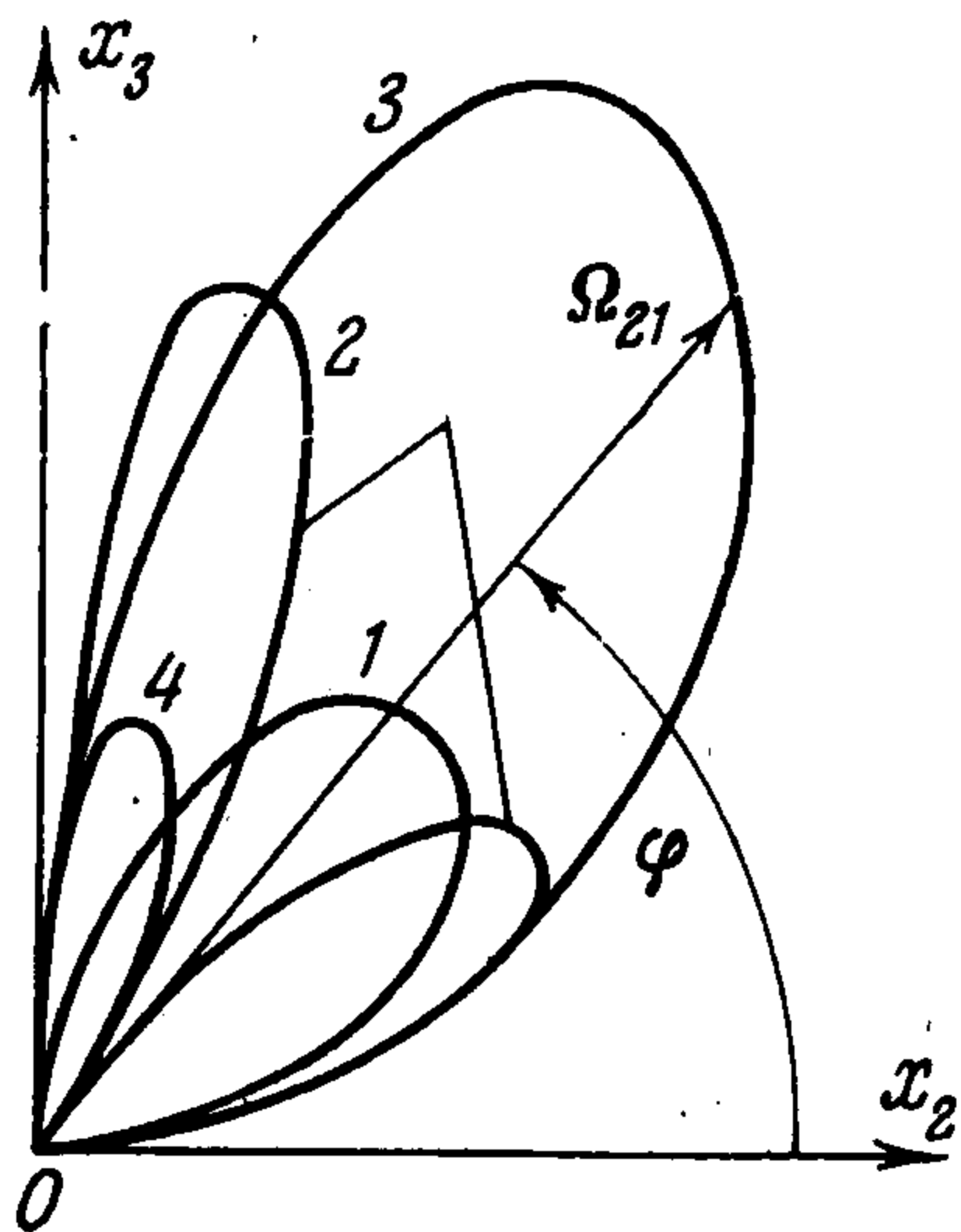
Фиг. 1



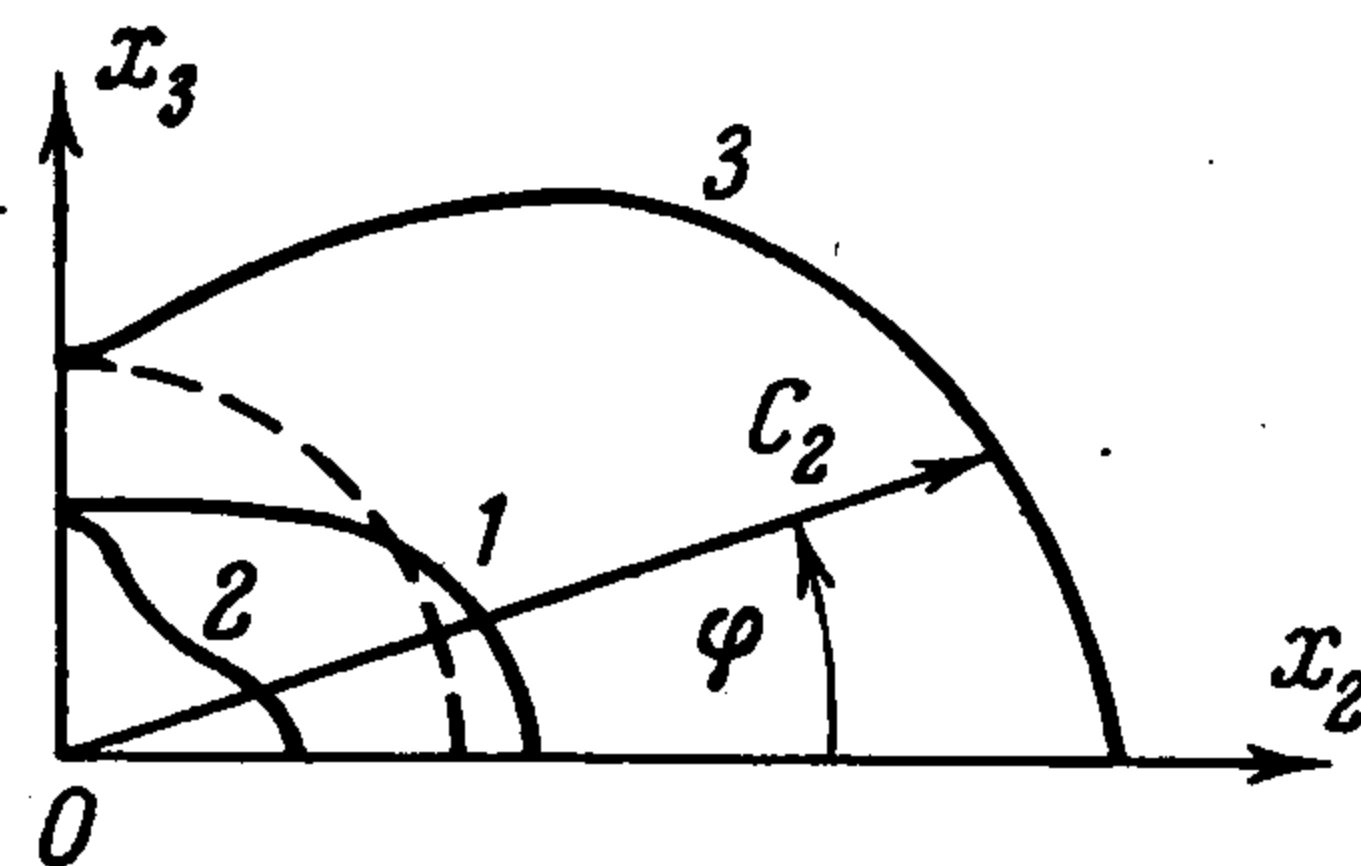
Фиг. 2

Кривые 1—4 соответствуют скоростям $c_1 - c_4$. Значение времени релаксации принималось равным $\tau = 0,5 \cdot 10^{-11}$ сек [10].

Из фиг. 1 видно, что скорости поперечных волн c_1 и c_2 вдоль главного направления $v_2 = 0$ совпадают. При $\varphi \approx 37^\circ$ совпадают скорости поперечной c_1 и квазипродольной c_4 волн. Для поперечной волны, распространяющейся со скоростью c_1 , единственная



Фиг. 3



Фиг. 4

отличная от нуля величина λ_1 определяется уравнением

$$(3.2) \quad \rho c \frac{\delta \lambda_1}{\delta t} + \lambda_{1,2} (C_{1212} - C_{1313}) v_2 v_3 = 0$$

Следовательно, поперечная волна не затухает, а волновые трубки отклоняются от вектора нормали.

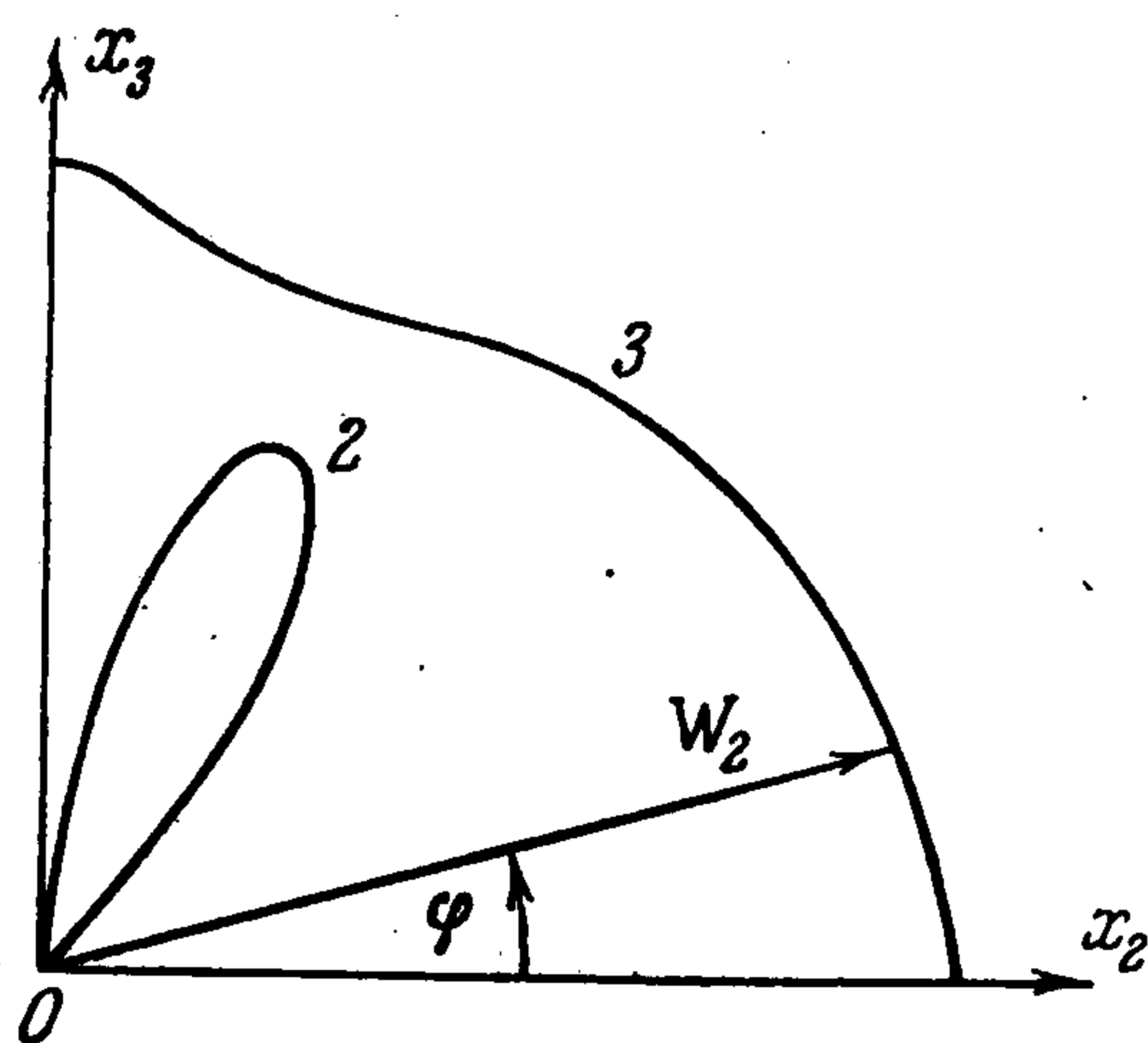
В случае кратных скоростей ($c_1 = c_2$) $\lambda_3 = \mu = 0$, а λ_1 и λ_2 удовлетворяют уравнению

$$(3.3) \quad 2\rho c \frac{\delta \lambda_\gamma}{\delta t} + C_{\gamma j \beta l} \lambda_{\beta, \alpha} [v_l \cos(j, \alpha) + v_j \cos(l, \alpha)] = 0$$

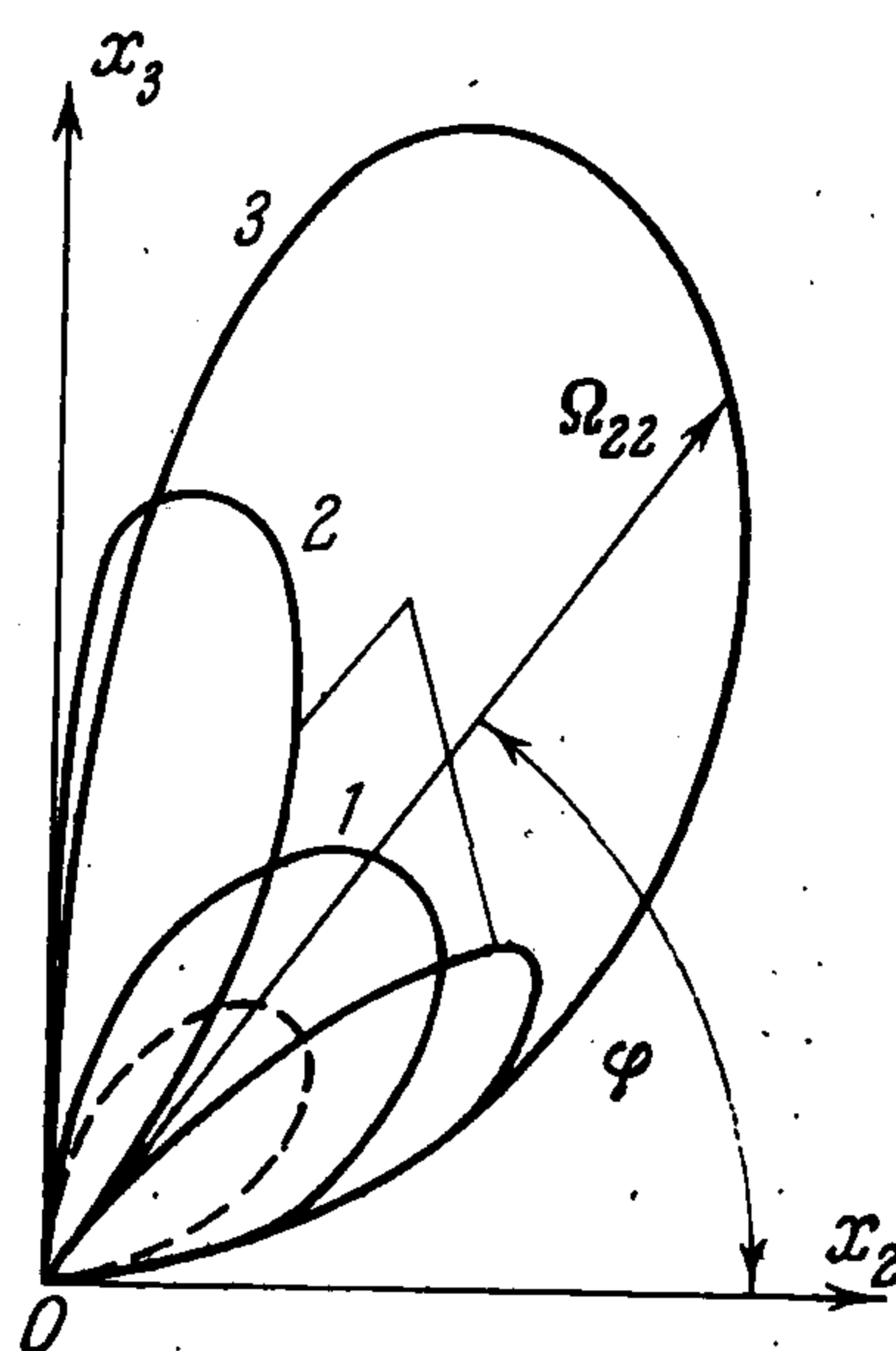
Можно убедиться в том, что второе слагаемое в (3.3) равно нулю, поэтому решение (3.3) дает $\lambda_1 = \text{const}$, $\lambda_2 = \text{const}$.

В случае кратных скоростей ($c_1 = c_4$) величина λ_1 удовлетворяет уравнению (3.2), а λ_2 , λ_3 и μ определяются из (2.8).

На фиг. 2,3 приведены зависимости коэффициентов затухания W_1 и величины Ω_{12} , характеризующей отклонение волновых трубок от вектора нормали к волновой поверхности, от угла φ . Видно, что наиболее быстро затухает квазипродольная волна, распространяющаяся со скоростью c_4 , минимальное затухание имеет квазипоперечная волна (кривая 2 на фиг. 2 увеличена в 20 раз): Следует заметить, что волновые трубки отклоняются только в плоскости x_2x_3 , а величина $\Omega_{\gamma 1}$ равна нулю. Максимальное отклонение у квазипродольной волны, имеющей скорость c_3 . Отклонение квазипоперечной волны, начиная с угла $\varphi \approx 52^\circ$, меняет знак и становится отрицательным. Величина Ω_{12} при переходе через угол $\varphi \approx \pi/2$ изменяет знак для всех типов волн.



Фиг. 5



Фиг. 6

В случае бесконечной скорости распределения тепла в кристалле цинка распространяется поперечная волна со скоростью c_1 , совпадающей со скоростью поперечной волны в случае $\tau \neq 0$, а также квазипоперечная со скоростью c_2 и квазипродольная со скоростью c_3 .

Зависимость скоростей, коэффициентов затухания W_2 и величины Ω_{22} от угла φ приведены на фиг. 4—6 соответственно. Кривые 1—3 соответствуют скоростям c_1 — c_3 . Кривая 2 на фиг. 5 увеличена в шесть раз.

Из графиков видно, что конечность скорости распространения тепла существенным образом влияет на характер распространения плоских волн, особенно на поведение их коэффициентов затухания.

В заключение рассмотрим несвязную задачу, учитывая конечность скорости распространения тепла. В этом случае в кристалле существует четыре типа волн ускорений. Три из них распространяются со скоростями упругих волн (фиг. 4), а одна со скоростью $c = a$. Для упругих волн изменение характеристической величины λ_3 определяется уравнением (2.8), в котором нужно положить $T_0 = 0$. Видно, что эти волны не затухают, а отклонение волновых трубок в точности совпадает со случаем $\tau = 0$ (фиг. 6). В случае $c = a$ изменение характеристической величины μ определяется уравнением

$$2\tau c_\epsilon a \frac{\delta\mu}{\delta t} + K_{ij} g^{\alpha\beta} \mu_{,\alpha} (v_i x_{j,\beta} + v_j x_{i,\beta}) + a c_\epsilon \mu = 0$$

Зависимость квадрата скорости a , коэффициента затухания W и отклонения волновых трубок Ω от угла φ показаны пунктирными линиями на фиг. 4, 2, 6 соответственно. Видно, что скорость и затухание тепловой волны в кристалле цинка слабо зависят от направления распространения.

Таким образом, характерной особенностью распространения волн ускорений в анизотропной среде является отклонение волновых трубок от вектора нормали. При $\tau = 0$ появляется вторая квазипродольная волна, которая затухает быстрее первой. Время релаксации τ оказывает существенное влияние на характер распространения квазипродольных и квазипоперечных волн.

Поступила 24 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Динамические задачи термовязкоупругости. М., «Мир», 1970.
2. *Dillon O. W.* Thermoelasticity when the material coupling parameter equals unity. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 2.
3. *Попов Е. Б.* Динамическая связанная задача термоупругости для полупространства с учетом конечности скорости распространения тепла. ПММ, 1967, т. 31, № 2.
4. *Achenbach I. D.* The influence of heat conduction on propagating stress jumps. J. Mech and Phys. Solids, 1968, vol. 16, No. 4.
5. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
6. *Иелев Д. Д., Быковцев Г. И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М., «Наука», 1971.
7. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М., «Мир», 1967.
8. International critical tables of numerical data. Physics, chemistry and technology, vol. 1—7. New-York — London Mc Graw-Hill, 1926—1929.
9. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.
10. *Lord H. W., Shulman Y.* A generalised dynamical theory of thermoelasticity. J. Mech. and Phys. Solids, 1967, vol. 15, No. 5.