Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3

ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ КОНТОРОВИЧА — ЛЕБЕДЕВА

Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская

(Ленинград)

Исследуются парные интегральные уравнения, связанные с интегральным преобразованием Конторовича — Лебедева, возникающие при решении смешанных краевых задач математической физики, в частности, смешанных задач теории упругости для клиновидных областей. Показывается, что решения этих уравнений могут быть выражены в квадратурах через вспомогательные функции, удовлетворяющие интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром.

В настоящее время наиболее подробно исследованы парные уравнения, связанные с интегральными преобразованиями Фурье и Ханкеля; результаты и их приложения изложены в монографиях [1–3]. Большое число работ посвящено также теории и приложениям парных интегральных уравнений, связанных с интегральным преобразованием Мелера — Фока и его обобщениями [4–11].

Рассматриваемые в данной работе парные интегральные уравнения принадлежат к более сложному классу, чем названные выше типы уравнений, и их эффективного решения до настоящего времени не было получено. Единственные результаты в этой области, известные авторам, содержатся в работах [12,13]. В работе [12] предложен способ решения уравнений (1.2) для специального значения параметра $\gamma = \pi/2$. В работе [13] парные уравнения рассматриваемого типа сведены к решению систем бесконечного числа линейных алгебраических уравнений.

1. Формулировка задачи. Рассматриваются парные интегральные уравнения, возникающие в связи с применением преобразования Конторовича — Лебедева к решению смешанных краевых задач для клиновидных областей. Эти уравнения имеют вид (1.1) или (1.2)

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty M(\tau)\,\omega(\tau)\,K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau = rg(r), \quad 0<r<a \\ &\int_0^\infty M(\tau)\,K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau = f(r), \quad a<r<\infty \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty M(\tau)\,K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau = f(r), \quad 0<r<a \\ &\int_0^\infty M(\tau)\,\omega(\tau)\,K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau = rg(r), \quad a<r<\infty \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $(r\ \varphi\ z)$ — система цилиндрических координат, ось z которой совпадает с ребром клина $(0<r<\infty,\ -\gamma<\varphi<\gamma,\ -\infty<z<\infty)$, $K_{i\tau}(\lambda r)$ — функция Макдональда с мнимым индексом, $f(r)$ и $g(r)$ — заданные функции, $\omega(\tau)$ — весовая функция, имеющая значения

$$\omega(\tau) = \tau \operatorname{th} \gamma\tau, \quad \omega(\tau) = \tau \operatorname{cth} \gamma\tau \tag{1.3}$$

в зависимости от того, является краевая задача четной или нечетной относительно переменной φ. Параметр λ предполагается вещественным и положительным.

2. Некоторые разрывные интегралы, содержащие произведения цилиндрических функций. Техника решений парных интегральных уравнений основывается на использовании разрывных интегралов, вид которых определяется ядром интегрального преобразования, порождающего данный тип парных уравнений. В случае уравнений (1.1) и (1.2) эти интегралы имеют вид (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) соответственно

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \operatorname{ch}\pi\tau\,\varkappa^+(\lambda t, i\tau)\,K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda(t-r)}}{\sqrt{\lambda(t-r)}}, & r<t \\ 0, & r>t \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \tau\operatorname{sh}\pi\tau\int_0^t \varkappa^+(\lambda s, i\tau)\,ds K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau = \tag{2.2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{r}e^{-\lambda r}}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\pi}r\Phi(\sqrt{\lambda r}), & r<t \\ \dfrac{\sqrt{r}e^{-\lambda r}}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\pi}r\Phi(\sqrt{\lambda r}) - \\ -\dfrac{re^{-\lambda(r-t)}}{\sqrt{\lambda(r-t)}} - \sqrt{\pi}r\Phi(\sqrt{\lambda(r-t)}), & r>t \end{cases}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \operatorname{sh}\pi\tau\,\varkappa^-(\lambda t, i\tau)\,K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau = \begin{cases} 0, & r<t \\ \dfrac{e^{-\lambda(r-t)}}{\sqrt{\lambda(r-t)}}, & r>t \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \tau\operatorname{ch}\pi\tau\int_0^t \varkappa^-(\lambda s, i\tau)\,ds K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau = \tag{2.4}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{re^{-\lambda(t-r)}}{\sqrt{\lambda(t-r)}} + \sqrt{\pi}r\Phi(\sqrt{\lambda(t-r)}), & r<t \\ 0, & r>t \end{cases}$$

Здесь

$$\varkappa^+(\lambda t, i\tau) = \frac{K_{1/2+i\tau}(\lambda t) + K_{1/2-i\tau}(\lambda t)}{2}$$

$$\varkappa^-(\lambda t, i\tau) = \frac{K_{1/2+i\tau}(\lambda t) - K_{1/2-i\tau}(\lambda t)}{2i}$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-s^2)\,ds$$

Формулы (2.1)—(2.4) являются, по-видимому, новыми. Доказательство равенств (2.2)—(2.4) осуществляется путем разложения правых частей этих формул в интеграл Конторовича — Лебедева [14]

$$f(r) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \tau\operatorname{sh}\pi\tau K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau\int_0^\infty \frac{f(\rho)}{\rho}K_{i\tau}(\lambda\rho)\,d\rho, \quad 0<r<\infty \tag{2.5}$$

Справедливость равенства (2.1) устанавливается аналогичным образом с помощью разложения

$$f(r)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \tau\operatorname{sh}\pi\tau K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau\left[\frac{\pi f(0)}{\tau\operatorname{sh}\pi\tau}+\right. \tag{2.6}$$

$$\left.+\int_0^\infty \frac{f(\rho)-f(0)e^{-\lambda\rho}}{\rho}K_{i\tau}(\lambda\rho)\,d\rho\right],\quad 0<r<\infty$$

обобщающего формулу (2.5) на случай, когда $f(r)$ при $r\to 0$ стремится к пределу, отличному от нуля.

Полученные соотношения (2.1)—(2.4) играют в теории уравнений (1.1), (1.2) такую же роль, как разрывные интегралы Сонина для парных интегральных уравнений, связанных с преобразованием Ханкеля, и интегралы Мелера для уравнений, связанных с преобразованием Мелера — Фока.

3. Решение парных интегральных уравнений (1.1). При решении уравнений (1.1) можно, не теряя общности, считать функцию $g(r)=0$. Действительно, с помощью подстановки

$$M(\tau)=N(\tau)+P(\tau),\qquad P(\tau)=\frac{2}{\pi^2}\frac{\tau\operatorname{sh}\pi\tau}{\omega(\tau)}\int_0^a g(r)K_{i\tau}(\lambda r)\,dr$$

рассматриваемые уравнения преобразуются в уравнения того же вида относительно функции $N(\tau)$, правые части которых, на основании теоремы разложения (2.5), соответственно будут

$$r\bar g(r)=0,\qquad \bar f(r)=f(r)-\int_0^\infty P(\tau)K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau$$

Таким образом, достаточно исследовать уравнения (1.1) при $g(r)=0$, что и предполагается в дальнейшем.

Будем искать решение этих уравнений в форме

$$M(\tau)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\frac{\tau\operatorname{sh}\pi\tau}{\omega(\tau)}\int_a^\infty \varphi(t)\varkappa^+(\lambda t,i\tau)\,dt \tag{3.1}$$

где $\varphi(t)$ — функция, непрерывная со своей первой производной в интервале $[a,\infty)$, стремящаяся к нулю при $t\to\infty$.

Интегрируя по частям, получаем

$$M(\tau)=-\frac{4}{\pi\sqrt{\pi}}\frac{\tau\operatorname{sh}\pi\tau}{\omega(\tau)}\varphi(a)\int_0^a \varkappa^+(\lambda s,i\tau)\,ds- \tag{3.2}$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\frac{\tau\operatorname{sh}\pi\tau}{\omega(\tau)}\int_a^\infty \varphi'(t)\,dt\int_0^t \varkappa^+(\lambda s,i\tau)\,ds$$

Подставляя (3.2) в первое из уравнений (1.1) ($g(r)=0$) и воспользовавшись равенством (2.2), находим, что данное уравнение удовлетворяется тождественно.

Подстановка (3.1) во второе из уравнений (1.1) приводит к интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно функции $\varphi(t)$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\int_a^\infty \varphi(t)\,dt\int_0^\infty \frac{\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau}{\omega(\tau)}\varkappa^+(\lambda t, i\tau)\,K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau = f(r), \quad a<r<\infty \tag{3.3}$$

В тех случаях, когда $\omega(\tau)$ определяется равенствами (1.3), уравнение (3.3) может быть преобразовано в интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Предположим для определенности, что $\omega(\tau) = \tau\,\mathrm{th}\gamma\tau$. Тогда

$$\frac{\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau}{\omega(\tau)} = \mathrm{ch}\,\pi\tau + \frac{\mathrm{sh}\,(\pi-\gamma)\,\tau}{\mathrm{sh}\,\gamma\tau}$$

и, на основании (2.1), уравнение (3.3) принимает вид

$$\int_r^\infty \varphi(t)\frac{e^{-\lambda(t-r)}}{\sqrt{\lambda(t-r)}}\,dt = F(r), \quad a<r<\infty \tag{3.4}$$

$$F(r) = f(r) - \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\int_a^\infty \varphi(s)\,ds\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,(\pi-\gamma)\,\tau}{\mathrm{sh}\,\gamma\tau}\varkappa^+(\lambda s, i\tau)\,K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau$$

Воспользовавшись формулами обращения Абеля, получаем

$$\varphi(t) = -\frac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda t}}{\pi}\frac{d}{dt}\int_t^\infty F(r)\frac{e^{-\lambda r}}{\sqrt{r-t}}\,dr$$

При помощи соотношения (оно получается путем обращения формулы (2.2) и последующего дифференцирования по параметру t)

$$-\frac{e^{\lambda t}}{\sqrt{2\pi\lambda}}\frac{d}{dt}\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda r}K_{i\tau}(\lambda r)}{\sqrt{r-t}}\,dr = \varkappa^+(\lambda t, i\tau)$$

приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром

$$\varphi(t) = -\frac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda t}}{\pi}\frac{d}{dt}\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda r}f(r)}{\sqrt{r-t}}\,dr - \frac{\lambda}{\pi}\int_a^\infty \varphi(s)\,K(s,t)\,ds, \quad a\leqslant t<\infty \tag{3.5}$$

$$K(s,t) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,(\pi-\gamma)\,\tau}{\mathrm{sh}\,\gamma\tau}\varkappa^+(\lambda s, i\tau)\,\varkappa^+(\lambda t, i\tau)\,d\tau, \quad 0<\gamma\leqslant\pi \tag{3.6}$$

Для $\omega(\tau) = \tau\,\mathrm{cth}\,\gamma\tau$ аналогичные вычисления приводят к интегральному уравнению

$$\varphi(t) = -\frac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda t}}{\pi}\frac{d}{dt}\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda r}f(r)}{\sqrt{r-t}}\,dr + \frac{\lambda}{\pi}\int_a^\infty \varphi(s)\,K(s,t)\,ds, \quad a\leqslant t<\infty \tag{3.7}$$

$$K(s,t) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}\,(\pi-\gamma)\,\tau}{\mathrm{ch}\,\gamma\tau}\varkappa^+(\lambda s, i\tau)\,\varkappa^+(\lambda t, i\tau)\,d\tau, \quad 0<\gamma<\pi \tag{3.8}$$

При специальных значениях угла γ ядра (3.6) и (3.8) могут быть выражены через известные функции. В частности, для ядра (3.6) это имеет место для всех $\gamma = \pi/n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Например

$$
\begin{aligned}
(3.9)\qquad & \gamma = \pi, \ K(s, t) = 0 \\
& \gamma = \pi/2, \ K(s, t) = K_0(\lambda(s+t)) + K_1(\lambda(s+t)) \\
& \gamma = \pi/3, \ K(s, t) = \\
& = \sqrt{3}K_0(\lambda\sqrt{s^2+t^2+st}) + \frac{\sqrt{3}\,(s+t)}{\sqrt{s^2+t^2+st}}K_1(\lambda\sqrt{s^2+t^2+st})
\end{aligned}
$$

и т. д.

Для ядра (3.8) аналогичные результаты получаются при $\gamma = \pi/2n$, $n = 1, 2, \ldots$

$$
\begin{aligned}
(3.10)\qquad & \gamma = \pi/2, \ K(s, t) = K_0(\lambda(s+t)) + K_1(\lambda(s+t)) \\
& \gamma = \pi/4, \quad K(s, t) = \sqrt{2}\,K_0(\lambda\sqrt{s^2+t^2}) + \\
& + \frac{\sqrt{2}(s+t)}{\sqrt{s^2+t^2}}K_1(\lambda\sqrt{s^2+t^2}) - K_0(\lambda(s+t)) - K_1(\lambda(s+t))
\end{aligned}
$$

и т. д.

К интегральным уравнениям (3.5) и (3.7) применим процесс итераций, быстро сходящийся для не слишком малых значений параметра $\lambda\, a$. В частности, для значений $\pi/2 \leqslant \gamma \leqslant \pi$ из формул (3.6) и (3.8) следуют оценки [1]

$$
\begin{aligned}
(3.11)\qquad & K^2(s, t) \leqslant [K_0(2\lambda s) + K_1(2\lambda s)]\,[K_0(2\lambda t) + K_1(2\lambda t)] \\
& \| K(s, t) \| \leqslant \frac{1}{\lambda}K_0(2\lambda a)
\end{aligned}
$$

и применение общей теории интегральных уравнений приводит к следующему критерию сходимости итерационного процесса:

$$
(3.12)\qquad K_0(2\lambda a) < \pi
$$

Последнее неравенство выполняется, если $\lambda\, a > 0{,}025$. Чем больше значение параметра $\lambda\, a$, тем быстрее сходится процесс итераций.

После построения решений интегральных уравнений (3.5) и (3.7) решения соответствующих парных уравнений (1.1) даются формулой (3.1).

4. Решение парных интегральных уравнений (1.2). В рассматриваемом случае можно ограничиться исследованием уравнений с $f(r) = 0$. Общий случай приводится к данному частному случаю с помощью подстановки

$$
M(\tau) = N(\tau) + Q(\tau)
$$

$$
Q(\tau) = \frac{2}{\pi}f(0) + \frac{2}{\pi^2}\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau\int_0^a \frac{f(r) - f(0)\,e^{-\lambda r}}{r}K_{i\tau}(\lambda r)\,dr +
$$

$$
+ \frac{2}{\pi^2}\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau\int_a^\infty \frac{f(a)e^{-\lambda(r-a)} - f(0)\quad e^{-\lambda r}}{r}K\,i\tau(\lambda r)\,dr
$$

[1] При выводе неравенств (3.11) используется известное значение интеграла (3.6) при $\gamma = \pi/2$, а также соотношение $K_0(x) \leqslant K_1(x)$.

Правые части трансформированных уравнений, на основании формулы (2.6), соответственно будут

$$\bar{f}(r) = 0, \quad r\bar{g}(r) = rg(r) - \int_0^\infty Q(\tau)\,\omega(\tau)\,K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнений (1.2) при $f(r) = 0$. Решение этих уравнений ищется в форме

$$M(\tau) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sh}\,\pi\tau \int_a^\infty \varphi(t)\,\varkappa^-(\lambda t, i\tau)\,dt \tag{4.1}$$

где $\varphi(t)$ непрерывна вместе с первой производной на интервале $[a, \infty)$ и стремится к нулю при $t \to \infty$.

На основании равенства (2.3) однородное уравнение (1.2) ($f(r) = 0$) удовлетворяется тождественно.

Представив (4.1) в виде

$$M(\tau) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sh}\,\pi\tau \int_a^\infty \varphi(t)\,d\int_0^t \varkappa^-(\lambda s, i\tau)\,ds$$

получаем, после интегрирования по частям и подстановки в неоднородное уравнение, соотношение

$$\begin{gathered} -\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\varphi(a)\int_0^\infty \mathrm{sh}\,\pi\tau\,\omega(\tau)\int_0^a \varkappa^-(\lambda s, i\tau)\,ds K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau - \\ -\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\int_a^\infty \varphi'(t)\,dt\int_0^\infty \mathrm{sh}\,\pi\tau\,\omega(\tau)\int_0^t \varkappa^-(\lambda s, i\tau)\,ds K_{i\tau}(\lambda r)\,d\tau = rg(r) \\ a < r < \infty \end{gathered} \tag{4.2}$$

Дальнейшие вычисления зависят от вида функции $\omega(\tau)$. Если $\omega(\tau) = \tau\,\mathrm{th}\,\gamma\tau$, то

$$\mathrm{sh}\,\pi\tau\omega(\tau) = \tau\,\mathrm{ch}\,\pi\tau - \tau\frac{\mathrm{ch}(\pi-\gamma)\tau}{\mathrm{ch}\,\gamma\tau}$$

и уравнение (4.2) на основании равенства (2.4) может быть записано в виде

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dr}e^{-\lambda r}\int_r^\infty \varphi(t)\frac{e^{-\lambda(t-r)}}{\sqrt{\lambda(t-r)}}\,dt = e^{-\lambda r}g(r) + \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}e^{-\lambda r}\int_a^\infty \varphi(s)\,ds \times \\ \times\int_0^\infty \tau\frac{\mathrm{ch}(\pi-\gamma)\tau}{\mathrm{ch}\,\gamma\tau}\varkappa^-(\lambda s, i\tau)\frac{K_{i\tau}(\lambda r)}{r}\,d\tau = e^{-\lambda r}F(r), \quad a < r < \infty \end{gathered} \tag{4.3}$$

Интегрируя по промежутку (r, ∞) и воспользовавшись формулами обращения Абеля, получаем

$$\begin{gathered} \varphi(t) = \frac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda t}}{\pi}\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda r}g(r)}{\sqrt{r-t}}\,dr + \\ + \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}e^{\lambda t}}{\pi^2\sqrt{\pi}}\int_a^\infty \varphi(s)\,ds\int_0^\infty \tau\frac{\mathrm{ch}(\pi-\gamma)\tau}{\mathrm{ch}\,\gamma\tau}\varkappa^-(\lambda s, i\tau)\,d\tau\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda r}K_{i\tau}(\lambda r)}{r\sqrt{r-t}}\,dr \end{gathered} \tag{4.4}$$

Вычислив внутренний интеграл по формуле (эта формула следует из равенства (2.3))

$$\frac{\tau e^{\lambda t}}{\sqrt{2\pi\lambda}}\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda r}K_{i\tau}(\lambda r)}{r\sqrt{r-t}}\,dr = \varkappa^-(\lambda t, i\tau)$$

приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda t}}{\pi}\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda r}g(r)}{\sqrt{r-t}}\,dr + \frac{\lambda}{\pi}\int_a^\infty \varphi(s)K(s,t)\,ds, \quad a\leqslant t<\infty \tag{4.5}$$

$$K(s,t) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\pi-\gamma)\tau}{\operatorname{ch}\gamma\tau}\varkappa^-(\lambda s, i\tau)\varkappa^-(\lambda t, i\tau)\,d\tau, \quad 0<\gamma\leqslant\pi \tag{4.6}$$

При $\omega(\tau) = \tau\operatorname{cth}\gamma\tau$ тем же способом получаем

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda t}}{\pi}\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda r}g(r)}{\sqrt{r-t}}\,dr - \frac{\lambda}{\pi}\int_a^\infty \varphi(s)K(s,t)\,ds, \quad a\leqslant t<\infty \tag{4.7}$$

$$K(s,t) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(\pi-\gamma)\tau}{\operatorname{sh}\gamma\tau}\varkappa^-(\lambda s, i\tau)\varkappa^-(\lambda t, i\tau)\,d\tau, \quad 0<\gamma\leqslant\pi \tag{4.8}$$

Найденные интегральные уравнения принадлежат к тому же типу, что и уравнения п. 3, и их решения могут быть получены с помощью метода итераций. При специальных значениях γ ядра рассматриваемых уравнений выражаются через известные функции. Так, например, ядро уравнения (4.5) при $\gamma = \pi/2n$ ($n = 1, 2, \ldots$) и ядро уравнения (4.7) при $\gamma = \pi/n$ ($n = 1, 2, \ldots$) могут быть представлены в замкнутой форме через функции Макдональда.

Метод приведения парных интегральных уравнений (1.1), (1.2), предложенный в данной работе, допускает распространение на весовые функции $\omega(\tau)$ более общего вида, асимптотическое поведение которых при $\tau\to\infty$ дается формулами

$$\omega(\tau)\approx\tau\operatorname{th}\pi\tau, \qquad \omega(\tau)\approx\tau\operatorname{cth}\pi\tau$$

5. Приложение к краевой задаче. В качестве примера рассмотрим задачу о построении функции $u = u(r, \varphi, z)$, гармонической в области $0<r<\infty$, $-\gamma<\varphi<\gamma$, $0<z<l$, удовлетворяющей смешанным граничным условиям

$$u|_{z=0} = u|_{z=l} = 0; \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\bigg|_{\substack{\varphi=\pm\gamma\\ r<a}} = 0, \quad u\big|_{\substack{\varphi=\pm\gamma\\ r>a}} = f(r,z)$$

Решение этой задачи дается формулой

$$u = \sum_{n=1}^\infty \sin\frac{n\pi z}{l}\int_0^\infty M_n(\tau)\frac{\operatorname{ch}\varphi\tau}{\operatorname{ch}\gamma\tau}K_{i\tau}\left(\frac{n\pi r}{l}\right)d\tau$$

где $M_n(\tau)$ удовлетворяют уравнениям (1.1) с $\omega(\tau) = \tau \operatorname{th} \gamma\tau$, $\lambda = n\pi/l$, $f(r) = f_n(r)$, $f_n(r)$ — коэффициенты разложения функции $f(r, z)$ в ряд Фурье, $g(r) = 0$.

Поступила 16 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sneddon I. N.* Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, North — Holland Publishing Company. 1966.
2. *Sneddon I. N., Lowengrub M.* Crack problems in the classical theory of elasticity. (New-York — London — Sydney — Toronto), Wiley, 1969.
3. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
4. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства. Инж.-физ. ж., 1963, № 10.
5. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Растяжение упругого пространства, ослабленного кольцевой трещиной. Прикл. механ., 1965, т. 1, вып. 10.
6. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
7. *Александрян М. А., Баблоян А. А.* О некоторых парных интегральных уравнениях по функциям Лежандра. Изв. АН АрмССР. Механика, 1967, т. 20, № 6.
8. *Руховец А. Н., Уфлянд Я. С.* Электростатическое поле пары тонких сферических оболочек (осесимметричная задача). Ж. техн. физ., 1965, т. 35, № 9.
9. *Руховец А. Н., Уфлянд Я. С.* Об одном классе парных интегральных уравнений и их приложениях в теории упругости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
10. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Распределение электричества на тонком гиперболоидальном сегменте. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 2.
11. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* О решении одного класса парных интегральных уравнений теории упругости и математической физики, связанных с преобразованием Мелера—Фока. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
12. *Singh B. M.* A formal solution of dual integral equations. Labdev J. Sci. Tech. 1971, vol. 9 — A, No. 1, p. 20.
13. *Александров В. М., Чебаков М. И.* Об одном методе решения парных интегральных уравнений. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.
14. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М., Физматгиз, 1963.