

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛОСКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЩЕЛЬ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

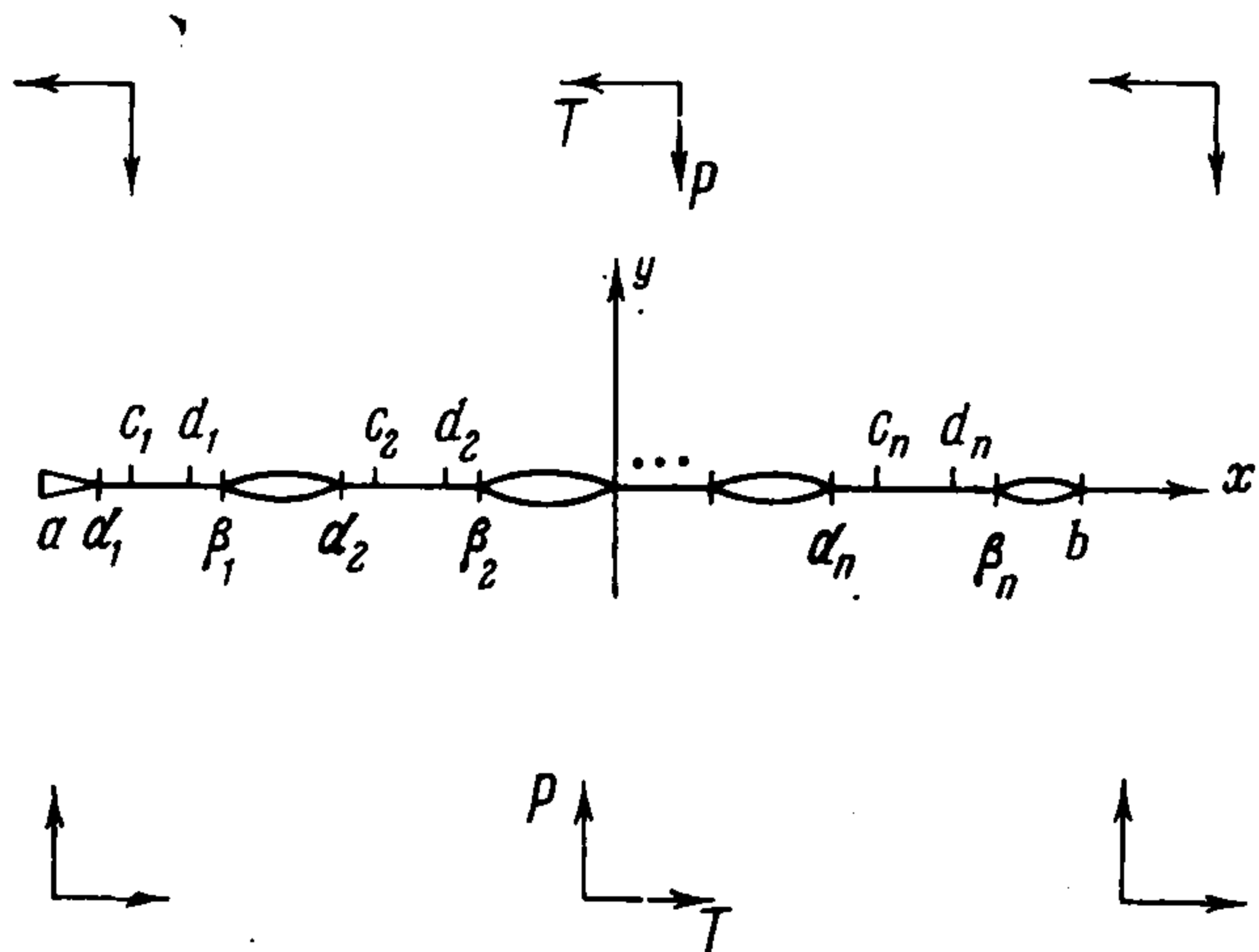
Л. Т. Бойко, П. Е. Беркович

(Днепропетровск)

Рассматривается задача о сжатии упругой плоскости со щелью переменной ширины, сравнимой с упругими деформациями. Исследуется случай возникновения нескольких участков контакта берегов щели. При этом на некоторой части площадки контакта возникает сцепление берегов, на остальной возможно проскальзывание. Методом Мусхелишвили с использованием аппарата линейного сопряжения аналитических функций получено решение задачи в квадратурах. Найдены потенциалы напряжений и смещений, определены размеры участков контакта и зон сцепления. Рассмотрен конкретный пример и проведены численные расчеты.

Контактная задача для плоскости, ослабленной прямолинейной щелью постоянной ширины, рассматривалась в работах [1-3].

1. Бесконечная упругая изотропная плоскость ослаблена прямолинейной щелью переменной ширины  $h(x)$ , сравнимой с упругими деформациями. Плоскость сжимается приложенными на бесконечности равномерно



Фиг. 1

распределенными усилиями с компонентами  $P$  и  $T$  (фиг. 1). В процессе

формации берега щели вступают в контакт по участкам  $(\alpha_k, \beta_k)$ . Каждая площадка контакта состоит из участка сцепления берегов  $(c_k, d_k)$  и двух участков  $(\alpha_k, c_k)$  и  $(d_k, \beta_k)$ , на которых возможно проскальзывание.

Обозначим:  $L_1$  — совокупность участков сцепления,  $L_2$  — совокупность участков проскальзывания,  $L_3$  — совокупность свободных участ-

ков;  $\rho(x)$  — коэффициент трения (закон трения принимаем в форме Кулона). Остальные обозначения совпадают с [4].

Граничные условия задачи имеют вид

$$(1.1) \quad Y_y^+ = Y_y^-, \quad X_y^+ = X_y^- \quad \text{на } L = L_1 + L_2 + L_3$$

$$(1.2) \quad v'^+ - v'^- = -h'(x) \quad \text{на } L_1 + L_2, \quad Y_y^+ = 0 \quad \text{на } L_3$$

$$(1.3) \quad u'^+ - u'^- = 0 \quad \text{на } L_1, \quad X_y^+ = \rho Y_y^+ \quad \text{на } L_2, \quad X_y^+ = 0 \quad \text{на } L_3$$

Компоненты тензора напряжений и смещения выражаем через две кусочно-аналитические функции комплексного переменного  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  [4]

$$Y_y - iX_y = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}$$

$$2\mu(u' + iv') = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}$$

Напряжения вдали от щели ограничены и главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру щели, равен нулю, поэтому

$$(1.4) \quad \Phi(z) = \Gamma + O(z^{-2}), \quad \Omega(z) = \Gamma + \bar{\Gamma} + O(z^{-2}), \quad |z| \gg b - a$$

$$\Gamma = -\frac{1}{4} \sqrt{P^2 + T^2}, \quad \Gamma' = B' + iC' = \frac{T^2 - P^2}{2 \sqrt{T^2 + P^2}} - i \frac{TP}{\sqrt{T^2 + P^2}}$$

Из граничного условия (1.1) получаем

$$[\Phi - \Omega]^+ = [\Phi - \Omega]^- \quad \text{на } L$$

откуда следует

$$(1.5) \quad \Phi(z) = \Omega(z) - \bar{\Gamma}'$$

Пользуясь (1.5), выразим напряжения и перемещения через одну функцию  $\Omega(z)$ . На контуре щели

$$(1.6) \quad 2Y_y^\pm = [\Omega + \bar{\Omega}]^+ + [\Omega + \bar{\Omega}]^- - 2B'$$

$$2iX_y^\pm = [-\Omega + \bar{\Omega}]^+ + [-\Omega + \bar{\Omega}]^- - 2iC'$$

$$(1.7) \quad 4\mu u'^\pm = [\kappa\Omega - \bar{\Omega}]^\pm - [\Omega - \kappa\bar{\Omega}]^\mp - 2\kappa B'$$

$$4\mu iv'^\pm = [\kappa\Omega + \bar{\Omega}]^\pm - [\Omega + \kappa\bar{\Omega}]^\mp + 2i\kappa C'$$

Подставляя (1.6) и (1.7) в граничное условие (1.2), приходим к задаче линейного сопряжения с разрывными коэффициентами

$$[\Omega + \bar{\Omega}]^+ - [\Omega + \bar{\Omega}]^- = -4\pi i \gamma h'(x) \quad \text{на } L_1 + L_2$$

$$[\Omega + \bar{\Omega}]^+ + [\Omega + \bar{\Omega}]^- = 2B' \quad \text{на } L_3, \quad \left( \gamma = \frac{\mu}{\pi(\kappa + 1)} \right)$$

Решение этой задачи записывается следующим образом:

$$(1.8) \quad \Omega(z) + \bar{\Omega}(z) = -2\gamma X_1(z) \int_{L_1 + L_2} \frac{h'(t) dt}{X_1^+(t)(t-z)} + B' +$$

$$+ [D_0 - B'G(n)] X_1(z)$$

Здесь

$$X_1(z) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(z - \alpha_k)(z - \beta_k)} / \sqrt{(z - a)(z - b)}, \quad G(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}$$

В силу (1.4) постоянные  $D_0$ ,  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  удовлетворяют следующим  $(n + 1)$  уравнениям:

$$(1.9) \quad D_0 = \begin{cases} 2\Gamma + 2B', & n = 1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_{L_1 + L_2} \frac{h'(t) t^k dt}{X_1^+(t)} = \frac{2\Gamma + B'}{2\gamma} A_k, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$$

При этом

$$\text{если } n = 1, \text{ то } A_0 = -\frac{1}{2}(a + b - \alpha_1 - \beta_1)$$

$$\text{если } n = 2, \text{ то } A_1 = -\frac{1}{2} \left[ a + b - \sum_{j=1}^2 (\alpha_j + \beta_j) \right], \quad A_0 = 1$$

если  $n \geq 3$ , то

$$A_{n-1} = -\frac{1}{2} \left[ a + b - \sum_1^n (\alpha_j + \beta_j) \right], \quad A_{n-2} = 1, \quad A_k = 0, \quad k \leq n-3$$

Недостающие  $n$  уравнений для определения координат концов участков контакта получаем из условий

$$(1.10) \quad v^+(\alpha_k) - v^-(\alpha_k) = -h(\alpha_k), \quad k = 1, 2, \dots, h$$

Из (1.7) имеем

$$(1.11) \quad v^+(x) - v^-(x) = \frac{1}{4\gamma\pi i} \int_a^x Y(t) dt, \quad Y(t) = [\Omega + \bar{\Omega}]^+ - [\Omega + \bar{\Omega}]^-$$

Подставляя выражения (1.11) в условия (1.10), находим искомые уравнения

$$(1.12) \quad \int_a^{\alpha_1} Y(t) dt = -4\pi i \gamma h(\alpha_1)$$

$$\int_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} Y(t) dt = -4\pi i \gamma [h(\alpha_{k+1}) - h(\beta_k)], \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Таким образом, для определения участков контакта имеем полную систему уравнений.

Из последнего граничного условия (1.3) с помощью (1.6) — (1.8) получаем следующую задачу линейного сопряжения:

$$\Omega^+ - \Omega^- = -2\pi i \gamma h'(x) \quad \text{на } L_1$$

$$\Omega^+ + \Omega^- = [1 - i\rho(x)] g(x) + \bar{\Gamma}' \quad \text{на } L_2$$

$$\Omega^+ + \Omega^- = \bar{\Gamma}' \quad \text{на } L_3$$

$$g(x) = -2\gamma X_1^+(x) \int_{L_1+L_2} \frac{h'(t) dt}{X_1^+(t)(t-x)} + [D_0 - B'G(n)] X_1^+(x)$$

Решая эту задачу, определим функцию  $\Omega(z)$

$$(1.13) \quad \Omega(z) = \frac{X_2(z)}{2\pi i} \left\{ -2\pi i \gamma \int_{L_1} \frac{h'(t) dt}{X_2^+(t)(t-z)} + \int_{L_2} \frac{[1 - i\rho(t)] g(t) dt}{X_2^+(t)(t-z)} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{\Gamma}' + \left[ C_0 - \frac{1}{2} G(m) \bar{\Gamma}' \right] X_2(z)$$

$$G(m) = \begin{cases} 1, & m = 1 \\ 0, & m \geq 2 \end{cases}, \quad X_2(z) = \prod_{k=1}^m \sqrt{(z - c_k)(z - d_k)} / \sqrt{(z - a)(z - b)}$$

( $m$  — число участков сцепления).

В силу (1.4) постоянные  $C_0$ ,  $c_k$  и  $d_k$  удовлетворяют следующим ( $m + 1$ ) уравнениям:

$$(1.14) \quad C_0 = \begin{cases} \Gamma + \bar{\Gamma}', & m = 1 \\ 0, & m \geq 2 \end{cases}$$

$$\gamma \int_{L_1} \frac{h'(t) t^k dt}{X_2^+(t)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{[1 - i\rho(t)] g(t) t^k dt}{X_2^+(t)} = \left( \Gamma + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}' \right) B_k$$

$$k = 0, 1, \dots, m-1$$

При этом

если  $m = 1$ , то  $B_0 = -\frac{1}{2}(a + b - c_1 - d_1)$

если  $m = 2$ , то  $B_1 = -\frac{1}{2}\left[a + b - \sum_1^2 (c_j + d_j)\right]$ ,  $B_0 = 1$

если  $m \geq 3$ , то

$$B_{m-1} = -\frac{1}{2}\left[a + b - \sum_1^m (c_j + d_j)\right], \quad B_{m-2} = 1, \quad B_k = 0, \quad k \leq m-3$$

Недостающие  $m$  уравнений для определения координат концов участков сцепления получаем из условий

$$u^+(c_k) - u^-(c_k) = \int_a^{c_k} (u'^+ - u'^-) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

С помощью (1.7) находим

$$(1.15) \quad \int_a^{c_1} [\Omega^+ - \Omega^-] dt = -2\pi i \gamma h(c_1)$$

$$\int_{d_k}^{c_{k+1}} [\Omega^+ - \Omega^-] dt = -2\pi i \gamma [h(c_{k+1}) - h(d_k)], \quad k = 1, 2, \dots, m-1$$

Таким образом, для определения участков сцепления имеем полную систему уравнений.

Контактные напряжения находим из (1.6)

$$Y_y^+ = g(x) \quad \text{на } L_1 + L_2'$$

$$X_y^+ = i[2C_0 - G(m)\bar{\Gamma}'] X_2^+(x) - ig(x) - 2\gamma i X_2^+(x) \int_{L_1} \frac{h'(t) dt}{X_2^+(t)(t-x)} +$$

$$+ \frac{X_2^+(x)}{\pi} \int_{L_2} \frac{[1 - i\rho(t)] g(t) dt}{X_2^+(t)(t-x)} \quad \text{на } L_1$$

$$X_y^+ = \rho(x) Y_y^+ \quad \text{на } L_2$$

2. В качестве примера рассмотрим контактную задачу для щели, ширина которой изменяется по линейному закону

$$h(x) = h_2 + (h_1 - h_2) \frac{b-x}{b-a}, \quad h'(x) = -\frac{h_1 - h_2}{b-a}$$

Коэффициент трения считаем постоянным  $\rho(x) = \rho_0$ .

В этом случае в процессе деформации возникает один участок контакта  $(\alpha, \beta)$ , следовательно

$$X_1(z) = \sqrt{\frac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-a)(z-b)}}, \quad X_2(z) = \sqrt{\frac{(z-c)(z-d)}{(z-a)(z-b)}}$$

Обозначим

$$D_1 = \frac{P^2}{\sqrt{P^2 + T^2}}, \quad C_1 = \frac{P(P\rho_0 - T)}{\sqrt{P^2 + T^2}}$$

Положение площадки контакта определяется из (1.9) и (1.12)

$$(2.1) \quad 4\gamma h' \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{X_1^+(t)} - D_1(a + b - \alpha - \beta) = 0$$

$$2i\gamma h' \int_{\alpha}^{\beta} X_1^+(x) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{X_1^+(t)(t-x)} dx + D_1 i \int_{\alpha}^{\beta} X_1^+(x) dx + 2\pi\gamma h(\alpha) = 0$$

В момент начала контакта  $\alpha = \beta$ . Переходя в системе (2.1) к пределу при  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha_*$ , находим точку, в которой возникает контакт, и соответствующую этому моменту нагрузку

$$\alpha_* = \frac{h_1 b + h_2 a}{h_1 + h_2}, \quad D_1^* = 4\gamma\pi \frac{\sqrt{h_1 h_2}}{b-a}$$

Из (1.13) находим выражение для функции  $\Omega(z)$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2} \bar{\Gamma}' - \frac{1}{2} (1 - i\rho_0) D_1 X_1(z) - \frac{i}{2} [D_1 \rho_0 + C'] X_2(z) -$$

$$- \gamma h' \left[ (1 - i\rho_0) X_1(z) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{X_1^+(t)(t-z)} + i\rho_0 X_2(z) \int_c^d \frac{dt}{X_2^+(t)(t-z)} \right]$$

Для определения координат концов участка сцепления из (1.14) и (1.15) имеем систему уравнений

$$4\gamma h' \int_c^d \frac{dt}{X_2^+(t)} - C_1(a + b - c - d) = 0$$

$$2i\gamma h' \int_a^c X_2^+(x) \int_c^d \frac{dt}{X_2^+(t)(t-x)} dx + C_1 \int_a^c X_2^+(x) dx + 2\gamma h(c) = 0$$

Переходя к пределу при  $c \rightarrow d \rightarrow c_*$ , находим нагрузку и место возникновения участка сцепления

$$C_1^* = 4\gamma\pi \frac{\sqrt{h_1 h_2}}{b-a} \rho_0, \quad c_* = \frac{h_1 b + h_2 a}{h_1 + h_2}$$

Как видно из последней формулы, участок сцепления возникает в точке, в которой начинается контакт берегов щели.

Напряжения на площадке контакта в данном случае определяются формулами

$$Y_y^+ = -X_1^+(x) \left\{ 2\gamma h' \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{X_1^+(t)(t-x)} + D_1 \right\}$$

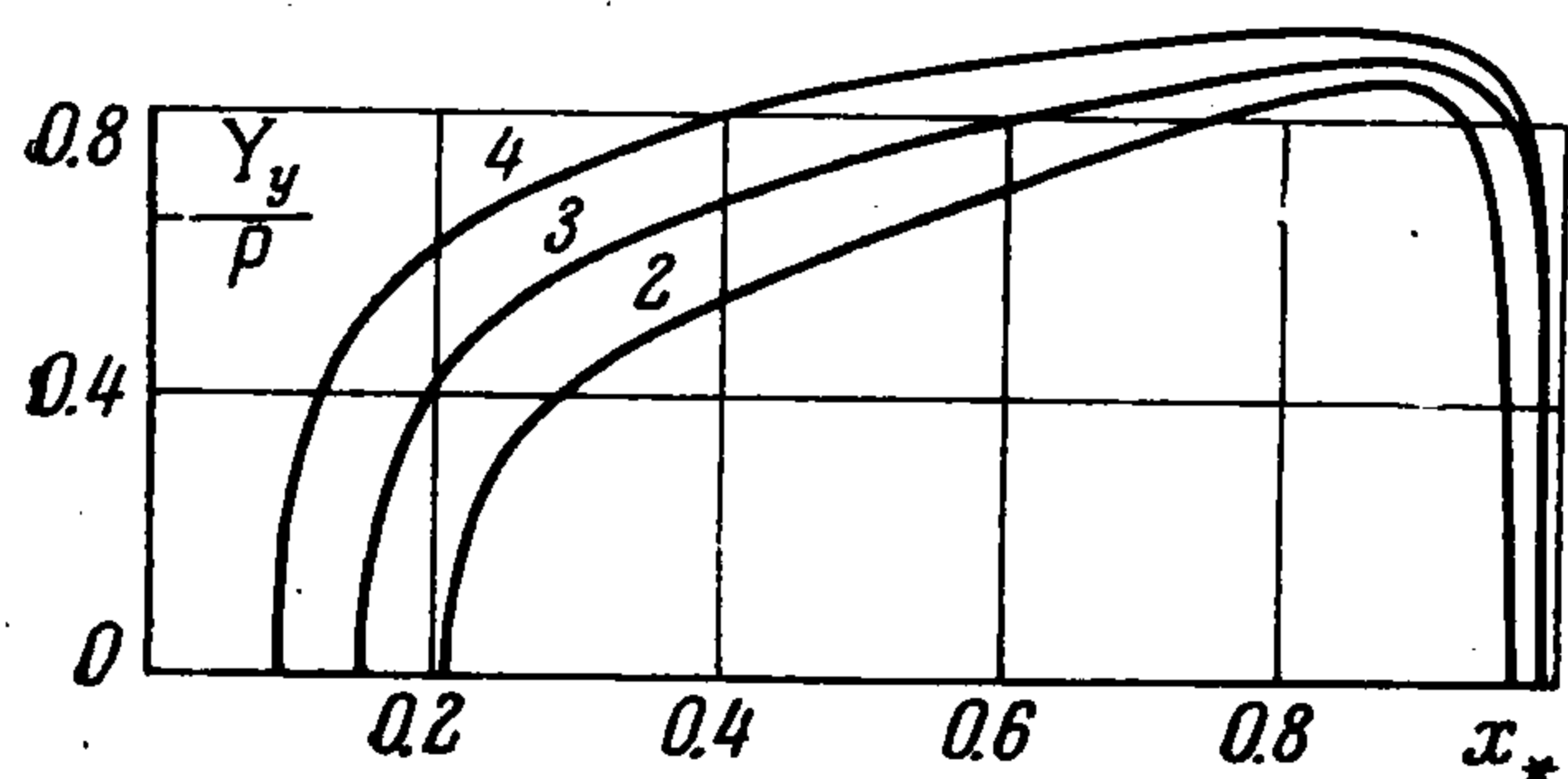
$$X_y^+ = -X_2^+(x) \left\{ 2\gamma h' \rho_0 \int_c^d \frac{dt}{X_2^+(t)(t-x)} + C_1 \right\} + \rho_0 Y_y^+ \quad \text{на } L_1$$

$$X_y^+ = \rho_0 Y_y^+ \quad \text{на } L_2$$

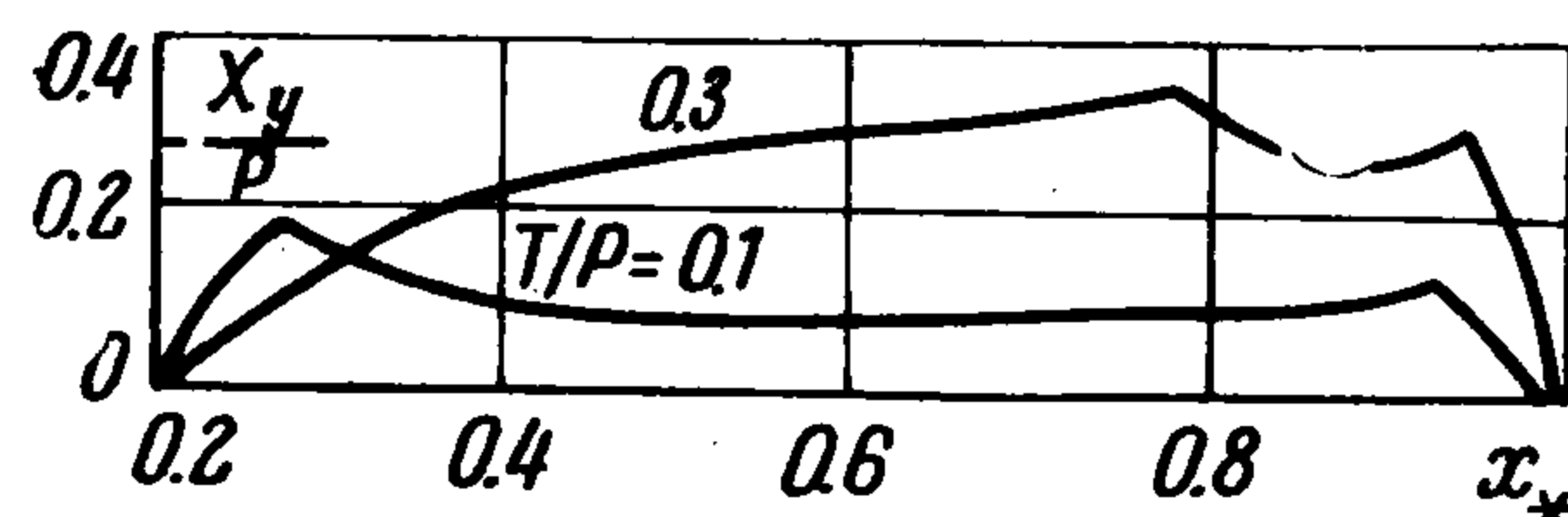
На фиг. 2 и 3 приведены графики контактных напряжений для случая  $h_1 = 0.0002(b-a)$ ,  $h_2 = 0.1 h_1$ ,  $(x_* = x / (b-a))$ . Для численного решения системы трансцендентных уравнений использован метод хорд [5, 6].

На фиг. 2 цифры у кривых соответствуют значениям  $10^4 \cdot P / E$  ( $E$  — модуль упругости материала). Для всех кривых  $T = 0.1 P$ . Как видно из графиков, концы участка сцепления не являются особыми точками для нормальных напряжений.

На фиг. 3 для обеих кривых  $P = 2 \cdot 10^{-4} E$ . Как видно из графиков, в точках раздела участков сцепления и проскальзывания касательное на-



Фиг. 2



Фиг. 3

пряжение непрерывно, но его производная терпит разрыв. Уменьшение угла между линией щели и линией действия нагрузки, т. е. увеличение компоненты  $T$ , приводит к уменьшению зоны сцепления.

Поступила 19 XI 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моссаковский В. И., Загубиженко П. А., О сжатии упругой изотропной плоскости, ослабленной прямолинейной щелью. Докл. АН УССР, 1954, № 5.
2. Беркович П. Е. Щель в неоднородном поле сжимающих напряжений. Прикл. механ., 1966, т. 2, вып. 5.
3. Бойко Л. Т. Контактная задача для плоскости с прямолинейным разрезом. Прикл. механ., 1973, т. 9, вып. 6.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
5. Фильчаков П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики. Киев, «Наукова думка», 1970.
6. Крылов В. И., Лугин В. В., Янович Л. Л. Таблицы для численного интегрирования функций со степенными особенностями  $\int_0^1 (1-x)^\alpha x^\beta f(x) dx$ . Минск, Изд-во АН БССР, 1963.