Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3

ЗАДАЧА ГЕРЦА О СЖАТИИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

В. А. Свекло

(Калининград)

На основании результатов работы [1] дается вывод основных соотношений Герца при сжатии анизотропных (ортотропных) тел, отличный от [2]. Показывается, что если упругие постоянные удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, то при сжатии осесимметричных тел вдоль их общей оси геометрической симметрии область контакта имеет форму круга.

1. Постановка задачи и ее решение. Под действием сжимающих сил P два тела, первоначально касающиеся в точке, имеют после деформации ввиду ее малости общую эллиптическую площадку соприкосновения. Если z_1 и z_2 совпадают по направлению с внутренними нормалями к поверхностям, ограничивающим тела, в точке их начального соприкосновения, то оси x, y, лежащие в общей касательной плоскости, всегда можно выбрать так, чтобы в области контакта имело место равенство

$$w_1 + w_2 = \delta - x^2 / 2R_1 - y^2 / 2R_2 \tag{1.1}$$

Здесь w_j — упругие перемещения точек тел в направлении z_j, δ — сближение тел, R_j заданы и определяются формой тел в окрестности начальной точки их соприкосновения [1]. При подсчете w_j ввиду малости размеров области давления тела заменяются полупространствами. Таким образом, согласно [1], напряжения на площадке давления при отсутствии трения определяется формулой

$$\sigma_z = 3P\,(2\pi ab)^{-1}\,(1 - x^2 / a^2 - y^2 / b^2) \tag{1.2}$$

Вне этой площадки на границах полупространств напряжения отсутствуют.

Соответствующая функция нагружения имеет вид [1]

$$\Psi(\Omega_{kj}) = \frac{3P}{8\pi\,(ab)^{3/2}}\left[-\sqrt{ab}\,\Omega_{kj} + \frac{ab-\Omega_k^2}{2}\ln\frac{\Omega_{kj}-\sqrt{ab}}{\Omega_{kj}+\sqrt{ab}}\right] \tag{1.3}$$

$$\Omega_{kj} = (\alpha x + \beta y + \nu_{kj} z)\,\Delta^{-1}, \quad \alpha = \cos\theta,\ \beta = \sin\theta$$

Учитывая ее предельное значение при $z_j = 0$ и указанный в [1] выбор ветвей логарифмов, получим

$$w_j = \frac{3P}{4\pi\,(ab)^{3/2}}\int_0^{\pi/2}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} i\,\frac{\Delta_{kj}^{(3)}\Delta_{kj}}{\Delta_{0j}}\left(ab - \frac{x^2\alpha^2+y^2\beta^2}{\Delta^2}\right)\frac{d\theta}{\Delta} \tag{1.4}$$

Значения $\Delta_{kj}^{(3)}$, Δ_{kj}, Δ_{0j}, Δ указаны в [1].

Подставляя в (1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, выводим основные соотношения

$$(1.5)\qquad \frac{3P}{4\pi (ab)^{1/2}} \int\limits_0^{\pi/2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Re} i \frac{\Delta_{kj}^{(3)}\Delta_{kj}}{\Delta_{0j}} \frac{d\theta}{\Delta} = \delta$$

$$(1.6)\qquad \frac{3P}{2\pi (ab)^{1/2}} \int\limits_0^{\pi/2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Re} i \frac{\Delta_{kj}^{(3)}\Delta_{kj}}{\Delta_{0j}} \alpha_\rho^2 \frac{d\theta}{\Delta} = R_\rho^{-1} \qquad (\rho = 1, 2)$$

$$\alpha_1 = \alpha, \ \alpha_2 = \beta$$

Равенства (1.5) и (1.6) позволяют найти полуоси a, b эллиптической площадки контакта и сближение тел δ. Действительно, если ε — эксцентриситет искомого эллипса, то $\Delta = [(a / b) (1 - \beta^2\varepsilon^2)]^{1/2}$ и из (1.6) выводим

$$(1.7)\qquad \int\limits_0^{\pi/2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Re} i\Delta_{kj}^{(3)}\Delta_{kj}\Delta_{0j}^{-1} \left(\alpha^2 - \frac{R_2\beta^2}{R_1}\right) (1 - \beta^2\varepsilon^2)^{-3/2} d\theta = 0$$

$$(1.8)\qquad \left(\frac{3}{4\pi}\right) Pa^{-3} \int\limits_0^{\pi/2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Re} i\Delta_{kj}^{(3)}\Delta_{kj}\Delta_{0j}^{-1} (1 - \beta^2\varepsilon^2)^{-3/2} d\theta = R_1^{-1} + R_2^{-1}$$

Определив из (1.7) ε и подставив в (1.8), найдем a, а затем b, δ. Легко проверить, что для изотропной среды (1.5) — (1.8) переходят в соответствующие соотношения Герца.

2. Частный случай ортотропного тела. В общем случае ортотропного тела, как это видно из (1.6), при сжатии осесимметричных тел вдоль их общей оси геометрической симметрии $b \neq a$, т. е. область давления имеет форму эллипса. Однако она имеет форму круга, если упругие постоянные сред удовлетворяют условиям

$$(2.1)\qquad B_j = A_j, \ M_i = L_j, \ G_j = F_j \ (j = 1, \ 2)$$

Действительно, при условии (2.1) уравнения (1.3) работы [1] могут быть записаны в виде (ограничиваемся рассмотрением соотношений для одной среды, опуская индексы)

$$(2.2)\qquad \sum_{k=1}^{3} (\nu_k^5 + L\nu_k^3 + E\nu_k)\,\omega_k = \frac{\Psi^+}{CL^2}$$

$$\sum_{k=1}^{3} (\nu_k^4 - D)\,\omega_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{3} \nu_k^2\omega_k = 0$$

$$(2.3)\qquad E = (1 / CL^2) \{N [AC - F (L + F)] + K_0 [C (A + H) - 2F (L + F)] \alpha^2\beta^2\}$$

$$L = (1 / CL) [C (A + N) - F (L + F)]$$

$$D = (1 / LF) [AN + K_0 (A + H) \alpha^2\beta^2], \quad K_0 = A - 2N - H$$

Здесь ν_k — корни уравнения (1.2) работы [1]. Из (2.2) выводим, сокращая дробь на $(\nu_1 - \nu_2)(\nu_2 - \nu_3)(\nu_3 - \nu_1)$

$$(2.4)\qquad w(x, y, 0) = \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Re} i \frac{\Delta_1^*}{\Delta_0^*} d\theta$$

Здесь

(2.5) $$\Delta_1^* = -(\nu_1 + \nu_2)(\nu_2 + \nu_3)(\nu_3 + \nu_1)(L + F) / CL$$

(2.6) $$\Delta_0^* = \begin{vmatrix} S_1(S_2 + L) + \Pi & \nu_2^5 + L\nu_2^3 + E\nu_2 & A_{23} \\ S_2 + S_{ik} & \nu_2^4 - D & (\nu_2 + \nu_3)(\nu_2^2 + \nu_3^2) \\ 1 & \nu_2^2 & \nu_2 + \nu_3 \end{vmatrix}$$

(2.7) $$S_1 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3, \quad \Pi = \nu_1\nu_2\nu_3$$

$$S_{ik} = \nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1, \quad S_2 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2$$

$$A_{23} = \nu_3^4 + \nu_3^3\nu_2 + \nu_3^2\nu_2^2 + \nu_3\nu_2^3 + \nu_2^4 + L(\nu_3^2 + \nu_3\nu_2 + \nu_2^2) + E$$

Раскрывая определитель (2.6), получим

(2.8) $$\Delta_0^* = [D(S_2 + L) + \Pi^2] S_{ik} - (E + L)\Pi S_1 + E - \nu_1^2\nu_2^2 - \nu_2^2\nu_3^2 - \nu_3^2\nu_1^2) D + L\Pi^2$$

Легко проверить, что $D(S_2 + L) + \Pi^2 = 0$. Имеем далее

(2.9) $$\nu_1^2\nu_2^2 + \nu_2^2\nu_3^2 + \nu_3^2\nu_1^2 = (1 / CL^2)\{N[AC - (L + F)^2] + L^2(A + N) + K_0[C(A + H) - 2(L + F)^2]\alpha^2\beta^2\}$$

(2.10) $$\nu_1^2\nu_2^2\nu_3^2 = -FD / C$$

Рассмотрим $S_1 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$. Здесь под ν_k понимаются корни уравнения (1.2) [1], имеющие положительные мнимые части при всех α, β. Их существование обеспечивается требованием полной эллиптичности уравнений равновесия рассматриваемых анизотропных сред (в противном случае легко построить вещественные характеристики этих уравнений).

Из (2.10) следует, что имеются две возможности: а) все ν_k^2 вещественные отрицательные (в данном случае все ν_k чисто мнимы), б) одно из ν_k^2, например, ν_1^2 — отрицательная вещественная величина, остальные — комплексно-сопряженные. Здесь $\nu_1 = in_1$, $n_1 > 0$; $\nu_2 = m + in_0$, $\nu_3 = -m + in_0$, $n_0 > 0$.

В обоих случаях имеем: $S_1 = in$, $n > 0$. Из (2.10) выводим

(2.11) $$\Pi = -i\sqrt{FD / C}$$

Перед корнем следует брать знак минус, так как в случае изотропной среды $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = i$, $\Pi = -i$.

Учитывая значения указанных величин, получим

(2.12) $$-\Delta_0^* = (L + F) / CL[(AC - F^2) / C - 2K_0\alpha^2\beta^2] D + (1 / LF)\{N(AC - F^2) + K_0[(A + H)C - 2F^2]\alpha^2\beta^2\} \times \sqrt{FD / Cn}$$

Если упругие постоянные положительны и подчиняются неравенствам

(2.13) $$HC - F^2 \geqslant 0, \quad A \geqslant H$$

то правая часть (2.12) положительна. Условия (2.13) выполняются для всех реальных анизотропных тел рассматриваемого класса, приведенных в [3]. Имеем далее $\Delta_1^* = i\Delta_1^{**}$, где $\Delta_1^{**} > 0$ в обоих указанных выше случаях. Таким образом, полагая $\Delta_0^* = -\Delta_0^{**}$, $\Delta_2^{**} > 0$, получим для всех α, β

$$\sum_{k=1}^{3} \operatorname{Re} i\Delta_k^{(3)}\Delta_k\Delta_0^{-1} = \frac{\Delta_1^{**}}{\Delta_0^{**}} > 0 \tag{2.14}$$

Видно, что выражение (2.14) зависит только от α^2, β^2 и симметрично относительно этих аргументов. Таким образом, для сред, удовлетворяющих условиям (2.1), уравнение (1.7) записывается в виде

$$\int_0^{\pi/2} T(\alpha^2, \beta^2)\,(\alpha^2 - R_2R_1^{-1}\beta^2)(1 - \beta^2\varepsilon^2)^{-3/2}\,d\theta = 0 \tag{2.15}$$

$$T(\alpha^2, \beta^2) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} \operatorname{Re} i\Delta_{kj}^{(3)}\Delta_{kj}\Delta_{0j}^{-1} > 0, \qquad T(\alpha^2, \beta^2) = T(\beta^2, \alpha^2)$$

Докажем следующий результат: если $R_1 = R_2 = R$, то $\varepsilon = 0$.

Действительно, в данном случае имеем

$$\int_0^{\pi/2} T(\alpha^2, \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)(1 - \beta^2\varepsilon^2)^{-3/2}\,d\theta = 0 \tag{2.16}$$

Отсюда, совершая замену переменной интегрирования, полагая $\theta_1 = \theta - \pi/2$, выводим

$$\int_0^{\pi/2} T(\alpha^2, \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)(1 - \alpha^2\varepsilon^2)^{-3/2}\,d\theta = 0 \tag{2.17}$$

Вычитая (2.17), из (2.16), получим

$$\varepsilon^2 \int_0^{\pi/2} T_1(\alpha^2 - \beta^2)^2\,d\theta = 0 \tag{2.18}$$

Здесь

$$T_1 = T\,[2 - \varepsilon^2 + (E_1E_2)^{1/2}]\,(E_1E_2)^{-3/2}\,[E_1^{1/2} + E_2^{1/2}]$$

$$E_1 = 1 - \alpha^2\varepsilon^2, \quad E_2 = 1 - \beta^2\varepsilon^2$$

Так как $T_1 > 0$, то интеграл в (2.18) отличен от нуля и, следовательно, $\varepsilon = 0$, что и требовалось.

Введем обозначения

$$\int_0^{\pi/2} T(\alpha^2, \beta^2)\,d\theta = m_0 = m_1^\circ + m_2^\circ, \quad m_j^\circ = 2\sum_{k=1}^{3} \operatorname{Re} i\Delta_{kj}^{(3)}\Delta_{kj}\Delta_{0j}^{-1}$$

Тогда

$$\int_0^{\pi/2} T(\alpha^2, \beta^2)\, \alpha^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} T(\alpha^2, \beta^2)\, \beta^2 d\theta = \frac{1}{4} m_0$$

Из (1.6) выводим формулы для радиуса круга соприкосновения a и сближения тел δ

$$a = [3\,(8\pi)^{-1} R P m_0]^{1/3}, \quad \delta = [3\,(8\pi)^{-1} P R^{1/2} m_0]^{2/3} \tag{2.19}$$

Упругие перемещения точек тел на участке соприкосновения, согласно (1.4), определяются формулами

$$w_j = m_j^0 m_0^{-1} (\delta - \rho^2 / 2R), \quad \rho^2 = x^2 + y^2 \tag{2.20}$$

Соотношения (2.19), (2.20) лишь значением постоянных m_0, m_j^0 отличаются от соответствующих формул Герца для изотропной среды.

Поступила 18 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свекло В. А.* Действие штампа на упругое анизотропное полупространство. ПММ 1970, т. 34, вып. 1.
2. *Willis J. R.* Hertian contact of anisotropis bodies. J. Mech. and Phys. of Solids, 1966, vol. 14, No. 3.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.— Л., ОНТИ, 1935.